DAUER'SCHE
handlung
OPPINO)
CHEN.

Leroy

Math. A.
180 i
(Vol. I)

J. LINDAUER'SCHE
Buchhandlung
(SCHÖPPING)
MÜNCHEN.

4° Math. A.

Die Stereotomie

(Lehre vom Körperschnitte),

enthaltend:

die Anwendungen der darstellenden Geometrie auf die Schattenlehre, Linear-perspective, Gnomonik, den Steinschnitt und die Holzverbindungen,

mit einem

ATLAS

von 74 Tafeln in gr. Folio,

von

C. F. A. Leroy,

Professor an der polytechnischen Schule zu Paris, Ritter der französischen Ehren-Legion.

Aus dem Französischen bearbeitet

von

E. F. Kauffmann,

Professor am Gymnasium zu Stuttgart.

Zweite wohlfeile Ausgabe.

Stuttgart,

Ad. Becher's Verlag.

(Gustav Hoffmann.)

1861.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorrede.

Dieses Werk enthält verschiedene Anwendungen der Darstellenden Geometrie, nämlich: die Schattenlehre, als Vervollständigung der Darstellungsmethode durch Projectionen, die Gnomonik, die Linearperspective und endlich die Stereotomie im eigentlichen Sinne. Unter letzterer versteht man die Kunst, feste Stoffe, wie Holz und Stein, so zuzuschneiden und zu behauen, dass die dadurch entstandenen einzelnen Stücke, in einer gewissen Ordnung vereinigt, ein Ganzes darstellen, dessen Form zum Voraus bestimmt war, und welches für den Gebrauch, zu welchem es dienen soll, die nöthige Festigkeit und Dauerhaftigkeit habe. Es beschränkt sich aber diese Kunst nicht bloss auf das Geschäft des Arbeiters, der aus Stein oder Holz die einzelnen Stücke darstellt, welche nachher mit einander verbunden oder über einander gelegt werden sollen; denn vorher muss der Architekt oder Ingenieur prüfen, welche Vortheile oder Nachtheile diese oder jene Gewölbeform darbiete; ferner, wie ein Gewölbe mit einem

andern schon bestehenden, oder zugleich mit ihm erbauten, am zweckmässigsten zu verbinden sei; nach welcher Methode, in diesem oder jenem Falle, die Theilung des Ganzen in Gewölbesteine vorgenommen werden müsse, um die Stabilität des Gebäudes zu sichern, und Setzungen zu verhüten; er muss ferner die Verbindungen der verschiedenen Holzstücke eines Zimmerwerkes so anordnen, dass der Verband unveränderlich werde, und nirgends ein Hang auf die Seite stattfinde, oder ein Druck ohne die gehörige Stütze bleibe. Der Berechnungen, welche über die Dimensionen, die man den einzelnen Stücken geben will, über die Pfeiler, Widerlager u. s. w. angestellt werden müssen, soll hier gar nicht gedacht werden, weil diese nicht Gegenstand der Stereotomie sind, sondern von den Lehrbüchern über die Baukunst behandelt werden. Wenn ferner der Ingenieur die Handhabung der einzelnen Werkzeuge auch nicht zu verstehen braucht, so muss er doch die Verfahrungsarten kennen, mittelst welcher der Steinhauer oder Zimmermann seine Arbeiten ausführt, damit er dieselben überwachen und, im Nothfalle, den Arbeiter zurechtweisen kann. Auch muss er nicht selten, in Ermangelung eines tüchtigen Bauführers, den Riss zu dem projectirten Werke, so wie die zum Steinschnitte nöthigen Brettungen und **Lehren** selbst zeichnen, besonders wenn etwas verwickelte Gewölbeverbindungen vorkommen, wie dieses bei gewissen permanenten Befestigungswerken der Fall ist.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass die älteren Baumeister schon, und besonders die Zimmerleute, welche durch den häufigen Gebrauch des Bleilothes von selbst auf die Vorstellung projicirender Linien kommen mussten, sich der Projectionsmethode bedienten, um die genaue Form der Gewölbesteine oder der Holzverbindungen zu bestimmen; aber die Anwendung war nur eine instinctmässige, und erforderte für jeden besondern Fall ein besonderes Verfahren. Auch findet man in den Werken der ersten Schriftsteller, welche diesen Gegenstand behandelten, nur die Aufeinanderfolge der

graphischen Operationen, wie sie in einzelnen Fällen auszuführen sind, auf eine höchst ermüdende Weise dargestellt, ohne dass dem Gedächtnisse eine Stütze oder dem Verstande durch geometrische Betrachtungen eine Anleitung geboten würde, durch welche er in anderen, als den eben behandelten Fällen, sich selbst zurecht zu finden im Stande wäre. In diesem handwerksmässigen Geiste sind folgende Werke geschrieben:

Traité d'architecture von Philibert Delorme, 1576;

Les secrets de l'architecture von Mathurin Jousse, 1642 (von Lahire im Jahre 1702 neu herausgegeben);

L'architecture des voûtes von Derand, 1643;

Traité de coupe des pierres von Delarue, 1728.

Eben so ist es mit dem neuern, im Jahre 1786 erschienenen Werke von Fourneau, das bloss die Reisskunst behandelt, und seiner Schreib- und Eintheilungsart wegen sehr ermüdend zum Lesen ist. Dagegen gab im Jahre 1738 der Ingenieur Frézier, später Director der Befestigungswerke in der Bretagne, ein Werk heraus, *Traité de Stéréotomie* betitelt, in welchem er die Linien- und Flächencombinationen, welche das eigentliche Wesen des Stein- und Holzschnittes ausmachen, so wie die praktischen Verfahrungsarten, welche dabei in Anwendung gebracht werden müssen, aus den Principien der Geometrie erklärt. Dieses Werk machte in der Zeit, da es erschien, grosses Glück, und verdient noch immer studirt zu werden; auch muss, damit dem Verfasser der Antheil bewahrt bleibe, den er an der Fortbildung der Wissenschaft hatte, hier bemerkt werden, dass er bereits die horizontale und vertikale Projection zur Bestimmung der Gewölbsteine angewendet hat.

Endlich sann Monge, dem in den Jahren 1770—1784 an der Militairschule zu Mézières der Unterricht in der Stereotomie übertragen war, auf Mittel, alle die verschiedenen bei der Fortification, beim Strassen- und Canalbaue, beim Holz- und Steinschnitte in Anwendung kommenden Ver-

fahrungsarten durch ein gemeinschaftliches Band zu vereinigen, und — siehe da — sein Genie rief eine neue, von jeder besondern Anwendung auf irgend eine Kunst unabhängige, Wissenschaft in's Leben, nämlich die Darstellende Geometrie, welche er zuerst in Mézières, später (1794) an der polytechnischen Schule, und hernach an den im Jahre 1795 in Paris errichteten Normalschulen lehrte. Die Vorträge an diesen Schulen, in einen Band vereinigt, bildeten das erste Lehrbuch der darstellenden Geometrie, einer Wissenschaft, deren allgemeine Methoden jetzt allen graphischen Künsten zur Grundlage dienen.

In vorliegendem Werke sind alle interessanten und wahrhaft nützlichen Aufgaben vereinigt, welche der Steinschnitt und besonders die Gewölbeconstruction darbieten kann. Was die Holzverbindungen betrifft, so war es hauptsächlich der Wunsch, ein längst angekündigtes Werk nicht länger zurückzuhalten, das den Verfasser nöthigte, sich auf die wichtigsten Aufgaben der Dächer- und Treppenconstruction zu beschränken. Leser, welche weitere Zweige dieses Theiles der Stereotomie, besonders den Brücken- und Schiffsbau studiren wollen, werden in dem vortrefflichen Werke von Emy, betitelt *Traité de charpenterie*, in 2 Quartbänden, volle Befriedigung finden.

Inhalt.

Erster Abschnitt: Schattenlehre.

I. Kapitel.

Seite

Allgemeine Bemerkungen . . . 1

II. Kapitel.

Verschiedene Beispiele . . . 8
- Schatten einer Kugel . . . 8
- Schatten einer Barrière . . . 9
- Besondere Lichtstrahlen . . . 11
- Schatten der Kamine auf einem Dache . . . 13
- Schatten einer Nische . . . 17
- Schatten einer Brücke . . . 23
- Schatten eines Fussgestelles . . . 30
- Schatten eines Säulenkapitäls . . . 37
- Schatten eines Säulenfusses . . . 44
- Schatten einer Schraube mit dreieckigem Gewinde . . . 46
- Anderer Fall der Schatten auf einer dreieckigen Schraube . . . 48
- Schatten einer Schraube mit viereckigem Gewinde . . . 56

III. Kapitel.

Ueber die glänzenden Punkte und die Abstufungen der Licht- und Farbenstärke . . . 59
- Ueber die Abstufungen der Licht- und Farbenstärke . . . 66

Zweiter Abschnitt: Linearperspective.

I. Kapitel.

Allgemeine Bemerkungen . . . 79

II. Kapitel.

Methode der Fluchtpunkte . . . 84
- Perspective verschiedener Pfeiler . . . 93
- Perspective eines Obelisken . . . 96

III. Kapitel.

Verschiedene Aufgaben über die geraden Linien . . . 98
- Von den horizontalen, mit der Tafel nicht parallelen Geraden . . . 98
- Gerade, welche parallel mit der Tafel sind . . . 102
- Gerade Linien von beliebiger Richtung . . . 104
- Von den perspectivischen Massstäben . . . 106

Seite
Von der figürlichen oder reducirten Distanz 108
Umgekehrte Probleme der Perspective 110
Perspective des Innern einer Gallerie 113
Aeussere Ansicht einer Kapelle 114
Perspective eines geneigten Würfels 116

IV. Kapitel.

Krumme Linien 119
Perspective eines horizontalen Kreises 120
Perspective eines Kreuzgewölbes 130
Kreuzgewölbe mit mehreren Abtheilungen 135
Ein anderes Kreuzgewölbe mit Abtheilungen 137
Perspective einer Freitreppe 139

V. Kapitel.

Allgemeine Methode der Perspective 141
Perspective eines Fussgestelles 142
Perspective eines Wulstes 149

VI. Kapitel.

Perspective der Schatten 153
Perspective eines Fussgestelles mit seinem Schatten 154
Perspective eines Kapitals und seiner Schatten 155
Perspective eines Kreuzgewölbes und seiner Schatten 160

VII. Kapitel.

Perspective der durch Reflexion entstandenen Bilder 163
Perspective einer Treppe und ihres Bildes in einem Wasserspiegel 164
Perspective eines Saales und seines von einer Spiegelfläche reflectirten Bildes 166

VIII. Kapitel.

Seltsame Perspectiven und Anamorphosen 168
Von den Anamorphosen oder Zerrbildern 169

Dritter Abschnitt: Gnomonik.

I. Kapitel.

Allgemeine Begriffe 173

II. Kapitel.

Construction einer horizontalen Sonnenuhr 180

III. Kapitel.

Vertikale, nicht declinirende Sonnenuhr (Mittagsuhr) 184

IV. Kapitel.

Declinirende Vertikal-Sonnenuhr 184

Vierter Abschnitt: Steinschnitt.

I. Kapitel.

Allgemeine Bemerkungen 191

II. Kapitel.

Von den Mauern und scheitrechten Bögen 193
Bemerkungen über das Setzen oder Legen der Steine 199

III. Kapitel.

Seite

Von den Tonnengewölben und Thorbögen 201
Gerader Thorbogen 203
Gerades Tonnengewölbe 205
Schräges Thor in eine anlaufende Mauer und in ein gemauertes Tonnengewölbe 205
Von den Tangenten 209
Entwickelte (verstreckte) Brettungen 210
Bearbeitung des Steines nach dem Musterrisse 211
Behauung des Steines mittelst Winkelmass und Brettung 212
Bearbeitung des Steines mittelst der Schmiege 213
Schräges Thor in einem runden Thurme aussen anlaufend und innen mit Kuppelgewölbe 216
Von den Tangenten 218
Schräger Durchgang 221
Andere Auflösung mit windschiefer Wölbungsfläche (*Corne-de-vache*) 222
Der Marseiller Kernbogen (*Arrière-voussure de Marseille*) 225
Der Kernbogen von Montpellier 231
Der Kernbogen von St. Antoine 232

IV. Kapitel.

Sphärische und sphäroidische Gewölbe 234
Sphärisches Gewölbe mit horizontalen Schichten 234
Schlussnische eines Tonnengewölbes. (*Voûte en cul-de-four*) 239
Sphärische Nische 240
Gewölbe durch Umdrehung um eine Vertikalaxe entstanden 241
Elliptische, durch Umdrehung um eine horizontale Axe erzeugte Gewölbe 242
Ellipsoidisches Gewölbe mit drei ungleichen Axen 248

V. Kapitel.

Durchdringung der Gewölbe 251
Kreuzgewölbe und Klostergewölbe 251
Tonnengewölbe mit rechtwinkliger Wiederkehr 253
Kreuzgewölbe mit doppeltem Gratbogen und abgestumpften Seiten 260
Kreuzgewölbe mit doppeltem Grat und Strebebögen 260
Gerades Gewölbeauge in einem Tonnengewölbe 261
Schräges Gewölbeauge in einem Tonnengewölbe 264
Schräges Gewölbeauge in einem sphärischen Gewölbe 266
Gewölbe mit Strebebögen und Schlussmauer (*Voûte en pendentif avec fermerets*) 268
Andere Art der Zurüstung desselben Gewölbes 270
Gewölbe mit Strebebögen und einmündenden Tonnengewölben 271
Strebebögen mit Zwischenpfeilern, einmündenden Tonnengewölben und Gurtbögen 274
Kern-Strebebögen mit abgestumpften Pfeilern, welche einen runden Thurm tragen 275
Ringförmiges Kreuzgewölbe (*Voûte d'arêtes en tour ronde*) 277

VI. Kapitel.

Von den absteigenden Gewölben (*Descentes*) 285
Ein gerade absteigendes Gewölbe, in ein gemauertes Tonnengewölbe einmündend 285
Schräg absteigendes Gewölbe, in ein gemauertes Tonnengewölbe einmündend 288
Schräg absteigendes Gewölbe, in ein Tonnengewölbe einmündend (Zweite Auflösung) 290

VII. Kapitel.

Von den Trompengewölben (*Trompes*) 292
Trompengewölbe über einer schrägen Ecke mit Böschung 292
Trompengewölbe über einer abgestumpften Ecke 298
Trompengewölbe, welches den Ruheplatz einer Treppe trägt 300
Cylindrisches Trompengewölbe, ein Thürmchen tragend 301
Cylindrisches Trompengewölbe über einer abgestutzten Ecke 303
Nischenartiges Trompengewölbe 304

VIII. Kapitel.

Seite

Von den Treppen 304
Freitreppe mit einer runden Oeffnung in der Mitte *(Escalier suspendu dit vis-à-jour)* 306
Wange einer in der Mitte offenen Freitreppe 311
Kreisförmige Treppe 315
Spindel-Treppe 316
Gewölbe unter einer runden Spindeltreppe *(Vis St. Gilles ronde)* 318
Gewölbe unter einer viereckigen Spindel-Treppe *(Vis St. Gilles carrée)* 323

Fünfter Abschnitt: Holzverbindungen.

I. Kapitel.

Allgemeine Bemerkungen 325

II. Kapitel.

Von den Dächern im Allgemeinen 332

III. Kapitel.

Von den Dachstühlen 335
Gebrochene oder Mansardendächer 338

IV. Kapitel.

Ein Dach mit geradem Walme 339

V. Kapitel.

Schräger Walm 350
Directe Auflösung der Aufgabe vom schief gestellten Schiftsparren 353

VI. Kapitel.

Dachkehlen 356

VII. Kapitel.

Dachpfetten und Tragklötze 361

VIII. Kapitel.

Hölzerne Treppe mit gewundenen Sargen 368

Anhang.

A. Von den Curven mit mehreren Mittelpunkten (zu §. 607) 376
B. Ueber schräge Brücken (zu §. 654) 380
C. Zu §. 15 381

Erster Abschnitt.

S c h a t t e n l e h r e.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Bemerkungen.

§. 1.

Die darstellende Geometrie kann, als Auffindungsmethode betrachtet, dazu dienen, die genauen Dimensionen der Körper, welche, in der Baukunst z. B., in eine gewisse vorgeschriebene Verbindung treten sollen, zu bestimmen; wie sie denn beim Steinschnitt und bei Holzverbindungen angewendet wird, um den Schnitt der Gewölbsteine und der Balken eines Dachgerüstes vorzubereiten. Aber eben diese, für einen Ingenieur so unentbehrliche, Wissenschaft kann auch als Darstellungsmethode betrachtet werden; und unter diesem letzteren Gesichtspunkt muss die Anwendung der Schatten als eine nothwendige Ergänzung zur vollständigen Darstellung eines Gegenstandes erscheinen, und überdiess als ein sehr vortheilhaftes Mittel, um dem Auge zur schnellen Auffassung der verschiedenen, zu einem Ganzen verbundenen Theile eines Bauentwurfes zu verhelfen. Um nämlich einen solchen Entwurf zu studiren, muss man seine Blicke und seine Aufmerksamkeit bald auf die Horizontal-, bald auf die Vertikalprojection jedes einzelnen Gegenstandes werfen, um eine genaue Vorstellung von den Dimensionen und der Lage desselben zu bekommen; sind aber auf der Horizontalebene z. B. auch die Schatten verzeichnet, welche die verschiedenen Körper auf einander werfen, so braucht man nur diese einzige Projection zu betrachten, um, aus der Figur und Ausdehnung jener Schatten, ein deutliches Bild von der Form und gegenseitigen Lage der Körper und unmittelbar auch eine mindestens annähernde Vorstellung von der auf der Horizontalebene nicht ausgedrückten verticalen Dimension zu erhalten. Später (§. 40) wird übrigens gezeigt werden, dass die einzige Horizontalprojection eines Gegenstandes, wenn sie zugleich die auf diese Ebene geworfenen Schatten enthält, wirklich das System zweier Projectionen — der orthogonalen und der schiefen — ersetzt; woraus folgt, dass diese Darstellungsweise hinreicht, um den fraglichen Gegenstand nach aller Strenge zu bestimmen.

§. 2.

Taf. I. Fig. 1. Statt eines leuchtenden Körpers sei vorerst ein leuchtender körperlicher Punkt S gegeben. Dieser Punkt stösst rings um sich her und nach allen Richtungen eine Menge leuchtender Theilchen aus *), deren jedes, wie die Erfahrung lehrt, einen geradlinigen Weg verfolgt, so lange es in demselben Medium bleibt und auf keinen Körper stösst, der es absorbirt oder zurückwirft. Dieser geradlinige Weg, oder vielmehr die Reihe leuchtender Theilchen, welche alle hinter einander in derselben Richtung sich fortbewegen, heisst ein Lichtstrahl, und diese Lichtstrahlen sind es, welche, wenn sie unser Gesichtsorgan treffen, uns von dem Dasein des leuchtenden Gegenstandes Kunde geben; Gesichtslinien hingegen sind geometrische Linien, welche wir uns von unserem Auge nach jedem Punkt des betrachteten Körpers gezogen denken.

§. 3.

Wird nun ein undurchsichtiger Körper T dem leuchtenden Punkte S ausgesetzt, so wird er einen Theil der Lichtstrahlen aufhalten, dessen räumliche Grösse zu bestimmen, man sich eine conische Fläche denken muss, die ihren Scheitel in S habe und um den Körper T längs einer gewissen Curve AMBNA umschrieben sei; alsdann wird der nach der entgegengesetzten Seite von S verlängerte Kegelstumpf EAMBF alle Punkte des Raumes enthalten, welche kein unmittelbares Licht empfangen, weil offenbar keine Gerade von S nach irgend einem jener inneren Punkte gezogen werden kann, ohne den Körper T zu durchdringen, welcher undurchsichtig, d. h. undurchdringlich für das Licht angenommen ist: dieser Kegelstumpf EAMBF ist mithin der durch den Körper T im Raum hervorgebrachte Schatten. — Die Berührungslinie AMBNA theilt die Oberfläche des Körpers T in zwei wohl unterschiedene Theile, deren erster ACB von dem Punkte S erleuchtet wird, während der zweite ADB keinen Lichtstrahl unmittelbar von S empfangen kann, und daher ganz finster sein muss: die Curve AMBNA heisst daher die Licht- und Schattengrenze auf dem Körper T. Es wird hier auf die Reflexe der Atmosphäre und der in der Umgebung von T befindlichen Körper keine Rücksicht genommen; später aber (§. 236) wird von diesen Nebenumständen, durch welche die Verfinsterung des Flächentheiles ADB etwas gemildert wird, die Rede sein.

§. 4.

Durchschneidet man den von dem Körper T geworfenen Schattenkegel durch eine Ebene VXY oder durch irgend eine andere Fläche, so ergibt sich eine Durchschnittscurve ambna, welche alle Punkte von VXY umschliesst, die von keinem direct von S ausgehenden Lichtstrahl getroffen werden, während alle ausserhalb dieser Curve liegenden Punkte erleuchtet sind. Der von der Linie ambn umschlossene Theil der Fläche VXY heisst der vom Körper T auf diese Fläche geworfene Schlagschatten.

§. 5.

Was nun die graphische Construction dieser Curven betrifft, so ist bekannt (Darst. Geom. §. 347), dass man nach der allgemeinen Methode verschiedene schneidende Ebenen durch S legen, ihre mit T erzeugten Durchschnittscurven bestimmen und an diese letzteren aus S Tangenten ziehen muss; die hiedurch erhaltenen Berührungspunkte bestimmen alsdann die Grenzlinie AMBN von Schatten und Licht auf dem Körper T. Sucht

*) Es wird hier zur Erklärung die Emissionstheorie angewendet, wobei jedoch ganz abgesehen wird von verschiedenen mit den feineren Erscheinungen der Optik verbundenen Umständen, weil diese keinen berechenbaren Einfluss auf die graphischen Operationen haben.

man hierauf die Durchschnitte eben dieser Tangenten mit der Fläche VXY, so erhält man die den Schlagschatten auf VXY umgrenzende Curve ambn. — Ist aber T eine cylindrische oder eine Umdrehungsfläche, oder eine Fläche zweiten Grades, so gibt es einfachere Constructionsmethoden, welche man im fünften Abschnitt der darstellenden Geometrie entwickelt findet.

§. 6.

Es seien jetzt zwei leuchtende Punkte S und S' gegeben, welche den Körper T gleichzeitig erhellen. Taf. I. Fig. 2. Man bestimme nun für jeden einzelnen dieser Punkte nach der im vorigen §. gegebenen Methode die Grenzlinien AMBN und A'M'B'N' und hierauf die Schlagschattencurven ambn und a'm'b'n'. Die beiden letzteren müssen in m und m' eine gemeinschaftliche Tangente haben, nämlich den Durchschnitt der Ebene VXY mit der Berührungsebene der Fläche T in M, welche letztere Ebene die beiden umschriebenen Kegel zugleich berührt (D. G. §. 395). Nun kann man also erkennen, welche Theile der Ebene XVY erleuchtet und welche verfinstert wären, wenn sie nach einander von jedem der Punkte S, S' einzeln erleuchtet würde. Nimmt man aber an, dass die Punkte S und S' ihr Licht gleichzeitig auf XVY werfen, so hat man neue Unterscheidungen zu machen. Jeder Punkt nämlich, welcher sich in dem beiden Curven gemeinschaftlichen Theile aHb'Ga befindet, wird weder von S noch von S' erleuchtet, d. h. er liegt im Kernschatten. Jeder Punkt, welcher sich in dem Theil Ga'HaG befindet, erhält kein Licht von S', aber von S; dagegen wird jeder Punkt in dem Theile Gb'HbG von S', aber nicht von S erleuchtet. Diese beiden Theile nun nennt man den Halbschatten, in welchem die Dunkelheit nicht vollkommen ist. Diejenigen Theile der Ebene VXY endlich, welche ganz ausserhalb der beiden Curven ambn und a'm'b'n' liegen, erhalten sowohl von S als von S' volles, von T nicht zurückgehaltenes Licht, und bilden den erleuchteten Theil der Ebene.

§. 7.

Die nämlichen Unterscheidungen sind auf der Oberfläche des Körpers T zu machen. Alle zwischen D und den Bogen MAN und MB'N liegenden Punkte werden weder von S noch von S' erleuchtet und bilden den Kernschatten; der Halbschatten besteht aus den beiden Flächentheilen MANA'M und MBNB'M; denn jeder erhält sein Licht nur von einem einzigen der beiden leuchtenden Punkte; der erleuchtete Theil des Körpers T endlich ist zwischen C und den beiden Bögen MA'N und MBN enthalten.

§. 8.

Aehnliche Umstände wie die eben betrachteten würden sich auch für drei oder mehr leuchtende Punkte ergeben; und bilden solche Punkte zusammen einen Körper von endlicher Grösse, so könnte man für jeden Punkt desselben die angeführten Constructionen vornehmen. Suchte man nun für alle die Curven ambn, a'm'b'n',... die innere und die äussere Umhüllung, so würde die erste den Kernschatten und die zweite den Halbschatten auf der Ebene VXY bestimmen. Statt dieses sehr verwickelten Verfahrens aber kann man folgende einfachere Methode anwenden.

§. 9.

Es sei S der leuchtende und T der undurchsichtige Körper, beide von beliebiger Form. Man denke Taf. I. Fig. 3. sich eine die beiden Oberflächen S und T zugleich berührende Ebene π. Diese Ebene kann unendlich viele Lagen haben, wenn nicht eine der beiden Flächen entwickelbar ist, welcher besondere Fall hier ausgeschlossen wird, weil er in den gebräuchlichen Anwendungen der Schattenlehre nie vorkommt, und weil die

durch ihn, wenn er wirklich vorkäme, veranlassten Beschränkungen leicht aus den §§. 428 und 429 der Darst. Geom. abzuleiten sind.

§. 10.

Man lasse nun die Ebene π sich so um die Flächen S und T bewegen, dass sie die letzteren stets von aussen berühre, d. h. so, dass beide Flächen stets auf einerlei Seite der beweglichen Ebene bleiben, alsdann wird die Reihenfolge der Berührungspunkte zwei bestimmte Curven AB und A'B' bilden, welche nach §. 425, D. G. construirt werden können. Ferner werden die nächst auf einander folgenden Lagen dieser beweglichen Ebene sich in Geraden schneiden, welche als die Erzeugenden einer entwickelbaren Fläche Σ betrachtet werden können, die von aussen um die beiden Körper S und T beschrieben ist. Die Curve A'B' nun, in welchen die Fläche Σ die T berührt, wird die Grenze des Kernschattens auf letzterem Körper sein, weil offenbar kein jenseits A'B' liegender Punkt directes von irgend einem Punkte auf S ausgegangenes Licht erhalten kann, während er zum Theil erleuchtet sein würde, wenn er diesseits der Linie A'B' läge. Eben so werden die Durchschnittspunkte der Ebene VXY mit den verschiedenen Erzeugenden der entwickelbaren Fläche Σ eine Curve A''B'' bilden, welche den Kernschlagschatten umschliesst, den der Körper T auf jene Ebene wirft.

§. 11.

Aber es ist noch eine andere Berührungsebene π' möglich, welche die beiden Flächen S und T von innen berührt, d. h. so, dass die eine Fläche auf der einen und die andere auf der entgegengesetzten Seite sich befindet; lässt man nun diese zweite Ebene π' sich um S und T bewegen, so wird sie eine zweite entwickelbare Fläche Σ' erzeugen, welche von innen um die beiden gegebenen Körper beschrieben ist, und sie längs zwei neuen Curven CD und C'D' berührt. Von diesen ist C'D' die Grenze, welche den Halbschatten von dem erleuchteten Theile des Körpers T scheidet; denn jeder Punkt, welcher jenseits C'D' liegt, wird nur von einem mehr oder minder grossen Theil der leuchtenden Scheibe erhellt, während jeder diesseits von C'D' liegende Punkt das directe Licht von der ganzen Scheibe erhält, d. h. von dem ganzen Flächenstücke von S, welches umschrieben werden kann von einem Kegel, dessen Scheitel in dem auf T angenommenen Punkte liegt. — Der Durchschnitt C''D'' endlich, welchen die Ebene VXY mit der entwickelbaren Fläche Σ' bildet, gibt ebenso die Grenze des Schlaghalbschattens auf dieser Ebene.

§. 12.

Diese Allgemeinheiten mögen an dem sehr einfachen Beispiel zweier Kugeln S und T noch mehr erläutert werden. Hier schneiden bekanntlich alle von aussen angelegten, beiden Kugeln gemeinschaftlichen Taf. I. Berührungsebenen die Centrallinie STO in einem und demselben Punkt O; die auf einander folgenden Durch-
Fig. 3. schnitte dieser Ebenen sind also Gerade, welche alle durch diesen Punkt gehen, und also, als entwickelbare Fläche Σ, einen Kegel AOB bilden, welcher von aussen um die Kugeln S und T beschrieben ist und sie in zwei kleinen auf die Geraden Ap und A'p' projicirten Kreisen berührt. Ebenso reducirt die zweite entwickelbare Fläche Σ' sich hier auf einen Kegel CO'D, welcher inwendig um die Kugeln umschrieben ist und sie in zwei auf CD und C'D' projicirten kleinen Kreisen berührt. Diese beiden conischen Flächen schneiden die Ebene VXY in den beiden Curven A''B'' und C''D'', welche die Grenzen bilden, einerseits zwischen dem Kernschatten und Halbschatten und andererseits zwischen dem Halbschatten und dem erleuchteten Theil auf der Ebene VXY. Was aber den Halbschatten betrifft, so ist die partielle Erleuchtung desselben nicht gleichförmig, sondern nimmt zu mit der Entfernung vom Kernschatten; dies zu beweisen, reicht die Betrachtung eines Meridianschnittes beider Kugeln hin, da alles ähnlich ist, was um die Centrallinie herumliegt.

§. 13.

Fürs Erste kann jeder innerhalb der Curve A″B″ liegende Punkt L″ von keinem Punkte auf S directes Licht empfangen, weil dieser Punkt L″ innerhalb des Kegels AOB liegt, der beide Kugeln von aussen berührt. Betrachtet man dagegen einen Punkt P″ zwischen den Curven A″B″ und C″D″, und zieht die Tangenten P″P′P und P″p, so sieht man, dass P″ von dem Bogen PBp des leuchtenden Körpers erhellt wird. Dieser Punkt P″ erhält aber nicht so viel Licht, als er erhalten würde, wenn der Körper T weggenommen wäre; denn alsdann würde er erhellt werden von dem leuchtenden Bogen pBPp′, welcher durch die zwei Tangenten P″p und P″p′ bestimmt wird und eben das ist, was vorhin die ganze Scheibe des leuchtenden Körpers, vom Punkt P″ aus gesehen, genannt wurde. Hieraus folgt, dass der undurchsichtige Körper T einen Theil des Lichtes aufhält, welches ohne ihn direct zu dem Punkt P″ gelangen würde, und dass dieser sich daher allerdings in dem Halbschatten befindet, welcher durch die Curve A″B″ von dem Kernschatten getrennt wird.

Die partielle Erleuchtung dieses Halbschattens aber nimmt von P″ gegen Q″ zu; denn dieser letztere Punkt wird erhellt von dem leuchtenden Bogen QBq, der grösser ist als der vorhergehende, aber immer noch kleiner als die ganze Scheibe in Beziehung auf den Gesichtspunkt Q″. Jeder Punkt R″ endlich, welcher ausserhalb der Curve C″D″ liegt, wird von der ganzen Scheibe des leuchtenden Körpers erhellt, ohne dass der Körper T ihn auch nur eines einzigen Lichtstrahles beraubte, da die aus R″ an den Körper S gezogenen Tangenten die Fläche von T nicht treffen. Die Curve C″D″ ist daher die Grenze zwischen dem Halbschatten und dem erleuchteten Theil auf der Ebene VXY.

§. 14.

Alle diese Erklärungen gelten offenbar auch für die Fläche des undurchsichtigen Körpers T selbst. Ein Punkt L′ dieser Fläche, welcher rechts von der Berührungslinie A′B′ liegt, ist gänzlich im Schatten; ein Punkt wie P′ wird von dem leuchtenden Bogen PBp und ein anderer Q′ durch den grösseren Bogen QBq erhellt, während jeder Punkt R′ der links von der andern Berührungscurve C′D′ liegt, von der ganzen Scheibe erleuchtet wird. Mithin ist auf dem undurchsichtigen Körper T die Berührungscurve A′B′ ebenfalls wieder die Grenze zwischen dem Kernschatten A′E′B′ und dem Halbschatten A′B′C′D′; und die Erleuchtung dieser letzteren Zone nimmt zu bis zur zweiten Berührungscurve C′D′, wo der ganz erleuchtete Theil D′F′C′ anfängt.

§. 15.

Aus der Aufzählung dieser einzelnen Fälle sieht man, dass die allgemeine Auflösung des Schattenproblems für zwei Körper von beliebiger Form sehr mühsam wäre, weil es die Anwendung der zwei entwickelbaren Flächen Σ und Σ' erforderte, von denen in §§. 10 und 11 die Rede war. Glücklicherweise aber handelt es sich in den Fällen, welche allein in der Anwendung vorkommen, nur vom Sonnenlicht, und da die Entfernung der Sonne von der Erde ausserordentlich gross ist im Vergleich mit allen irdischen Entfernungen und sogar im Vergleich mit dem Durchmesser des Sonnenkörpers selbst*), so kann man folglich die verschie-

*) Nennt man D die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, R den Sonnenhalbmesser und r den mittleren Halbmesser der Erdkugel, so hat man

$$D = 23984 \,.\, r,$$
$$R = 110 \,.\, r,$$
$$r = 6366654 \text{ Meter}.$$

Uebrigens ist der Erdhalbmesser unter dem Aequator und der unter den Polen vom mittleren um nicht mehr als ungefähr 10,000 Meter, mehr oder weniger, verschieden.

denen Lichtstrahlen, welche gleichzeitig von diesem Gestirn zu uns gelangen als nahezu parallel unter sich annehmen. Aus unmittelbaren Beobachtungen ist bekannt, dass der scheinbare Durchmesser der Sonne (d. h. der Winkel $A\delta D$, unter welchem ein in δ sich befindlicher Beobachter die leuchtende Sonnenscheibe sieht) einen mittleren Werth von $\delta = 32'$ hat, und dass dieser Werth sich nur um etwa eine halbe Minute mehr oder weniger ändert; da ferner der Winkel, den die beiden Halbmesser TA' und TD' bilden, gleich ist dem der zu ihnen gehörigen Tangenten, so hat man

$$\text{arc } A'D' = 32' = \frac{32}{10{,}800}\pi = \frac{1}{107} \text{ des Halbmessers;}$$

d. h. auf einem sphärischen Körper, der auf der Oberfläche der Erde sich befindet und von der Sonne erleuchtet wird, beträgt die Breite der vom Halbschatten eingenommenen Zone nicht mehr als den 107ten Theil des Halbmessers jenes Körpers. Diese Folgerung aber kann auf jeden Körper von beliebiger Form ausgedehnt werden, wenn man für jeden Punkt desselben den Krümmungshalbmesser des parallel mit dem Lichtstrahl gemachten Normalschnittes nimmt. Die Kleinheit dieser Resultate erlaubt es also, den vom Sonnenlicht erzeugten Halbschatten zu vernachlässigen; will man ihn aber doch berücksichtigen, so darf man (was auch für den Schlagschatten gilt) nur einen Lichtstrahl ziehen, welcher mit dem des Kernschattens einen Winkel von 32′ macht.

§. 16.

Bei der von jetzt an gemachten Annahme paralleler Lichtstrahlen, verschwindet der Halbschatten gänzlich, weil die inneren Tangenten DD' in diesem Falle mit den äusseren AA' ganz zusammenfallen. Ferner ist klar, dass die entwickelbare Fläche Σ sich nun in einen um den undurchsichtigen Körper beschriebenen Cylinder verwandelt, dessen Erzeugende der gegebenen Richtung der Lichtstrahlen parallel sind. Somit beschränkt sich also das Schattenproblem auf folgende Aufgaben:

1) Die Berührungscurve des Körpers T mit einem solchen umschriebenen Cylinder, d. h. die Grenzlinie zwischen Schatten und Licht auf dem gegebenen Körper zu finden.

2) Den Durchschnitt eben dieses Cylinders mit der Fläche VXY, welche denselben auffängt, d. h. den Umriss des Schlagschattens zu finden. Die darstellende Geometrie nun liefert für die Auflösung beider Theile des vorliegenden Problems folgende allgemeine Methode, welche aber, je nach der Form der Körper bedeutend vereinfacht oder zum Vortheile der Genauigkeit modificirt werden kann, wie an verschiedenen einzelnen Beispielen gezeigt werden soll.

§. 17.

1) Man schneide den undurchsichtigen Körper T durch eine Reihe mit dem Lichtstrahl paralleler Ebenen $P, P', P'', \ldots$, die man am besten so wählt, dass sie senkrecht auf einer der Projectionsebenen, z. B. auf der horizontalen, stehen; hierauf ziehe man an jede der durch diese schneidenden Ebenen $P, P' \ldots$ erzeugten Curven eine oder mehrere mit dem Lichtstrahl parallele Tangenten, so werden die hiedurch erhaltenen Berührungspunkte die Licht- und Schattengrenze auf dem undurchsichtigen Körper T bestimmen.

2) Man suche auch den Durchschnitt der Fläche VXY mit jeder dieser schneidenden Ebenen, wie z. B. mit P; alsdann ergiebt sich aus dem Zusammentreffen dieser Durchschnittslinie mit dem Lichtstrahl, welcher bereits als Tangente an den Schnitt der Ebene P und des Körpers T gezogen worden ist, ein Punkt der Schlagschattencurve auf der Fläche VXY.

Sollte diese in ihrer Allgemeinheit dargestellte Methode dem Leser noch nicht ganz deutlich sein, so kann er gleich den §. 21 darüber zu Rath ziehen, wo sie auf den Schatten einer Kugel angewendet ist.

§. 18.

Bei der Auseinandersetzung vorstehender Regeln wurde stillschweigend angenommen, dass der undurchsichtige Körper von einer einzigen stetigen Fläche begrenzt sei; die meisten Körper aber werden von verschiedenartigen krummen, an einander stossenden Flächentheilen, oder von verschieden geneigten ebenen Figuren begrenzt, so dass die ganze Umhüllungscurve solcher Körper keine stetige Linie ist im geometrischen Sinne, sondern hervorspringende, gerad- oder krummlinige Seiten darbietet. Um nun eine allgemeine Definition des umschriebenen Cylinders zu geben, durch welchen die Scheidelinie zwischen Schatten und Licht bestimmt wird, werde hiemit gesagt, dass er gebildet werde von *Streiflinien,* welche alle parallel sind mit dem gegebenen Lichtstrahl; unter Streiflinie aber wird hier jede Gerade verstanden, welche sich auf die Umhüllungscurve stützt oder anlehnt, ohne sie irgendwo zu durchdringen, oder welche sie wenigstens erst jenseits des Stützpunktes (im Sinne der Bewegungsrichtung des Lichtes) schneidet; in letzterem Falle nämlich wirft der fragliche Körper Schatten auf sich selbst, welcher Umstand bei der Zeichnung nicht ausser Acht gelassen werden darf.

Diese mit dem Lichtstrahl parallel gehenden Streiflinien sind also nicht immer eigentliche Tangenten im geometrischen Sinn, und alle zusammen bilden einen nicht stetigen Cylinder, der aus verschiedenen cylindrischen Flächenstücken, worunter auch ebene sich befinden können, besteht; stets aber erhält man aus ihren Durchschnitten mit den umliegenden Flächen die gesuchten Schlagschatten.

§. 19.

Denkt man sich z. B. an das Säulenstück ABCD die beiden mit den Lichtstrahlen parallelen Berührungsebenen NMN′ und QRQ′ gelegt, so ist klar, dass die berührten Erzeugenden MN und RQ einen Theil der Licht- und Schattengrenze bilden, und dass alle Lichtstrahlen, welche sich an diese Erzeugenden anlegen oder sie streifen, wie EE′, FF′, NN′ in Wahrheit Tangenten an der seitlichen Umhüllung des Körpers sind. Der Kreisbogen NCQ aber ist ein anderer Theil jener Grenzlinie, weil die obere Grenzfläche DNCQ erleuchtet ist, während die Seitenfläche jenseits der Geraden MN und RQ es nicht ist; streift nun der Lichtstrahl diesen Bogen NCQ, so sind die auf einander folgenden Lagen PP′, CC′... desselben einfach nur Streiflinien und nicht mehr eigentliche Tangenten an der Umhüllungscurve des Körpers; diese Streiflinien bilden einen Theil einer Cylinderfläche mit kreisförmiger Basis, welche die Horizontalebene in dem Kreisbogen N′C′Q′ = NCQ schneidet, während alle die Lichtstrahlen, welche Tangenten an MN und RQ sind, zwei vertikale Ebenen bilden, welche die Horizontalebene in den Geraden MN′ und RQ′ schneiden. Der Umriss des Schlagschattens ist also MN′C′Q′R, und die Licht- und Schattengrenze ist die nicht stetige Linie MNCQR, welcher man noch den unteren Bogen RAM, der auf dem Boden ruht, zufügen muss. Taf. I. Fig. 4.

§. 20.

Man sieht aus diesem Beispiel, dass die Licht- und Schattengrenze sich oft ohne geometrische Construction, aus dem blossen Anblick des Körpers bestimmen lässt, besonders, wenn letzterer von ebenen Flächen begrenzt wird. Denn kennt man für ein gegebenes Polyeder die Richtung der Lichtstrahlen, so ist es leicht zu unterscheiden, ob eine Seitenfläche erleuchtet ist oder nicht, und hat man diese Unterscheidung einmal für alle Seitenflächen gemacht, so bildet die Reihe der Kanten, welche je eine erleuchtete Seitenfläche von einer unerleuchteten trennen, die Scheidelinie zwischen Schatten und Licht auf dem fraglichen Körper.— Wird z. B. ein Parallelepiped parallel mit der Diagonale FC beleuchtet, so scheidet jede der sechs Kanten Taf. I. Fig. 5.

AB, BG, GH, HE, ED, DA eine erleuchtete von einer unerleuchteten Seitenfläche; diese Kanten bilden also die gesuchte Grenzlinie, und der um diesen Körper beschriebene Cylinder verwandelt sich hier in ein System von sechs Ebenen, welche je durch eine der genannten Kanten parallel mit dem Lichtstrahl gelegt sind. Was nun den Schlagschatten betrifft, so erhält man ihn aus den Durchschnitten dieser sechs Ebenen mit den umliegenden Flächen.

Zweites Kapitel.

Verschiedene Beispiele.

Schatten einer Kugel.

§. 21.

Taf. II. Es sei (O, O′) der Mittelpunkt und (OA, O′A′) der Halbmesser einer Kugel; beschreibt man mit diesem Halbmesser zwei Kreislinien, so erhält man den Umriss der horizontalen und der vertikalen Projection dieses Körpers. Es sei ferner (OS, O′S′) die gemeinschaftliche Richtung aller Lichtstrahlen. Nach der allgemeinen Methode des §. 17 muss man nun die Kugel durch mehrere vertikale und mit (OS, O′S′) parallele Ebenen RT, UV, ... schneiden, hierauf an die Durchschnittscurven Tangenten parallel mit der Richtung der Lichtstrahlen ziehen. Da aber diese Curven, wenn man sie auf die vertikale Tafel projiciren wollte, Ellipsen würden, die man durch Punkte construiren müsste, so wird hier zur Vereinfachung des Verfahrens eine vertikale Hilfsebene X″Y″ angewendet (Fig. 3), welche den Lichtstrahlen selbst parallel ist.

Auf dieser neuen Ebene projicirt sich der Mittelpunkt (O, O′) der Kugel in O″, und zwar in einer Höhe X″O″ = XO′ über der Horizontalebene; der Lichtstrahl (OS, O′S′) aber, welcher die Horizontalebene in S schneidet, erhält O″S″ zu seiner neuen Projection. Da nun die Vertikalebene RT die Kugel in einem Kreis schneidet, der sich in seiner wahren Grösse auf der Hilfsebene X″Y″ projiciren wird, so darf man nur um den Durchmesser R″T″ = RT eine Kreislinie beschreiben und an diese zwei mit O″S″ parallele Tangenten M″m″ und N″n″ ziehen. Projicirt man hierauf die Berührungspunkte M″ und N″ auf den Grundschnitt RT der schneidenden Ebene, so erhält man zwei Punkte M und N, welche der Horizontalprojection der Licht- und Schattengrenze angehören. Die entsprechenden Vertikalprojectionen M′ und N′ dieser Punkte aber erhält man, wenn man M′ und N′ in derselben Höhe über XY nimmt, in welcher M″ und N″ über X″Y″ liegen. Man kann diese Höhen auch bestimmen, indem man von den Horizontalebenen B″O″b″ und A′O′D′ ausgeht.

§. 22.

Die Lichtstrahlen M″m″ und N″n″, deren Horizontalprojectionen beide auf RT fallen, schneiden die Horizontalebene in den Punkten m und n, welche der Schlagschattencurve auf der Horizontalebene angehören. Da man nun eine zweite Vertikalebene rt annehmen kann, welche die Kugel in einem Kreise schneidet, der dem durch die Ebene RT erzeugten gleich ist, so erhält man also aus den Punkten M″ und N″ zu gleicher Zeit noch zwei andere (P, P′) und (Q, Q′), welche ebenfalls der Licht- und Schattengrenze angehören; aus diesen aber kann man zwei neue Punkte p und q für die Schlagschattencurve auf der Horizontalebene bestimmen.

§. 23.

Will man nun das nämliche Verfahren auch auf die Vertikalebene UV anwenden, so muss man einen Kreis um den Durchmesser $U''V'' = UV$ beschreiben, und an diesen parallel mit $O''S''$ zwei Tangenten $K''k''$ und $J''i''$ ziehen, deren Berührungspunkte mit M'' und N'' offenbar in gerader Linie liegen müssen. Folglich werden alle Punkte der Licht- und Schattengrenze sich auf der Ebene $X''Y''$ in dem auf $O''S''$ senkrechten Durchmesser $G''H''$ projiciren, woraus folgt, dass diese Curve eben und ein senkrecht auf dem Lichtstrahl stehender grösster Kreis ist; eine Folgerung, die sich auch aus dem bekannten Lehrsatz (D. G. §. 381 Anmerkung) von der Berührungslinie eines um eine Fläche zweiten Grades beschriebenen Cylinders herleiten lässt.

§. 24.

Bemerkenswerthe Punkte. Es gibt mehrere Punkte, die man unmittelbar construiren kann, vor allen diejenigen, welche auf dem sichtbaren Umriss $(ABD, A'D')$ der Horizontalprojection liegen. Denn die Vertikalebenen Ee und Ff, welche die Kugel in den Punkten (E, O'') und (F, O'') berühren, enthalten auch die durch diese Punkte gezogenen Lichtstrahlen; diese Strahlen sind also selbst Tangenten an der Kugel, und mithin sind (E, E') und (F, F') zwei Punkte der Licht- und Schattengrenze.

Zwei Punkte dieser Curve liegen auch auf dem vertikalen grössten Kreise $(AD, A'C'D')$, und man erhält sie, wenn man die Tangenten $K'k'$ und $L'l'$ parallel mit der Projection $O'S'$ zieht; denn an den so bestimmten Punkten (K, K') und (L, L') ist die Berührungsebene vertikal und parallel mit den Lichtstrahlen.

Die mit den Lichtstrahlen parallele Vertikalebene Bob liefert, bei Anwendung des allgemeinen Verfahrens aus §. 21, die beiden Punkte (H'', H) und (G'', G), von denen ersterer der höchste und letzterer der tiefste der Curve ist; ihre Vertikalprojectionen H' und G' erhält man wie vorhin, oder auch, indem man den Punkt H auf den grössten Kreis $(AD, A'C'D')$ aufklappt, wodurch man (η, η') als Aufklappung erhält, und hierauf die Horizontale $\eta'H'$ zieht, auf welche die Projection H' des Punktes H fallen muss. Um die diesen Punkten gegebene Benennung zu rechtfertigen, bedenke man, dass sowohl die Berührungsebene an (H, H'), als auch die Ebene der in $G''H''$ projicirten Curve senkrecht auf der vertikalen Hilfsebene $X''Y''$ steht, und dass daher der Durchschnitt dieser zwei Ebenen, welcher die Tangente an (H, H') ist, ebenfalls senkrecht auf dieser Hilfsebene stehen, d. h. horizontal sein muss.

§. 25.

Auf der Figur ist der glänzende Punkt der Kugel in der Horizontalprojection durch λ, und in der Vertikalprojection durch μ' bezeichnet: aber die Construction desselben muss dem zweiten Abschnitt vorbehalten bleiben, in welchem von derartigen Punkten die Rede sein wird.

Schatten einer Barrière.

§. 26.

Im vorigen Beispiel wurde die allgemeine Methode des §. 17 angewendet; nun mag einer der ziemlich häufigen Fälle betrachtet werden, wo der gegebene Gegenstand nur von ebenen Flächen begrenzt ist, so dass man die Licht- und Schattengrenzen unmittelbar erkennen kann, und nur den Schlagschatten zu construiren braucht. Taf. 1. Fig. 6.

Es sei (Fig. 6) der betrachtete Gegenstand ein einfaches Holzgerüste, eine Barrière z. B., von einem horizontalen Querbalken (ABCD, B''B'D'D'') und zwei ihn tragenden vertikalen Pfosten gebildet. Das Licht, welches diese rechtwinklig parallelepipedischen Stücke beleuchtet, habe die Richtung (S, S'). Betrachtet man nun die durch die Eckpunkte (A, A'), (A, A''), (B, B'), (B, B'') des Querbalkens gehenden Lichtstrahlen, so bemerkt man sogleich, dass die vertikalen Seitenflächen AD und CD, und die obere horizontale Fläche B''D'' die einzigen erleuchteten Theile sind, woraus folgt, dass die Licht- und Schattengrenze aus folgenden Seiten besteht:

(AD, A'D'), (A, A'A''), (AB, A''B''), (BC, B''C''), (C, C''C'), (CD, C'D').

§. 27.

Um nun den Schlagschatten für die erste dieser Seiten zu erhalten, denke man sich einen Lichtstrahl (AE, A'E'), welcher die Horizontalebene in (E, E') schneidet, und welcher, indem er parallel mit sich selbst über die Seite (AD, A'D') hinstreift, eine Schattenebene bildet, deren Durchschnitt mit der Horizontalebene eine mit AD parallele Gerade sein wird; zieht man daher die Linie EK in dieser Richtung, so erhält man den Schlagschatten auf der Horizontalebene für die Seite (AD, A'D'). Ein Theil dieser Seite aber projicirt ihren Schatten auf die Vertikalebene, weil der Punkt K dem Punkt L der Seite entspricht; man muss daher auch noch den Durchschnitt der Vertikalebene mit der bereits angewendeten Schattenebene suchen. Da nun der äusserste Lichtstrahl (DJ, D'J') die Vertikalebene im Punkt (J, J') trifft, so ist offenbar die Gerade KJ' der zweite Theil des Schlagschattens der Seite (AD, A'D').

§. 28.

Streift nun ferner der Lichtstrahl parallel mit sich selbst längs der Vertikalen (A, A'A'') hin, so erzeugt er eine vertikale Schattenebene, welche die Horizontalebene in der Geraden AEF schneidet; diese ist also der Schlagschatten der vertikalen Seite (A, A'A''), und endigt im Punkte (F', F), wo der von A'' ausgehende Lichtstrahl die Horizontalebene schneidet. Indem hierauf der Lichtstrahl längs der horizontalen Seite (AB, A''B'') hinstreift, bildet er abermals eine Schattenebene, welche die Horizontalebene in der Geraden FG schneidet, welche offenbar der AB parallel und gleich ist; und streift alsdann der Lichtstrahl von der Lage (BG, B'G') aus weiter über die horizontale Seite (BC, B''C'') weg, so entsteht abermals eine Schattenebene, parallel der in §. 27 betrachteten, welche die mit EK und KJ' parallel gehenden Geraden GH und HR'' zu Grundschnitten hat.

Ist endlich der Lichtstrahl in die Lage (CR, C''R'') gekommen, so streift er längs der vertikalen (C, C''C') herab und erzeugt eine Schattenebene, welche die Vertikalebene in der mit C''C' parallelen und gleichen Geraden R''R' schneidet; und streift er weiter längs der Horizontalen (CD, C'D') fort, so bildet er eine Ebene, deren Durchschnitt mit der Vertikalebene diejenige Gerade sein muss, welche die schon gefundenen zwei Punkte R' und J' verbindet. Jedenfalls aber erhält man diesen Grundschnitt direct, wenn man die Punkte sucht, in welchen die beiden Lichtstrahlen (CR, C'R') und (DJ, D'J') die Vertikalebene schneiden.

§. 29.

Was die vertikalen Pfosten betrifft, so zeigt die Richtung der durch die Ecken M, P, Q, T gehenden Lichtstrahlen deutlich, dass die vertikalen Seitenflächen MN, NP, QV, VT im Schatten sind. Es sind desshalb auch auf der Vertikalebene die sichtbaren dieser Seitenflächen schraffirt worden. Hieraus folgt, dass die vertikalen Seiten M, P, Q, T die Licht- und Schattengrenzen sind, und die Lichtstrahlen, welche über diese Seiten hingleiten, werden also vier vertikale Schattenebenen bilden, welche die Horizontalebene in den mit der

Projection S parallelen Geraden Mm, Pp, Qq, Tt schneiden. Diese Geraden müssen sich bis zum Schlagschatten des Querbalkens erstrecken, weil dieser auf der Spitze der Pfosten ruht; für die beiden vertikalen Schattenebenen Qq und Tt muss man also ihre Durchschnitte mit der Vertikalebene angeben, welche offenbar die vertikalen Geraden qq′ und tt′ sind.

§. 30.

Allgemeine Bemerkung. So oft es sich darum handelt, den Schlagschatten zu finden, den eine vertikale Seite P eines Körpers auf irgend eine Ebene oder auch auf eine krumme oder nicht stetige Fläche wirft, wird die Horizontal-Projection dieses Schattens stets eine durch den Fusspunkt P dieser Seite und mit der Horizontal-Projection S des Lichtstrahls parallel gezogene Gerade sein. Denn die Lichtstrahlen, welche längs dieser Seite hinstreifen, bilden stets eine vertikale Schattenebene, welche die umliegenden Gegenstände in geraden, gebrochenen oder krummen Linien schneidet; alle diese Linien aber projiciren sich horizontal auf den horizontalen Grundschnitt jener vertikalen Ebene; dieser Grundschnitt aber ist offenbar eine mit S parallele und durch den Fuss der fraglichen Seite gehende Gerade.

Besondere Lichtstrahlen.

§. 31.

Von dem Lichtstrahl, dessen Projectionen einen Winkel von 45° mit der Axe machen. Ein Lichtstrahl (SA, S′A′) in dieser Richtung ist offenbar die Diagonale eines Würfels, von welchem eine Seitenfläche mit der Horizontalebene, und eine andere mit der Vertikalebene parallel ist. In architektonischen Zeichnungen nun, wo die Schatten angewendet werden, um Vorsprünge und Ueberragungen anzudeuten, bedient man sich oft dieses besonderen Strahles, weil dadurch, wie gleich gezeigt werden soll, eine Vereinfachung des graphischen Verfahrens möglich wird. Taf. 1. Fig. 7.

§. 32.

Soll der Schlagschatten gefunden werden, den ein Punkt (M, M′) auf eine Vertikalebene xy wirft, so nehme man die Vertikale M′G′ gleich der Entfernung des fraglichen Punktes von der Ebene xy; hierauf ziehe man die Horizontale G′P′ gleich M′G′, so ist P′ der gesuchte Schatten. Man kann diese Construction sehr leicht beweisen, wenn man durch M und M′ die Projectionen des Lichtstrahls parallel mit (SA, S′A′) zieht; hier wurden sie weggelassen, weil man blos das praktische Verfahren zeigen wollte.

§. 33.

Soll man ferner den Schlagschatten finden, welchen der Punkt (M, M′) auf eine Horizontalebene X′Y′ wirft, so construire man den rechten Winkel MHQ so, dass seine Schenkel der Höhe M′h′ des fraglichen Punkts über der Ebene X′Y′ gleich werden; alsdann ist H der gesuchte Schatten. Der Beweis kann eben so wie für den vorigen Fall geführt werden.

§. 34.

Die verschiedenen Gesimse an dem Fuss und dem Kapitäl eines Pfeilers oder einer Säule, an den Karniessen etc. bieten häufig Gelegenheit dar, die beiden angeführten Operationen anzuwenden, und es wird

die Einfachheit dieser Methode nicht gemindert, auch wenn der Grund- und Aufriss, d. h. die horizontale und vertikale Projection des betrachteten Gebäudes, wie oft geschieht, auf zwei verschiedenen Blättern verzeichnet wären.

§. 35.

Noch einen andern Vortheil bietet der besondere Lichtstrahl (SA, S′A′) dar. Man muss bei manchen Constructionen eine Profilebene, d. h. eine Hilfs-Projectionsebene anwenden, welche auf den beiden ersten Projectionsebenen senkrecht steht, wie z. B. die Vertikalebene AC, und es kann nun gefordert werden, die Projection S″ des Lichtstrahles (SA, S′A′) auf dieser Profilebene zu finden. Fällt man zu diesem Zweck auf letztere Ebene das Perpendikel (RC, R′C′) und klappt sie alsdann durch Umdrehung um die Vertikale A, auf die vertikale Hauptprojectionsebene auf, so wird, weil der Strahl (SA, S′A′) die Diagonale eines Würfels ist, der Punkt (C, E′) auf (D, R′) zu liegen kommen, und die Aufklappung S″A′ der dritten Projection des Lichtstrahles wird genau mit S′A′ zusammenfallen, so dass man also aller so eben angedeuteter Operationen enthoben ist.

Hätte man die Profilebene AC durch Umdrehung um ihren horizontalen Grundschnitt auf die Horizontalebene aufgeklappt, so wäre eben jene Aufklappung mit SA zusammengefallen.

§. 36.

Taf. 1. Fig. 8. *Von dem Lichtstrahl,* welcher unter einem Winkel von 45° gegen die Horizontalebene geneigt ist. Dieser Lichtstrahl wird ebenfalls häufig angewendet in den im §. 34 angeführten Fällen, weil er auch eine Vereinfachung der Schattenconstructionen zulässt; und da überdiess seine Annahme noch einige Willkühr gestattet, so kann man die Horizontalprojection nach Belieben wählen; und nimmt man hierauf B als den Punkt an, in welchem der Lichtstrahl die Horizontalebene schneidet, so muss offenbar ein zweiter z. B. in R projicirter Punkt sich in einer Höhe HR′ = RB über der Horizontalebene befinden, und es wird also R′B′ die Vertikalprojection des Lichtstrahls sein. Diese Willkühr in der Annahme ist sehr wichtig; denn der Zeichner kann die Richtung SB so wählen, dass gerade diejenigen Theile des Gegenstandes, welche er als die interessantesten hervorheben will, beleuchtet werden, und dass die verschiedenen Schlagschatten sich besser von einander absondern. Diese Vortheile bietet der Strahl SA in §. 31 nicht.

§. 37.

Um nun den Schlagschatten des Punktes (M, M′) auf einer Horizontalebene X′Y′ zu finden, ziehe man die Linie MQ parallel mit SB und gleich der Höhe M′q′ des fraglichen Punktes über der Ebene X′Y′, so erhält man Q als den gesuchten Schlagschatten des Punktes (M, M′). Denn die Gerade, welche die Punkte (M, M′) und (Q, Q′) verbände, wäre die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Grundlinie der Höhe gleich wäre; mithin wäre diese Gerade parallel mit dem gegebenen Strahl (SB, S′B′).

§. 38.

Man sieht hieraus, dass unter solcher Annahme des Lichtstrahles wie hier, die Länge MQ des Schlagschattens einer vertikalen Geraden auf einer Horizontalebene gleich ist der Höhe dieser Geraden.

§. 39.

Das Verfahren, um den Schlagschatten des Punktes (M, M′) auf einer gegebenen Vertikalebene xy zu finden, ist freilich weniger einfach; denn man muss den Strahl MP bis zu seinem Durchschnitt mit xy verlängern, alsdann auf der Vertikalen eine Länge M′p′ = MP nehmen und hierauf die Horizontale p′P′ = pP ziehen.

Aber man kann für die Vertikalprojection einen neuen Lichtstrahl annehmen, der unter einem Winkel von 45° gegen die Vertikalebene geneigt ist, und welcher alsdann die nämlichen Vortheile darbietet, wie der in §. 37. Die beiden Projectionen des Gegenstandes, der Grundriss und der Aufriss, werden alsdann freilich von Lichtstrahlen verschiedener Richtung beleuchtet: aber dieser Missstand ist von geringem Belang in Betracht des Zweckes, den architektonische Zeichnungen gewöhnlich haben, und er verschwindet fast ganz in den Fällen, da Grund- und Aufriss nicht auf einerlei Blatt gezeichnet sind.

§. 40.

Bemerkungen. Man wird leicht einsehen, dass ein Gegenstand, wie z. B. die in Fig. 6 dargestellte Barrière, vollkommen bestimmt ist, durch seine Horizontalprojection sammt den darauf gezeichneten Schlagschatten unter Voraussetzung eines Lichtstrahles von 45° Neigung gegen die Horizontalebene. Denn die Länge der Schatten AE, AF, Mm, ... gibt genau die Höhe der in A, M, ... projicirten Punkte an (§. 38), und man hat auf diese Art auch die dritte, durch die Horizontalprojection nicht angegebene Dimension des Gegenstandes.

Es ist aber der Gegenstand auch in dem Falle vollkommen, wenn gleich auf eine weniger bequeme Art, bestimmt, wenn die Schatten unter Annahme paralleler Lichtstrahlen von beliebiger Richtung gezeichnet werden; vorausgesetzt, dass man die Construction auf alle Kanten des Körpers, dunkle sowohl als erhellte, ausdehnt, wie solches das Parallelogramm EbGF der Fig. 6 zeigt. Denn diese Lichtstrahlen bilden nun in der That eine schiefe Projection des fraglichen Gegenstandes, welche, verbunden mit der schon gegebenen orthogonalen Projection zur Bestimmung dieses Gegenstandes hinreicht, der sich nun als Durchschnitt zweier vollkommen bestimmter Cylinderflächen darstellt.

Schatten der Kamine auf einem Dache.

§. 41.

Das auf Taf. 3 dargestellte Dach zeigt vier Seitenflächen, welche geneigte Ebenen sind; die zwei längeren Dachflächen, die sich in den Trapezen (ABDC, A′B′D′C′) und (ABD″C″, A′B′D′C′) projiciren, schneiden sich in einer Horizontalen (AB, A′B′), welche die Firstlinie heisst; die beiden andern Seitenflächen, von denen nur die eine (DBD″, B′F′D′) sichtbar ist, heissen Walme. Diese vier Dachflächen sind, wie gesagt, eben, mit Ausnahme ihres unteren Theiles, von der Horizontallinie (EFF″E″, E′F′) an, wo das Dach eine leichte Krümmung in Gestalt einer cylindrischen Fläche annimmt; diese ist angedeutet durch eine Curve F′D′, welche sich an die Geraden B′F′ und D′C′ anschliessen muss. Gleich unterhalb des Daches ist das Karniess und alsdann folgen die Mauern, welche das Dach tragen. Dieses wird von zwei Kaminkörpern durchdrungen, deren jeder oben eine vorspringende Einfassung hat. Alle diese Gegenstände werden durch Lichtstrahlen erleuchtet, welche der Richtung (Sa, S′A′) parallel sind. Die ganze Darstellung geschieht auf zwei Projectionsebenen, deren Axe xy der Firstlinie parallel ist und deren eine der Grundriss und die andere der Aufriss heisst. Taf. 3.

§. 42.

Erster Kamin, links. Aus der Richtung der Lichtstrahlen erkennt man unmittelbar, dass die vertikalen Seitenflächen GJ und GH erleuchtet, dagegen die beiden andern im Schatten sind; mithin sind die vertikalen Kanten (J, J'G'') und (H, H'H'') die Licht- und Schattengrenzen auf dem Kaminkörper. Um nun den Schlagschatten auf den Dachflächen zu finden, denke man sich einen beweglichen Lichtstrahl, welcher parallel mit sich selbst längs der Vertikalen H hinstreift und so eine Vertikalebene erzeugt, deren horizontaler Grundschnitt die mit Sa parallele HP ist; diese Ebene schneidet die längere Dachfläche in einer Linie, welche der Schlagschatten der Vertikalen H ist. Dieser Durchschnitt nun hat zur Horizontalprojection die Gerade HP selbst, weil die Schattenebene vertikal ist; und da eben diese Ebene die Firstlinie im Punkt (P, P') schneidet, so folgt, dass H'P' die Vertikalprojection des nämlichen Durchschnitts, d. h. des Schlagschattens ist. Dieser Schatten aber verlängert sich nur so weit, bis der Lichtstrahl, welcher über die Vertikale (H, H'H'') hinstreift, die horizontale Kante (KL, K'L') der Einfassung erreicht hat; nun schneidet die Vertikalebene HP diese Kante im Punkt (M, M'), mithin muss der Lichtstrahl M'N' auf der Geraden H'P' den Punkt (N', N) bezeichnen, wo der fragliche Schatten sich endigt.

§. 43.

Es werde hier im Vorbeigehen bemerkt, dass dieser Lichtstrahl M'N', welcher die Einfassung und die Vertikale (H, H'H'') zugleich streift, die Grenze G''H'' des Schlagschattens angibt, den die Einfassung auf den Kaminkörper wirft. Will man diesen Schatten direct finden, so ziehe man (Fig. 3) den Lichtstrahl (KS, K'S') und beziehe den Punkt S, wo seine Horizontalprojection die Aussenwand GH des Kamins trifft, auf K'S', so erhält man S' als den Punkt, durch welchen man die Horizontale G''S'H' ziehen muss.

Wenn es, wie in Fig. 3, geschieht, dass dieser Punkt S' rechts von G'' fällt, so endet der Schlagschatten, den die Vorderkante der Einfassung wirft, offenbar im Punkt S', welcher der Schatten ist vom letzten Punkt (K', K) dieser Kante. Aber der Umriss der dunklen Parthie wird vervollständigt durch die Gerade S'T', welche der Schlagschatten der Seitenkante (Kk, K') ist, durch welche eine auf der Vertikalebene senkrechte Schattenebene erzeugt wird, deren Grundschnitt die Projection K'S' des Lichtstrahles ist.

§. 44.

Man betrachte nun, zur Hauptfigur zurückkehrend, den in die Lage (MN, M'N') vorgerückten Lichtstrahl. Derselbe streift jetzt ferner über die Horizontale (ML, M'L') hin, welche parallel ist mit der längeren Dachfläche, und erzeugt auf diese Art eine Schattenebene, welche jene Fläche in der Geraden (NQ, N'Q') schneidet, die der Geraden (ML, M'L') parallel und gleich ist. Ist hierauf der Lichtstrahl in die Lage (LQ, L'Q') gekommen, so steigt er längs der Vertikalen (L, L'L'') auf und erzeugt eine Vertikalebene, welche die Dachfläche in der mit (HN, H'N') parallelen Geraden (QR, Q'R') schneidet. Dieser Schatten erreicht seine Grenze in der letzten Lage L''R' des Lichtstrahls.

Nun streift der Lichtstrahl über die Kante (Ll, L'') der Einfassung hin und erzeugt eine auf der Vertikalebene senkrecht stehende Schattenebene; der vertikale Grundschnitt dieser Ebene ist offenbar L''R' und dies ist zugleich die Projection ihres Durchschnitts mit der Dachfläche; was die andere Projection betrifft, so bemerke man, dass die Schattenebene L''R' die Firstlinie im Punkte (V', V) schneidet, daher denn RV die Horizontalprojection des Schlagschattens der unbestimmten Linie (Ll, L'') ist; da aber diese Kante in l endigt, so wird der genannte Schatten durch den Lichtstrahl lT begrenzt und ist daher (RT, R'T').

§. 45.

Von dieser Lage (lT, L″T′) weg streift der Lichtstrahl über die Kante (lK, L″K″) und bildet also eine Ebene, welche die Dachfläche in der Geraden (TU, T′U′) schneidet, die der Geraden lk parallel und gleich ist. Hierauf steigt der Lichtstrahl längs der Vertikalen (K″K′, k) herab und erzeugt einen Schatten (UX, U′X′), welcher durch die Parallele K′X′ begrenzt wird; alsdann streift er längs der Horizontalen (K′, kK) hin und erzeugt den Schatten (X′Y′ XY), der mit einer der schon erhaltenen Linien parallel ist; eben so verhält es sich mit dem Schatten (JY, J′Y′), den die vertikale Kante (J, J′G″) projicirt.

§. 46.

Zweiter Kamin, rechts. Man sieht hier, dass die vertikalen Seitenflächen GH und GJ erleuchtet werden, während die beiden andern es nicht sind; mithin bilden die vertikalen Kanten (H, H′H″) und (J, J′G″) die Licht- und Schattengrenzen auf dem Kaminkörper. Taf. 3.

Ein Lichtstrahl nun, welcher längs der Vertikalen H hinstreift, erzeugt eine Vertikalebene, welche die Dachfläche und den Walm in einer gebrochenen Linie schneidet, deren Horizontalprojection der Grundschnitt HMN der fraglichen Schattenebene ist. Da ferner diese Ebene die Dachkante (BD, B′D′) in (M, M′) schneidet, so folgt, dass H′M′ die Vertikalprojection des Schattentheiles ist, der in HM sich horizontal projicirt; was den Theil MN betrifft, so fällt er mit der Vertikalprojektion B′D′ der Walmfläche zusammen. Dieser Schatten nun aber muss begrenzt werden durch den Lichtstrahl, welcher, über die Kante (H, H′H″) hinstreifend, bei der Kante (KL, Y′L′) angelangt ist; und da die Vertikalebene HMN diese Kante in (P, P′) schneidet, so erhält man durch den Lichtstrahl P′N′ den Punkt N′ und aus diesem sofort den Punkt N, in welchem der fragliche Schatten endigt.

§. 47.

Man bemerke nebenbei auch, dass der Strahl P′N′ den Punkt H″ liefert, durch welchen die Horizontale G″H″ gezogen werden muss, welche den von der Einfassung auf die Vorderfläche des Kamins geworfenen Schatten begrenzt. Uebrigens kann man diesen Schatten G″H″ immer direct erhalten, wenn man durch irgend einen beliebigen Punkt der Kante (KL, Y′L′) einen Lichtstrahl zieht; denn die Horizontalprojection dieses Lichtstrahls wird GH in einem Punkt treffen, welcher, auf die vertikale Projectionsebene bezogen, der Geraden G″H″ angehören wird.

§. 48.

Ist der Lichtstrahl in die Lage (PN, P′N′) gelangt, so streift er längs der Einfassungskante (PL, P′L′) hin und bildet eine Schattenebene, deren Durchschnitt mit dem Walm eine Gerade ist, welche offenbar in (N, N′) anfängt und im Punkt (R, R′) endigt, den man erhält, wenn man auf der Vertikalebene den Lichtstrahl L′R′ zieht. Die Verlängerung dieser Geraden (NR, N′R′) muss auch durch den Punkt (Q′Q) gehen, in welchem die Walmfläche F′B′ der Einfassungskante (Y′L′, KL) schneidet, weil diese Kante in der Schattenebene liegt, von der hier die Rede ist.

§. 49.

Ist der Lichtstrahl ferner in die Lage (LR, L′R′) gekommen, so streift er längs der Vertikalen (L, L′L″) hinauf und erzeugt eine Vertikalebene, welche den Walm in der Linie RT schneidet, deren Endpunkt durch den Strahl L″T′ bestimmt wird. Aus dieser Lage weg streift der Strahl längs der horizontalen Kante (LV, L″) hin und bildet eine Ebene, welche den Walm in einer mit LV gleichen und parallelen Geraden TX schneidet.

Nun bewegt er sich weiter über die Einfassungskante (VY, L''Y'') weg und erzeugt eine neue Ebene, welche den Walm in der mit RNQ parallelen Geraden XZ und die Dachfläche in einer Horizontalen ($Z\alpha, Z'\alpha'$) schneidet, deren Endpunkt man durch den Strahl ($Y\alpha, Y''\alpha'$) bestimmt. Man bemerke ferner, dass die unbestimmte Gerade XZ durch den Punkt (Q'', Q''') gehen muss, in welchem die auf F'B'Q'' projicirte Walmfläche die Einfassungskante (Y''L'', YV), die den fraglichen Schatten erzeugt, schneidet. *)

§. 50.

Von der Lage ($Y\alpha, Y''\alpha'$) weg, streift der Lichtstrahl längs der Vertikalen (Y''Y', Y) herab und bildet eine Schattenebene $Y\alpha$, welche vertikal ist und die Firstlinie im Punkt (β, β') schneidet; woraus hervorgeht, dass ihr Durchschnitt mit der Dachfläche die Gerade ($\alpha\beta, \alpha'\beta'$) ist: aber diese Schattenlinie endigt im Punkt (γ', γ), welcher durch den vom untern Endpunkt der betrachteten Kante Y''Y' ausgehenden Lichtstrahl $Y'\gamma'$ bestimmt wird.

Endlich wird der Lichtstrahl längs der Horizontalen (YK, Y') hinstreifen und eine senkrecht auf dem **Aufriss** stehende Schattenebene erzeugen, welche die Gerade $Y'\gamma'$ zum vertikalen Grundschnitt hat und die Firstlinie im Punkt (δ', δ) schneidet; wesshalb die Gerade ($\gamma\delta, \gamma'\delta'$) der Durchschnitt jener Schattenebene mit der Dachfläche ist. Dieser Schatten aber muss im Punkt ε enden, welchen man erhält, wenn man den Lichtstrahl $J\varepsilon$ zieht; denn dieser letztere streift zu gleicher Zeit die horizontale Einfassungskante YK und die vertikale Kante (J, J'G'') des Kaminkörpers, so dass er, in diese Lage gekommen, nun längs dieser letzteren Kante herabgehen wird. Alsdann aber erzeugt er eine Vertikalebene $J\varepsilon$, welche die Firstlinie im Punkt (λ, λ') schneidet, und deren Durchschnitte mit den Dachflächen offenbar die Geraden ($\varepsilon\lambda, \varepsilon'\lambda'$) und ($\lambda J, \lambda'J'$) sind, welche den Umriss der Schlagschatten des zweiten Kamins vervollständigen.

§. 51.

Taf. 3. **Vom Profil.** Um den Schatten ($\alpha Z, \alpha'Z'$), den die Einfassungskante (YV, Y''L'') auf die hintere Dachfläche wirft, direkt zu finden (was als Probe für das vorige Verfahren dienen kann, besonders in dem Fall, wenn einige der Schattenlinien RT, TX, XZ über den Walm hinaus gingen), kann man ein **Profil** anwenden, d. h. eine Hilfsprojection, die man auf einer auf der Firstlinie senkrechten Vertikalebene ausführt. Diese Profilebene schneidet das Dach in einem gleichschenkligen Dreieck, das die Gerade EE'' zur Grundlinie hat und welches, durch Umdrehung um die Vertikale A auf den Aufriss aufgeklappt, offenbar e'A'e'' wird. Bei dieser Aufklappung kommt der Punkt (a, A') des primitiven Lichtstrahles in a'' zu liegen; ein zweiter Punkt

*) Man bemerke hier, dass der von der Vertikalen H auf die Walmfläche geworfene Schlagschatten MN sich bis zu dem cylindrischen Theil F'D' dieser Dachfläche hätte erstrecken können; diess hätte in der geradlinigen Projection MN nichts geändert, da dieser Schatten durch eine Vertikalebene erzeugt wird (§. 30). Statt der Geraden NR aber hätte man **eine Curve** erhalten als den Durchschnitt der horizontaten Cylinderfläche F'D' mit der durch die Kante (PL, P'L') gehenden Schattenebene. Diese Curve nun müsste durch Punkte construirt werden, indem man zwischen den Punkten (P, P') und (L, L') Lichtstrahlen zöge, deren Durchschnittspunkte mit dem Cylinder F'D' auf der Vertikalebene man auf dieselbe Art fände, wie es in §. 48 für den letzten (LR, L'R') dieser Lichtstrahlen geschehen ist.

Auf diese Curve würde eine gerade RT folgen, auf welche sich der krummlinige Schnitt projicirte, den die durch die Vertikale (L, L'L'') gelegte Schattenebene erzeugen würde. Diejenige Ebene aber, welche durch die Kante (LV, L'') ginge, würde denselben Cylinder F'D' in einer seiner Erzeugenden, z. B. in TX, schneiden. Auf diese letztere Schattenlinie aber würde eine zweite Curve folgen, als Durchschnitt des Cylinders F'D' mit der Schattenebene der Kante (VY, L''Y''); diese neue Curve müsste man durch Punkte construiren, wie die erste; auf sie würde endlich eine Gerade wie XZ folgen, worauf der Fortgang derselbe wäre, wie im Text.

(S, S′), der sich auf der Profilebene in s projicirte, nimmt nach der Aufklappung die Lage S″ an, so dass nun S″a″ die Aufklappung des auf die Profilebene projicirten Lichtstrahles ist.

Da nun die Einfassungskante (YV, Y″L″) sich auf der Profilebene als ein Punkt y projicirt, der sich in y″ aufklappt, so hat die durch diese Kante erzeugte Schattenebene zum Grundschnitt auf dem Profil die mit S″a″ parallele Gerade y″z″; diese aber schneidet den Schnitt A′e″ der Dachfläche im Punkt (z″, z′), welcher, auf die erste Lage der Profilebene bezogen, z gibt; mithin ist die Horizontale (zZ, z″Z′) der Durchschnitt der Dachfläche mit der durch die betrachtete Einfassungskante gehenden Schattenebene.

§. 52.

Was den Schlagschatten betrifft, welcher durch die untere Dachkante (CD, C′D′) auf die vordere Mauerfläche geworfen wird, so darf man nur auf dieser Kante einen Punkt (m, m′) beliebig annehmen und den Lichtstrahl (mn, m′n′) ziehen; die Horizontalprojection dieses Strahls schneidet den Grundschnitt np der Mauer in n, und projicirt man nun diesen Punkt auf m′n′ in n′, so ist die durch n′ gezogene Horizontallinie n′p′ die Grenze des gesuchten Schattens.

Die hier auf der Horizontalebene angegebenen Schatten werden auf den unteren Boden geworfen; da aber ihre Grenzen über das Zeichnungsblatt hinausfallen würden, so kann hier nicht weiter auf ihre Construction eingegangen werden. Jedenfalls würden sie, nach allem Vorhergehenden, sehr leicht zu zeichnen sein, wenn auf der vertikalen Projectionsebene die absolute Höhe des Daches über dem Boden angegeben wäre.

§. 53.

Sowohl auf dieser als auch auf den folgenden Figuren zeigen die punktirten Schraffirungen solche Schatten an, welche, in Beziehung auf die Projectionsebene, auf welcher sie sich befinden, unsichtbar sind.

Schatten einer Nische.

§. 54.

Die Nische, von der hier die Rede ist, hat zur innern Fläche einen durch Umdrehung erzeugten Halbcylinder (ACB, A″A′B′B″), welcher von einer Viertelskugel (ACB, A′D′B′) überwölbt wird, die den Cylinder längs seiner obern Grundlinie berührt. Diese Nische ist von einem Gesimse (Aa_2ax, A″a″a′d′b′b″B″) eingefasst, dessen kreisförmiger Theil, der Gesimsbogen, eine conische Zone darstellt, welche zwischen den beiden, den Radien O′A′ und $O'a'_2$ entsprechenden Kreisen enthalten ist. Das Gesimse bildet einen Vorsprung gegen die Wand vxyu der vertikalen Mauer, in welcher die Nische angebracht ist; ferner ist diese Mauer in der ganzen Höhe zwischen w′k′ und dem Boden XY mit einem Gurtwerk (plinthe) bekleidet, dessen Ausladung zwischen vxyu und wabk liegt. Unten in der Nische endlich befindet sich eine Platte (tablette) (fghi, g′g″h″h′), welche auf zwei Stützpfeilern ($\alpha\delta\mu$, $\delta'\mu'\mu''\delta''$) und ($\lambda\mu b$, $\lambda'\pi'\pi''\lambda''$) ruht. Taf. 4.

Man bemerke ferner, dass die Horizontalebene hier nicht sowohl eine Projection als vielmehr einen in der Höhe der Platte A″B″ gemachten Schnitt darstellt; die Verticalprojection oder der Aufriss befindet sich auf der hinter der Nische stehenden Vertikalebene XY; zur Erklärung der geometrischen Constructionen jedoch wird häufig die durch den Mittelpunkt der Kugel gehende Vertikalebene AB (die Stirnebene, plan de tête) angewendet.

§. 55.

Man betrachte zuerst das Innere der Nische; die Richtung (S, S′) des Lichtstrahls zeigt offenbar, dass der an die vertikale Kante (A, A″A′) angrenzende Theil des Cylinders ACB im Schatten ist, während die

Seitenfläche A a des Gesimses erleuchtet wird; hieraus folgt, dass jene Kante eine zur Licht- und Schattengrenze gehörige Linie ist. Um nun den von ihr geworfenen Schatten zu finden, denke man sich eine bewegliche Gerade, welche parallel mit (S, S′), längs der Kante (A, A″A′) hinstreift; diese wird eine vertikale Ebene erzeugen, deren Grundschnitt die mit S parallele Gerade AC ist, und welche den senkrechten Cylinder längs einer seiner Erzeugenden, hier offenbar der Linie (C, C″C′), schneiden muss; dieser Schatten aber muss im Punkte C′ endigen, wo der durch den Endpunkt der fraglichen Kante gezogene Lichtstrahl A′C′ endigt.

§. 56.

Von der Lage (A′C′, AC) weg streift der Lichtstrahl längs des Bogens (A′D′B′, AB) hin und erzeugt einen schiefen Cylinder, dessen Durchschnitt mit dem senkrechten Cylinder der Nische nun construirt werden muss. Man nehme daher auf dem Bogen einen beliebigen Punkt (P, P′) und ziehe den Lichtstrahl (PQ, P′Q′), so schneidet dieser den vertikalen Cylinder ACB in einem Punkte, dessen Horizontalprojection offenbar der Punkt Q in der Basis des Cylinders ist; und bezieht man hierauf diesen Punkt auf P′Q′, so erhält man einen Punkt Q′ der gesuchten Curve C′Q′N′M′, an welcher die Vertikale C′C″ eine Tangente sein muss. Denn diese Gerade liegt in der zur Seite (C, G′C″) gehörigen Berührungsebene des Nischencylinders und zugleich auch in der Vertikalebene AC, welche den Strahlencylinder im Punkt (A, A′) und mithin längs der Erzeugenden (AC, A′C′) berührt: also ist die Gerade (C, C″C′) der Durchschnitt der Berührungsebenen beider Cylinder und also Tangente an der Durchschnittscurve dieser Flächen.

§. 57.

Man bemerke ferner, dass die als Schattenlinie betrachtete Curve C′Q′N′ sich im Punkte M′ endigen muss, wo sie die horizontale Kreislinie (A′B′, ACB) trifft; denn oberhalb dieses Kreises fällt der vom Gesimsbogen geworfene Schlagschatten auf eine neue Fläche, nämlich auf die Kugel und erzeugt dort eine Curve anderer Natur, welche später construirt werden wird. Da nun diese Grenze M′ nicht zum Voraus bekannt ist, so muss man die Curve C′Q′N′ über A′B′ hinaus verlängern, indem man den ganzen Durchschnitt der beiden im vorigen §. erwähnten Cylinder construirt.

Man vollende daher den Kreis A′D′B′P″ und bemerke, dass der Punkt P zwei verschiedenen Punkten P′ und P″ dieses Kreises entspricht, und dass es daher zwei Erzeugende des schiefen Cylinders giebt, welche in PQ projicirt sind und welche zu Vertikalprojectionen die Geraden P′Q′ und P″Q″ haben. Der Durchschnittspunkt Q liefert also zwei verschiedene Punkte Q′ und Q″ der gesuchten Curve. Andererseits entsprechen derselben Vertikalprojection E′e′ eines Lichtstrahls zwei verschiedene Projectionen auf der Horizontalebene, nämlich EN und en, welche zwei Punkte N′ und n′ liefern, die wieder der Durchschnittscurve angehören. So erhält man endlich diese Linie auf der Vertikalebene dargestellt durch

C′Q′N′M′U′B′n′q′γ′N‴Q″C′.

Die erste dieser beiden Methoden läuft darauf hinaus, beide Cylinder durch Vertikalebenen PQ, EN..., welche den Erzeugenden beider Flächen zugleich parallel sind, zu schneiden, nach der in der Darstellenden Geometrie gegebenen Vorschrift. Auf ähnliche Weise könnte man noch einen zweiten, ebenfalls geschlossenen Ast des Durchschnitts finden, wenn man den Kreis ACB, welcher dem Nischencylinder als Basis dient, vollendete; aber dieser zweite Ast hat keinen unmittelbaren Bezug auf das Schattenproblem, von welchem es sich hier handelt.

§. 58.

Schatten auf der Kugel. Dieser Schatten wird erzeugt durch den Durchschnitt der Kugel mit dem schiefen Cylinder, welcher von den über den Stirnbogen (A′D′B′, AB) hinstreifenden Lichtstrahlen gebildet wird. Schneidet man daher diese beiden Flächen durch Ebenen E′O′, G′H′ . . ., welche dem Lichtstrahl parallel und zugleich senkrecht sind auf der Vertikalebene (welche hier die Stirnebene AB ist), so hat man es nur mit geradlinigen und kreisförmigen Schnitten zu thun. Die erste E′O′ dieser schneidenden Ebenen nun schneidet die Kugel in einem grössten Kreise; dieser werde, um grösserer Deutlichkeit willen, parallel mit sich selbst fortgerückt, bis sein Durchmesser E′O′e′ in die Lage E″O″e″ gekommen ist. Man betrachte nun die Ebene des so fortgerückten Kreises (Fig. 3) als eine Hilfsprojectionsebene und klappe sie um ihre Axe E″e″ um, so erhält man E″V″e″ als den in der hintern Halbkugel liegenden Halbkreis. Eben jene schneidende Ebene E′O′ enthält aber den Lichtstrahl (E′O′, ES), dessen Lage auf der umgeklappten Hilfsebene leicht gefunden werden kann. Denn es ist dieser Lichtstrahl die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, das E′O′ und die Horizontale (OS, O′) zu Katheten hat; nimmt man daher auf der aus O″ auf E″O″ errichteten Senkrechten eine Entfernung O″S″ gleich OS, so erhält man E″S″ als Aufklappung des Lichtstrahles. Taf. 4.

§. 59.

Da nun der Lichtstrahl E″S″ und der grösste Kreis E″V″e″ sich beide in derselben schneidenden Ebene E′O′ befinden, so müssen sie sich in einem Punkte schneiden, der zugleich der Durchschnittspunkt des Lichtsrahles mit der Kugel sein wird. Dieser Punkt ist auf der Hilfsebene offenbar in F″ projicirt, und man erhält hieraus seine Projeciion F′ auf der vertikalen Hauptprojectionsebene, wenn man aus F″ eine Senkrechte F″F′ auf die den beiden letzteren Ebenen entsprechende Axe E″e″ zieht.

Eine andere schneidende Ebene G′H′ schneidet den schiefen Cylinder in einem Lichtstrahl, der sich auf die mit E″S″ parallel gezogene Gerade G″H″ projicirt; eben diese Ebene schneidet die Kugel in einem kleineren Kreise, der auf dem mit O″G″ beschriebenen projicirt ist. Der Durchschnittspunkt H″ dieser beiden Linien nun liefert, auf die vertikale Hauptprojectionsebene bezogen, einen neuen Punkt H′ der gesuchten Schattenlinie, als welche man endlich F′H′K′L′ erhält. Diese Curve muss offenbar durch den Punkt L′ gehen, wo der auf L′U′ projicirte Lichtstrahl zur Tangente an der Kugel wird, und es würde die vorhergehende Methode, wenn man sie auf den Punkt L′ anwenden wollte, auf eben diese Folgerung führen.

§. 60.

Man bemerke, dass die Schattencurve, von welcher hier die Rede ist, sich auf die Hilfsebene als eine Gerade O″K″H″F″ projicirt. Betrachtet man nämlich zwei beliebige Punkte F″ und H″ dieser Projection, so sieht man, dass sie zweien gleichschenkligen Dreiecken O″E″F″ und O″G″H″ angehören, in welchen die Winkel an der Grundlinie, E″ und G″, gleich sind; hieraus aber folgt, dass auch die Winkel an der Spitze, E″O″F″ und G″O″H″, einander gleich sind, und dass also die beiden Seiten O″F″ und O″H″ in Eine Richtung fallen müssen.

Hieraus folgt, dass der von dem Bogen (A′D′B′, AB) auf den kugelförmigen Theil der Nische geworfene Schlagschatten eine ebene Curve ist, welche nichts anders als ein grösster Kreis dieser Kugel sein kann, weil ihre Projection O″F″ durch den Mittelpunkt O″ geht; mithin ist die Projection L′H′F′P′ dieser Schattenlinie auf dem Aufriss eine Ellipse, welche den Durchmesser P″L′ zur grossen Axe hat.

§. 61.

Diese Resultate können auch aus dem in §. 730 der Darstellenden Geometrie bewiesenen Lehrsatze gefolgert werden. Denn es wird dort gezeigt, dass wenn die Eintrittscurve einer Kugel und eines Cylinders eben ist, alsdann auch die Austrittscurve eben und der ersten gleich ist; ferner, dass die Ebene der Austrittscurve senkrecht ist auf *einer Hilfsebene,* welche parallel ist den Erzeugenden des Cylinders und senkrecht auf der Eintrittscurve. Hier nun hat der schiefe Strahlencylinder mit der Kugel den grössten Kreis A′D′B gemein; dieser ist also die Eintrittscurve, und es lässt sich also der angeführte Lehrsatz ganz auf den gegenwärtigen Fall anwenden.

§. 62.

Will man von diesem Lehrsatz Gebrauch machen, um die Construction des Schlagschattens auf dem kugelförmigen Theil der Nische zu vereinfachen, so kann man in §. 58 unmittelbar sagen: Man wende eine Hilfsebene E′O′ an, parallel mit dem Lichtstrahl und senkrecht auf dem vertikalen Kreise A′D′B′, d. h. auf der Eintrittscurve, weil es nun gewiss ist, dass die Austrittscurve, oder die Schattenlinie, sich auf einer solchen Ebene als ein Durchmesser projiciren wird. Hierauf bewege man diese Ebene mit dem darin enthaltenen grössten Kreise, parallel mit sich selbst, nach einer andern Stelle des Blattes, und klappe sie in E″V″e″ um; hierauf construire man wie in §. 58 die Aufklappung E″S″ des Lichtstrahls, der den grössten Kreis in F″ trifft; und nun kann man behaupten, dass die Schattencurve seitlich in der Geraden O″F″ projicirt sey, ohne dass man nöthig hätte irgend einen der kleinen Kreise zu ziehen, welche man in §. 59 angewendet hat.

Um nun aus der Hilfsprojection O″F″ die Projection auf der vertikalen Hauptebene zu finden, darf man nur die verschiedenen Lichtstrahlen G′H′, J′K′.... ziehen, welche auf der Hilfsebene in den mit E″S″ parallelen Geraden G″H″, J″K″.. sich projiciren. Bezieht man hierauf die Punkte H″, K″..., wo diese letzteren Linien den Durchmesser O″F″ schneiden, durch die auf der Axe E″e″ senkrecht stehenden Geraden H″H′, K″K′... auf die Vertikalebene, so erhält man eben so viele Punkte H′, K′... der gesuchten Curve L′K′H′F′P″.

§. 63.

Taf. 4. Vom Anschliessungspunkt (point de raccordement). Die Curve des Schlagschattens, welchen der Bogen (A′D′B′, AB) auf die Kugel wirft, muss sich offenbar im Punkt M′ endigen, wo sie den horizontalen Kreis (A′B′, ACB) schneidet; denn dieser Kreis ist die Grenze, welche die Kugel von dem senkrechten Cylinder scheidet. Aus dem nämlichen Grund muss dieser Punkt M′ auch der Curve des Schlagschattens auf dem Cylinder angehören. In diesem gemeinschaftlichen Punkt M′ müssen also die beiden Curven L′H′M′ und C′Q′M′ sich an einander anschliessen, d. h. dieselbe Tangente haben. Denn für die eine oder für die andere Curve ist die Tangente der Durchschnitt, der den Strahlencylinder längs der Erzeugenden M′D′ berührenden Ebene mit der Berührungsebene der Kugel am Punkt M′ oder mit der Berührungsebene des senkrechten Cylinders in eben diesem Punkt; die beiden letztern Ebenen aber fallen in M′ in eine zusammen, weil die Kugel und der senkrechte Cylinder sich längs des horizontalen Kreises (A′B′, ACB) berühren; mithin bilden auch die Tangenten an beiden Curven in diesem Punkte nur eine und dieselbe gerade Linie. Hieraus geht hervor, wie wichtig es ist, diesen Punkt M′ durch eine unmittelbare Construction bestimmen zu können, damit die Stetigkeit des ganzen Schattenumrisses an dieser Stelle nicht eine das Auge beleidigende Störung erleide. Eine solche Construction soll nun gezeigt werden.

§. 64.

Der gesuchte Punkt (M, M′) befindet sich auf zwei grössten Kreisen der Kugel zugleich, nämlich auf dem horizontalen Kreise (ACB, A′B′) und auf dem grössten Kreise des seitlich in O″F″ projicirten Schlagschattens; mithin muss der gesuchte Punkt auf dem horizontalen Durchmesser liegen, in welchem diese beiden grössten Kreise sich schneiden. Dieser unbekannte Durchmesser, der einstweilen durch OR dargestellt sein mag, würde bestimmt sein, wenn die Distanz BR bekannt wäre, in welcher er die horizontale Tangente (BR, B′) schneidet; diese Tangente aber projicirt sich offenbar auf der Hilfsebene, in der senkrecht auf der Axe stehenden Geraden B_2B'; da ferner der unbekannte Durchmesser in der Ebene der Schattencurve sich befindet, so ist seine Projection auf der Hilfsebene die Linie O″F″, welche von B_2B' im Punkt R″ geschnitten wird; mithin ist die Länge B_2R'' der gesuchte Theil der horizontalen Tangente (BR, B′); denn letztere Gerade ist parallel mit der Hilfsebene, und musste sich daher auf diese in ihrer wahren Grösse projiciren.

Man trage daher die Länge B_2R'' von B nach R, und ziehe hierauf RO, so wird dieser Durchmesser den Kreis ACB in einem Punkte M schneiden, der, auf A′B′ projicirt, auch den Punkt M′ gibt. — In der Anwendung kann man diese Operation dadurch vereinfachen, dass man sie auf dem Kreis A′D′B′ ausführt, den man als die Aufklappung des horizontalen Kreises (ACB, A′B′) um A′B′ betrachten kann; es war aber von dieser neuen Aufklappung desshalb nicht die Rede, weil sie längere und weniger leichte Untersuchungen veranlasst hätte.

§. 65.

Es geschieht zuweilen, dass der Punkt R″ in eine zu grosse und unbequeme Entfernung fällt; um alsdann den unbekannten Durchmesser OR zu bestimmen, darf man nur den Punkt Z suchen, wo er die andere Tangente VZ schneidet. Der Punkt (V, O′) aber projicirt sich auf der Hilfsebene in V″, und mithin ist V″Z″ die gesuchte Distanz; da diese sich hier aber nicht in ihrer wahren Grösse projicirt, so muss man den Punkt Z″ auf A′B′ in Z′ projiciren, diesen letztern Punkt auf VZ beziehen und hierauf den Durchmesser ZO ziehen, durch welchen man den Punkt M erhält.

§. 66.

Von der Tangente. Man könnte diese Gerade, für irgend einen Punkt H′, nach der allgemeinen Methode erhalten, wenn man die den schiefen Cylinder längs des Lichtstrahls G′H′ berührende Ebene mit der Berührungsebene der Kugel im Punkt H′ combinirte; aber es ist einfacher, statt der letzteren Berührungsebene die Ebene der Schattenlinie selbst anzuwenden, da ja, wie bekannt, die Schattenlinie eine ebene Curve ist. Dieses Verfahren nun soll im Folgenden auf den Punkt M′, welcher das meiste Interesse bietet, angewendet werden.

Die Ebene der Schattencurve geht durch den Mittelpunkt O′ der Kugel und auch durch den Punkt L′, welcher der Curve selbst angehört; mithin ist O′L′O″ der Grundschnitt dieser Ebene auf der Ebene AB, welche hier als vertikale Projectionsebene angenommen wird. Die Berührungsebene des schiefen Cylinders am Punkt M′ muss durch den Lichtstrahl M′D′ und die Tangente D′T′ gehen, welche an den Bogen A′D′B′, der die Leitlinie dieses Cylinders darstellt, gezogen ist; mithin ist diese Tangente, welche in der Vertikalebene AB liegt, der vertikale Grundschnitt der Berührungsebene am schiefen Cylinder. Es ist also der Punkt T′, wo beide Grundschnitte O′L′O″ und D′T′ sich schneiden, ein Punkt des Durchschnitts der Berührungsebene mit der

Ebene der Curve, und folglich ein Punkt der gesuchten Tangente, welche somit in T'M' projicirt sein wird. Man erinnere sich, dass diese Gerade auch Tangente an der Curve C'Q'N'M' sein muss, weil, wie oben (§. 63) bewiesen worden, beide Schattencurven im Punkt M' sich an einander anschliessen.

§. 67.

Die Berührungsebene der Kugel für den Punkt (M, M') wäre zwar sehr leicht zu construiren, weil sie offenbar vertikal ist, und ihre Grundschnitte MT und Td sind, deren letzterer den Grundschnitt D'T' genau in dem schon bestimmten Punkt T' schneiden muss. Aber diese zweite Methode wäre viel weniger einfach, wenn man sie auf irgend einen andern Punkt H' anwenden wollte.

§. 68.

Taf. 4. Schatten des Einfassungs-Gesimses. Die vertikale Kante (b, b''b') ist offenbar eine zur Licht- und Schattengrenze gehörige Linie, weil die Seitenfläche Bb erleuchtet ist, während die Seitenfläche by es nicht ist. Streift daher der Lichtstrahl längs dieser Seite hin, so erzeugt er eine Vertikalebene $b\beta$, welche die Wand yu der Mauer in einer Geraden $\beta''\beta'$ schneidet, welche sich bis zu dem Punkte β' erstrecken wird, wo der Lichtstrahl $(b\beta, b'\beta')$ endigt.

§. 69.

Von dieser Lage weg streift der Lichtstrahl längs des Gesimsebogens hin, und erzeugt einen schiefen Cylinder, welcher den vertikalen Kreis (b'l'd', ab) zur Leitlinie hat. Dieser Cylinder nun schneidet die Wand yu der Mauer in einem Kreise, der dem vorhin genannten gleich ist, und dessen Mittelpunkt (ω, ω') man findet, wenn man eine Parallele $(o\omega, O'\omega')$ mit dem Lichtstrahl zieht. Hierauf beschreibe man mit dem Halbmesser $\omega'\beta' = O'b'$ einen Kreisbogen $\beta'\lambda'$, welcher endigen wird in dem Punkte λ', der durch den auf dem Lichtstrahl senkrechten Durchmesser $\omega'\lambda'$ bestimmt wird. Ergänzt wird endlich der Schattenumriss durch die Gerade $l'\lambda'$, welche parallel mit dem Lichtstrahl und die gemeinschaftliche Tangente der beiden Kreise b'l' und $\beta'\lambda'$ ist.

Denn der Vorsprung, den der Gesimsebogen gegen die Wand vxyu der Mauer bildet, hat die Form eines kleinen senkrechten Cylinders, dessen Erzeugende senkrecht auf der Vertikalebene stehen; und indem nun der Strahl über die vordere Basis (b'l'd'a', ba) dieses Cylinders hinstreift, beschreibt er die Schattencurve $\beta'\lambda'$. Ist endlich der Strahl in dem Punkte l' angekommen, von wo aus er die Mauerwand in λ' trifft, so ist er offenbar zur Tangente an dem Cylinder des Schwibbogens geworden. Von hier aus setzt er nun seinen Lauf nicht weiter auf der vorderen Basis fort, weil er in diesem Falle in das Innere des Cylinders eindringen müsste; sondern er streift jetzt an der im Punkt l' projicirten Erzeugenden hin, und erzeugt eine auf der Vertikalebene senkrechte Schattenebene, deren Grundschnitt die Tangente $l'\lambda'$ selbst ist.

Diese und ähnliche in der Folge vorkommende detaillirte Untersuchungen scheinen vielleicht ins Kleinliche zu gehen; aber sie sind nothwendig, damit der geometrische Zeichner die Formen und Ursachen der bei Schattenconstructionen häufig vorkommenden Aussprünge und Unterbrechungen der Stetigkeit sorgfältig studiren lerne; denn gerade solche Umstände müssen mit in die Darstellung aufgenommen werden, damit die Formen in ihrer ganzen Wahrheit sich herausstellen.

§. 70.

Schatten der untern Platte. Die untere Kante (gf, g'') ist offenbar eine Linie der Licht- und Schattengrenze, weil die Seitenfläche der Platte, links, erhellt ist, während die untere Fläche es

nicht ist. Der Lichtstrahl wird also, indem er über diese Kante hinstreift eine auf der Vertikalebene senkrechte Schattenebene erzeugen, deren Grundschnitt die mit S′ parallele Gerade g″z″ ist. Man könnte die Grenze z″ dieses Schattens finden, indem man die beiden Projectionen des von der Ecke (g, g″) ausgehenden Lichtstrahles construirte; um aber durch die graphischen Operationen mehrere Zwecke zumal zu erreichen, ziehe man den Lichtstrahl (ht, h″t″), welcher den Gurt wfbk im Punkte (t, t″) schneidet, alsdann wird die Horizontale t″z″ offenbar den von der untern Kante (gh, g″h″) auf den Gurt geworfenen Schlagschatten bestimmen.

Wo dieser Schatten auf die vorspringenden Pfeiler fällt, welche die Platte tragen, da erleidet er eine Unterbrechung. Um diese zu bestimmen suche man den Punkt ϱ, wo die verlängerte Vertikalebene $\lambda\pi$ den Lichtstrahl (ht, h″t″) schneidet; nachdem man hierauf den Punkt ϱ in ϱ' projicirt hat, ziehe man durch letzteren Punkt eine unbestimmte Horizontale.

Die Lichtstrahlen endlich, welche über die vertikale Kante (h, h′h″) hinstreifen, erzeugen eine Ebene, welche den Gurt in der Vertikalen t″t′ schneiden, welche durch den Lichtstrahl h′t′ begrenzt wird; diejenigen aber, welche die horizontale Kante (hi, h′) bestreifen, bilden eine Schattenebene, die senkrecht auf der Vertikalebene steht und deren Grundschnitt auf dem Gurt die Gerade h′t′ selbst ist.

§. 71.

Was die beiden Pfeiler unter der Platte betrifft, so ist klar, dass jede der vertikalen Kanten μ und π eine erleuchtete Seitenfläche von einer unerleuchteten scheidet. Diese beiden Kanten werfen also auf den Gurt geradlinige Schatten, welche nach dem Vorhergehenden leicht zu construiren sind. So zieht man z. B. die Gerade $\mu\varphi$ parallel mit der Projection S des Lichtstrahles, und errichtet aus φ eine Vertikale $\varphi'\varphi''$, welche an dem horizontalen Schatten der Platte enden muss.

§. 72.

Bemerkung. Man könnte in diese Nische eine Vase, wie die in Fig. 4 abgebildete, stellen; und da alle Theile derselben, mit Ausnahme des quadratischen Sockels, von Umdrehungsflächen begrenzt werden, unter welchen sich zwei Fussgestelle befinden, ähnlich dem auf Taf. 6, wo alles in grösserem Massstabe ausgeführt ist und dort genauer untersucht werden wird, so können die Schattenlinien der Vase nach den in den §§. 92, 93 ... 115 entwickelten Methoden construirt werden. Es wäre nur noch hinzuzufügen der Schlagschatten, welchen die Kante (A, A′A″) auf die Vase, und der welchen die Vase auf die Nische wirft, was zu ähnlichen Untersuchungen Veranlassung giebt, wie sie bei dem Fussgestelle und dem Kapitäl vorkommen werden. Der Leser möge daher die Zusammenstellung der Nische und Vase, welche eine für das Auge sehr befriedigende Zeichnung giebt, selbst versuchen.

Schatten einer Brücke.

§. 73.

Der Bogen dieser Brücke ist ein volles Tonnengewölbe, d. h. die innere Fläche des Gewölbes ist ein senkrechter Cylinder, dessen Basis ein Halbkreis ist. Um nun die verschiedenen einzelnen Theile und ihre Dimensionen möglichst herauszuheben, nimmt man gewöhnlich an, der Brückenbogen sei von einer durch die höchste Erzeugende des Cylinders gelegte Vertikalebene geschnitten und die vordere Hälfte weggenommen. Unter Voraussetzung eines solchen Zustandes des Brückenbogens sollen nun die Schatten bestimmt Taf. 5.

werden, nachdem zuvor die Projectionen der bleibenden Theile auf den beiden, mit der Erzeugenden des Cylinders parallel genommenen Projectionsebenen nachgewiesen worden.

§. 74.

Auf der Vertikalebene (Fig. 1) ist das Profil der Brustmauern, der Fuss- und Fahrwege der Brücke verzeichnet. A′B′ stellt die höchste Erzeugende (den Schluss) des Brückenbogens, und C′D′ die in der Anlaufsebene liegende Erzeugende vor, so dass also C′A′ der Halbmesser des Cylinders ist. Auf der Horizontalebene sind diese beiden Erzeugenden in den Parallelen AB und CD projicirt, deren Entfernung AC dem Halbmesser A′C′ des Gewölbes gleich sein muss; die Linien XYZ und xyA sind die Umrisse der Brustmauern des Kai und der Brücke. Da aber die Verkleidungsmauer des Kai, welche hier ohne Böschung, d. h. vertikal angenommen wird, um die Grösse Cy hinter dem Brückenpfeiler zurücksteht, so mussten beide durch einen Vorpfeiler (éperon) verbunden werden, welcher von einem vertikalen über einem Viertelskreis CO errichteten Cylinder gebildet wird; dieser Vorpfeiler ist auf der Vertikalebene durch ein Rechteck dargestellt; oben ist er mit einem vorspringenden Band umgeben, und von einer konischen Bedachung gekrönt.

Unterhalb der Anlaufsebene C′D′ des Gewölbes ist der Pfeiler mit einem Sockel versehen, der auf der Vertikalebene durch den willkürlichen Zwischenraum zwischen C′D′ und XY ausgedrückt wird. Auf der Aussenseite der Brustmauer der Brücke endlich läuft ein Gurt, dessen Profil $\psi'\varphi'\theta'$ auf der Vertikalebene durch ein, unten in ein Karniess auslaufendes Rechteck dargestellt ist. Dieser Gurt, welcher sich auch an der Kaimauer fortzieht, macht auf der Horizontalebene einige Sockel- und Vorpfeiler-Theile unsichtbar, was durch runde Punkte angedeutet ist.

Die Axe der Figur ist im Allgemeinen die Gerade XY; einigemal jedoch wird sie gewechselt, um eine Horizontal- oder Vertikalebene zu erhalten, welche den gerade vorliegenden einzelnen Constructionen näher liegt. Die gewählte Projectionsebene wird alsdann jedesmal angegeben werden. — Die parallelen Lichtstrahlen, wodurch alle diese Gegenstände erleuchtet werden, haben die gemeinschaftliche Richtung (CS, C′S′).

§. 75.

Taf. 5. Schatten auf dem Gewölbe. Dieser Schatten wird hervorgebracht durch den vordersten, in der Vertikalebene AC liegenden Bogen, den Stirnbogen. Nimmt man diese Vertikalebene, welche senkrecht auf dem Brückengewölbe ist, als Hilfsprojectionsebene, und klappt sie um (AC, C′) auf, so nimmt jener Bogen die Lage CA″ an, und befindet sich jetzt in der Anlaufsebene C′D′, welche hier als Horizontalebene dienen wird. Nun aber ist es nothwendig, die Projection des Lichtstrahls auf der Hilfsebene AC zu construiren. Fällt man daher von einem beliebigen Punkt (S, S′) der Linie (CS, C′S′) eine Senkrechte (SA, S′a′) auf die Vertikalebene AC, so wird der Fusspunkt (A, a′) dieser Geraden bei der Aufklappung der Hilfsebene um AC offenbar in S″ fallen; mithin wird, auf dieser Aufklappung, die Gerade CS″ die Hilfsprojection des Lichtstrahls darstellen.

Betrachtet man nun auf dem Stirnbogen einen beliebigen Punkt E″, welcher auf der Vertikalebene in E′ projicirt ist, und man zieht durch diesen Punkt einen Lichtstrahl, welcher sich in E″F″ parallel mit C″S″ und in E′F′ parallel mit C′S′ projiciren wird, so kann dieser Strahl das Gewölbe nur in der, seitwärts in F″ projicirten horizontalen Erzeugenden schneiden; man findet aber leicht diese Erzeugende auf der Vertikalebene,

wenn man C′f gleich der Höhe des Punktes F″ über der Anlaufebene CA nimmt, und die Horizontale fF′ zieht; alsdann ist der Punkt F′, in welchem diese Erzeugende von der Projection E′F′ geschnitten wird, ein Punkt der gesuchten Schattencurve; die übrigen Punkte werden auf eine ähnliche Art gefunden.

Wählt man als Ausgangspunkt des Lichtstrahls den Punkt H″, in welchem die Seitenprojection H″L″ Tangente an der Basis des Gewölbecylinders ist, so ist der Strahl selbst offenbar Tangente an diesem Cylinder; der Eintrittspunkt desselben fällt also mit dem Austrittspunkt zusammen, und der Punkt (H″, H′) ist also der erste Punkt der Schlagschattencurve auf dem Gewölbe, und unterhalb desselben hört der Theil H″C des vordern Bogens auf eine Linie der Licht- und Schattengrenze zu sein.

Betrachtet man im Gegentheil den Lichtstrahl (A″G″, A′G′), der von der Spitze (A″, A′) des Stirn-Bogens ausgeht, so erhält man nach der allgemeinen Methode den letzten Punkt G′ der Schattencurve, weil hier angenommen wird, die Gewölbelinie endige in der Spitze A″; würde dagegen der Kreis CA″ vollständig angenommen, so müsste man die Constructionen fortsetzen bis zu dem Punkte, welcher H″ diametral entgegengesetzt ist.

§. 76.

Diese gesuchte Schattencurve ist eine Ellipse, und folglich ist es auch ihre Projection H′F′G′. Denn diese Curve entsteht aus dem Durchschnitt des Gewölbecylinders mit dem schiefen Cylinder derjenigen Lichtstrahlen, welche den vordern Bogen (CA″, CA), der also die gemeinschaftliche Basis beider Cylinder ist, streifen; nun ist in der Darstellenden Geometrie (§. 733) bewiesen worden, dass, wenn zwei Cylinder zweiten Grades sich schneiden, und es ist die Eintrittscurve eben, es alsdann auch die Aussrittscurve sei. Mithin kann letztere hier nichts anderes als eine Ellipse sein.

Da ferner aus §. 75 bekannt ist, dass der Punkt H″ der Austrittscurve angehört, und dass diess auch von dem ihm auf dem vordern Kreise CA″ diametral entgegengesetzten Punkte gilt, so folgt, dass der Durchmesser AH″ der gemeinschaftliche Durchschnitt der Ebene der Austrittscurve mit der Ebene der Eintrittscurve ist.

§. 77.

Von der Tangente. Man könnte, um an einen beliebigen Punkt F′ der Curve G′F′H′ die Tangente zu construiren, die gewöhnliche Methode anwenden, nach welcher man den Durchschnitt der beiden Ebenen sucht, von denen die eine den Gewölbecylinder, die andere den schiefen Strahlencylinder in dem Punkte (F′, F″) berührt; weil aber hier die Curve eben ist (§. 76), so ist es einfacher, die Ebene dieser Curve selbst mit einer von jenen Berührungsebenen zu combiniren. Diese zweite Methode ist überdiess die einzig anwendbare in Beziehung auf den Punkt (H′, H″), weil in diesem die Berührungsebenen beider Cylinder zusammenfallen, und daher die Tangente unbestimmt lassen. Denn die Berührungsebene des Gewölbes an diesem Punkte geht durch die Tangente H″L″ des Stirnbogens und durch die horizontale Erzeugende, welche sich auf der Hilfsprojectionsebene AC in dem Punkte H″ projicirt; mithin steht diese Berührungsebene senkrecht auf der Hilfsebene, und hat H″L″ zum Grundschnitt. Was die Berührungsebene am schiefen Cylinder betrifft, so muss diese ebenfalls durch die Tangente H″L″ und noch durch den Lichtstrahl gehen, der vom Punkt (H″, H′) ausgeht; dieser Lichtstrahl aber ist auf der Hilfsebene in der Geraden H″L″ selbst projicirt; mithin steht die zweite Berührungsebene auch senkrecht auf der Hilfsebene, und hat den nämlichen Grundschnitt H″L″ wie die erste; folglich fällt sie mit dieser zusammen, und ihr Durchschnitt bleibt daher unbestimmt. Taf. 5.

§. 78.

Um also die Tangente am Punkt (H′, H″) zu erhalten, muss man die Berührungsebene des Gewölbes mit der Ebene der Schattencurve combiniren; zuerst suche man die Grundschnitte dieser Ebenen auf der Verticalebene CD, welche das Gewölbe am Anlauf berührt, weil diese Ebene den zunächst vorzunehmenden Constructionen näher liegt. Die durch die Gerade H″L″ gelegte Berührungsebene schneidet die Verticalebene CD in einer Horizontalen, welche offenbar durch den in L″ aufgeklappten Punkt gehen wird; führt man daher diesen Punkt, durch Umdrehung um AC, in seine ursprüngliche Lage zurück, so projicirt er sich in L′, und die Gerade L′T′ ist also die Projection des vertikalen Grundschnitts dieser Berührungsebene.

Was die Ebene der Schattencurve betrifft, so geht sie (§. 76) durch den Durchmesser AH″, der die Vertikalebene CD im Punkt M″ schneidet, welcher, in seine erste Lage zurückgeführt, sich im Punkt M′ projiciren wird. Eben diese Ebene muss aber auch eine mit jenem Durchmesser parallele Gerade enthalten, welche durch einen beliebigen Punkt (G″, G′) gezogen wird. Diese Parallele hat zu Projectionen offenbar die mit AH″ Parallele G″N″ und die Vertikale G′N′, und da sie die Vertikalebene CD im Punkt N″ schneidet, welcher zurückgeschlagen und auf G′N′ bezogen, sich in N′ projicirt, so erhält man M′N′ als Projection des vertikalen Grundschnittes der Ebene der Schattencurve. Und da endlich die beiden Grundschnitte M′N′ und L′T′ sich im Punkt T′ schneiden, so ist die Gerade T′H′ die gesuchte Tangente.

§. 79.

Man bemerke, dass der Punkt K′, in welchem der Grundschnitt M′N′ die Erzeugende (CD, C′D′), welche im Anlauf des Gewölbes liegt, schneidet, der verlängerten Schattencurve angehört, und dass diese Curve den Grundschnitt M′N′ im Punkt K′ berühren muss. Denn dieser Grundschnitt ist der Durchschnitt der Ebene der Schattencurve mit der Vertikalebene CD; diese aber berührt das Gewölbe längs der Erzeugenden (CD, C′D′).

§. 80.

Um den Umriss der Schlagschatten auf dem Gewölbe zu vollenden, muss man den Fortgang des Lichtstrahls von der Lage (A″G″, A′G′) an weiter verfolgen. In letzterer Lage, in welcher er den höchsten Punkt des Gewölbebogens erreicht hatte, war seine Horizontalprojection die mit CS parallele Gerade AG; projicirt man nun auf diese Gerade den Punkt G″ in G, so muss dieser letztere dem Punkt G′ entsprechen, was als Probe für die Richtigkeit der vorhergehenden Constructionen dienen kann. Da nun ferner angenommen wird, das Gewölbe endige in der höchsten Erzeugenden (AB, A′B′), so wird der Lichtstrahl längs dieser Kante hinstreifen und eine Schattenebene erzeugen, deren Grundschnitt auf Fig. 3 die Gerade A″G″ ist, und welche das Gewölbe in der Erzeugenden G′Q′ schneidet.

§. 81.

Taf. 5. S c h a t t e n auf dem Vorpfeiler und der Mauer des Kai. Der letzte Punkt Q′ des vorhergehenden Schattens wird hervorgebracht durch den Lichtstrahl Q′P′, welcher in P′ die höchste Erzeugende des Gewölbes streift: man erhält also die Horizontalprojection dieses Lichtstrahls, wenn man den Punkt P′ auf die Gerade AB in P projicirt und hierauf PQ parallel mit CS zieht (offenbar muss der Punkt Q mit den Punkten G″ und G in der bekannten Beziehung stehen). Bemerkt man nun, dass dieser Lichtstrahl (PQ, P′Q′) den in der Vertikalebene BD liegenden Gewölbebogen nur streift, so ist leicht einzusehen, dass er seinen Weg fortsetzen und auf den Vorpfeiler oder auf die Mauer des Kai fallen muss. Hier, auf Tafel 5, schneidet die Horizontal-

projection PQ den Kreis DJ, welcher die Basis des Vorpfeilers ist in R: mithin ist R′ der erste Punkt des Schlagschattens auf diesem Cylinder. Um den letzten, V′ zu finden, ziehe man einen Lichtstrahl, dessen Horizontalprojection VU die Basis des Vorpfeilers berührt; projicirt man hierauf den Punkt U in U′, und zieht die Vertikalprojection U′V′, so ergibt sich auf dieser leicht aus V der gesuchte Punkt V′.

§. 82.

Diese Curve R′V′ ist ein Ellipsenbogen, weil sie aus dem Durchschnitt des Vorpfeiler-Cylinders mit der Schattenebene entsteht, welche durch die Gerade (PU, P′U′) geht, und auf Fig 3, die Gerade A″G″ zum Grundschnitt hat. Die Scheitelpunkte dieser Ellipse müssen auf den Erzeugenden liegen, welche in den Endpunkten D und J des Viertelskreises sich projiciren; denn aus der Lage der Berührungsebenen an diesen Erzeugenden ersieht man, dass von den Tangenten, welche aus dem Schnitt jener Ebenen mit der Schattenebene entstehen, die eine parallel mit dem horizontalen Grundschnitt der schneidenden Ebene, die andere senkrecht auf ihm sein wird. Um nun diese Scheitelpunkte zu bestimmen, bemerke man, dass, auf Fig. 3, die Schattenebene in A″G″ und die beiden vorerwähnten Erzeugenden in den Vertikalen CL″ und yx projicirt sind; werden daher die Durchschnittspunkte α und β dieser Geraden um AC umgeschlagen und auf α' und β' bezogen, so sind diese letzteren die gesuchten Scheitelpunkte der Ellipse α'R′V′β'.

§. 83.

Setzt nun der Lichtstrahl (UV,U′V′), welcher den Vorpfeiler-Cylinder berührt, seinen Weg weiter fort, so fällt er auf den Sockel oder auf die Mauer des Kai. Hier, auf Taf. 5, findet der Durchschnitt dieses Lichtstrahles mit der Vertikalebene, welche die Mauerwand bildet, in dem Punkte (W, W′) statt, welcher sich oberhalb des Sockels befindet; der fragliche Lichtstrahl fällt also auf die Mauer des Kai und der Rest (UB, U′B′) der höchsten Erzeugenden des Gewölbes erzeugt auf ihr einen geradlinigen Schatten W′b′ = U′B′.

Hierauf wird der Lichtstrahl (Bb, B′b′) längs des Profils der Brustmauer hinaufsteigen und eine cylindrische Fläche erzeugen, welche die vertikale Wand Wb der Kaimauer in einer Linie b′b″c′c″e′e″ schneidet; diese ist identisch mit der Profillinie, welche dem Cylinder als Leitlinie dient, weil letztere in einer mit der Mauer des Kai parallelen Ebene liegt. Ausgenommen von dieser Identität ist nur ein kleiner geradliniger Schatten c″e′, welcher dadurch entsteht, dass der Lichtstrahl, in dem Punkte (γ,γ') des Gurtes angekommen, einige Zeit über die im Punkt γ projicirte horizontale Kante hinstreift, und also eine Schattenebene erzeugt, welche senkrecht auf der Vertikalebene steht. Bald aber wird der Lichtstrahl auf die vertikale Kante der Brustmauer stossen, welche den Schatten c′e″ erzeugt, der im Lichtstrahl B″e″ endigt. Dieser letzte Lichtstrahl (B″e″, Bb) wird endlich noch die horizontale Kante B″ der Brustmauer bestreifen und noch eine auf der Vertikalebene senkrechte Schattenebene erzeugen, welche die Mauer des Kai und den Gurt in einer gebrochenen, aber auf die Gerade B″e″ projicirten Linie schneidet.

§. 84.

Man betrachte nun abermals den Vorpfeiler DJ, insofern auf ihn der Schlagschatten des in der Vertikalebene BD enthaltenen Gewölbebogens fallen muss. Dieser Bogen ist hier um die Vertikale D in die Vertikalebene aufgeklappt, und zwar in dem mit einem Halbmesser gleich BD beschriebenen Kreise $D'\omega'$. Nimmt man nun auf diesem aufgeklappten Gewölbebogen $D'\omega$ einen beliebigen Punkt δ'', und führt ihn durch einen horizontalen Kreisbogen in seine wahre Lage (δ,δ') zurück, so kann man den Lichtstrahl $(\delta\varepsilon,\delta'\varepsilon')$ ziehen; Taf. 5. Fig. 2.

dieser schneidet den vertikalen Cylinder DJ in dem Punkt $(\varepsilon, \varepsilon')$, welcher somit ein Punkt der fraglichen, hier in $D'\varepsilon'R'\mu'$ projicirten Schattencurve sein wird.

Diese Curve, welche der Durchschnitt zweier Cylinder ist, muss offenbar durch den schon im §. 81 erhaltenen Punkt (R, R') gehen, indem dort gesagt wurde, dass der Lichtstrahl $(PQR, P'Q'R')$ zu gleicher Zeit die höchste Erzeugende des Gewölbes und den in der äussersten Ebene BD liegenden Gewölbebogen streife; und als Schattenlinie muss diese Curve im Punkte (R, R') endigen. Betrachtet man sie aber als den Durchschnitt der beiden Cylinder, so kann man sie verlängern, indem man die nämlichen Operationen wiederholt, welche für den Punkt δ'' angewendet wurden; besonders muss man den Punkt μ' construiren, wo sie, auf der Vertikalebene, von dem Lichtstrahl berührt wird. Dieses geschieht mittelst der an die Basis des Vorpfeilers gezogenen Tangente $V\lambda$; man sucht die Aufklappung λ'' des Berührungspunktes, bezieht diese auf λ' und zieht nun den Strahl $\lambda'\mu'$, welcher den gesuchten Punkt μ' enthält.

§. 85.

Auf dem Cylinder DJ ist ausserdem noch eine Linie der Licht- und Schattengrenze vorhanden, nämlich die Gerade $(V, V'V'')$, in welcher er von einer mit den Lichtstrahlen parallelen Ebene berührt wird; und da diese vertikale Berührungsebene VW die Kaimauer in der Geraden $W'W''$ schneidet, so ist diese der von dem Vorpfeiler auf jene vertikale Mauer geworfene Schlagschatten.

§. 86.

Taf. 5. *Ein anderer Fall* für die Schatten des Vorpfeilers DJ. Je nachdem man den parallelen
Fig. 4. Lichtstrahlen eine mehr oder minder geneigte Richtung gibt, kann es geschehen, dass derjenige Strahl, welcher durch den Endpunkt Q' des Schlagschattens auf dem Gewölbe geht, den Vorpfeiler nicht mehr trifft. Dieses ist wirklich der Fall in Fig. 4, wo, mit Weglassung einiger unnöthigen Theile, die nämlichen Bezeichnungen beibehalten wurden, wie in der ersten Figur und wo man sieht, dass die Horizontalprojection PQ dieses Strahls den Kreis DJ nicht schneidet. In diesem Falle trifft der Strahl $(PQ, P'Q')$ die vertikale Mauer des Kai im Punkt (q, q'), und die Gerade $q'b'$ ist wieder der Schlagschatten, den das Ende der höchsten Erzeugenden des Gewölbes auf die Mauer wirft. Auf dem Vorpfeiler aber ist der elliptische Bogen $R'V'$ nicht mehr vorhanden, und die Curve $D'\varepsilon'\mu'$ geht jetzt bis zum Punkt μ', wo der Lichtstrahl $(\lambda V, \lambda'\mu')$ Tangente an dem vertikalen Cylinder DJ wird. Dieser Lichtstrahl setzt aber seinen Weg fort bis zum Punkte (W, W'), wo er die Kaimauer trifft, auf welcher jetzt eine neue Schattencurve $W'q'$ erscheint, welche durch das Stück $\lambda''Q''$ des Gewölbebogens hervorgebracht wird. Man construirt diese Curve, welche eine Ellipse ist, indem man auf dem aufgeklappten Gewölbebogen einen zwischen λ'' und Q'' liegenden Punkt nimmt, diesen hierauf in seine horizontale und vertikale Projection zurückführt und alsdann den ihm entsprechenden Lichtstrahl zieht, dessen Durchschnitt mit der Vertikalebene Wb einen Punkt der gesuchten Curve liefert, wie auf der Fig. 4 zu sehen ist. — Endlich ist auch jetzt wieder auf dem Vorpfeiler eine Linie der Licht- und Schattengrenze vorhanden, nämlich die Erzeugende $(V, V''\mu')$, in welcher dieser Cylinder von der mit den Lichtstrahlen parallelen Ebene VW berührt wird. Diese Ebene schneidet die Kaimauer in der Vertikalen WW', welche somit der Schlagschatten sein wird, den der Cylinder des Vorpfeilers auf die Mauer wirft.

§. 87.

Taf. 5. Man bemerke, zur ersten Figur zurückkehrend, dass der Sockel vm, welcher von einem vertikalen
Fig. 2. Cylinder begrenzt wird, ebenfalls eine Linie der Licht- und Schattengrenze darbietet, nämlich die Linie

(v, v′v″), in welcher jener Cylinder von der mit den Lichtstrahlen parallelen Ebene vu berührt wird. Diese Ebene schneidet die vertikale Seitenfläche mu des Sockels, welcher an dem Fusse der Kaimauer hinläuft, in der Geraden (u, u′u″), und eben diese Seitenfläche empfängt auch einen Schlagschatten u′m′ von dem Bogen (vm, v′m′). Letztere Curve u′m′, welche ein Ellipsenstück ist, construirt man leicht, indem man durch jeden Punkt des Bogens (vm, v′m′) einen Lichtstrahl zieht, wie die Figur es andeutet. Offenbar ist die Curve u′m′ Tangente an der Geraden u′u″.

§. 88.

Schatten auf dem Vorpfeiler CO. Der Schaft dieses Pfeilers empfängt den Schatten von dem untern Kreis (pmq, p′m′q′) des cylindrischen Bandes. Dieser Schatten ist der Durchschnitt zweier Cylinder und wird construirt, indem man durch einen beliebigen Punkt (q, q′) jenes Kreises einen Lichtstrahl (qr, q′r′) zieht; die horizontale Projection schneidet die Basis CO des Vorpfeilers im Punkte r, aus welchem man den Punkt r′ der gesuchten Curve o′r′t′ erhält. Um den ersten Punkt o′ dieser Curve zu erhalten, ziehe man die horizontale Projection om des Lichtstrahles, der die Vertikale o trifft: aus dem Punkte m dieser Projection ergibt sich der Punkt m′, durch welchen man sofort eine Parallele mit C′S′ zieht.

Der Rest mp des Bandbogens wirft seinen Schatten auf die Kaimauer und erzeugt auf derselben eine Ellipse p′o′h′, die am besten construirt wird, wenn man einen entfernteren Punkt, z. B. h′ sucht, indem man den Lichtstrahl (qr, q′r′) verlängert, bis er die Vertikalebene xy in (h, h′) schneidet.

§. 89.

Der Gurt, welcher sich auf der Aussenseite der Brustmauer des Kai hinzieht, projicirt auf die Verkleidung einen geradlinigen Schatten, den man erhält, indem man durch einen beliebigen Punkt (k, k′) der untern Kante des Gurts einen Lichtstrahl (kx, k′x′) zieht. Dieser schneidet die Vertikalebene xy in dem Punkte x, aus welchem man x′ findet. Nun darf man nur durch letzteren Punkt eine Horizontale ziehen und diese auch nach der rechten Seite der Figur hinüber verlängern, um auf diesem Theil der Kaimauer den ähnlichen Schatten zu erhalten.

§. 90.

Wenn der Punkt x′ höher zu liegen käme als der untere Endpunkt θ' des Karniesses $\varphi'\theta'$, so müsste man daraus schliessen, dass der Schatten des Gurtes nicht mehr auf die Mauer des Kai, sondern auf das Karniess fiele. Da dieses aber aus einem Cylinder besteht, dessen Erzeugende den beiden Projectionsebenen, welche XY zur Axe haben, zugleich parallel sind, so genügt es nicht, diese beiden Ebenen anzuwenden und man muss daher noch die Vertikalebene AC zu Hilfe nehmen. In §. 75 wurde der Lichtstrahl (CS, C′S′) auf diese Hilfsebene projicirt, indem man die Senkrechte (SA, S′a′) auf sie fällte; statt nun aber, wie dort, diese Projection in die Horizontalebene umzuschlagen, klappe man sie hier in die Vertikalebene XY auf, indem man die Stirnebene AC um die Vertikale C dreht. Bei dieser Bewegung kommt der Fusspunkt (A, a′) jener Senkrechten offenbar in (a, S‴) zu liegen, so dass also C′S‴ die nunmehrige Aufklappung der Hilfsprojection des Lichtstrahles sein wird. Den Umriss $\psi'\varphi'\theta'$ des Gurtprofils an der Brüstung der Brücke kann man auch betrachten als die Aufklappung des Profils, welches der Gurt an der Brustmauer des Kai in die Vertikalebene ACy schneidet, vorausgesetzt, dass beide Gurte durch dieselben Cylinder gebildet werden, deren Erzeugende sich unter rechten Winkeln schneiden. Zieht man nun durch den Punkt φ' eine mit C′S‴ parallele Gerade, so wird diese die Curve $\varphi'\theta'$ in einem Punkte schneiden, durch welche man eine Horizontale ziehen muss,

um den Schatten des Gurts auf dem Karniess zu erhalten. Da diese Construction sehr leicht ist, so wurde sie hier nur angedeutet, und ihre Ausführung wird dem Leser, falls die auf seiner Figur gegebenen Stücke es nöthig machten, nicht die geringste Schwierigkeit verursachen.

§. 91.

Endlich müssen auch noch die Schlagschatten construirt werden, welche die Brustmauer der Brücke auf das Trottoir, und dieses auf den Fahrweg wirft. Diese Constructionen aber sind auf der Figur so angedeutet, dass es keiner weitern Erklärung bedarf.

Schatten eines Fussgestelles.

§. 92.

Taf. 6. Fig. 1. Ein Fussgestelle besteht hauptsächlich aus drei Theilen, welche alle durch Umdrehungsflächen begrenzt sind, die eine gemeinschaftliche und vertikale Axe haben:

1) Das cylindrische Band, welches durch die Umdrehung der Vertikalen G′G″ entstanden ist; 2) die Einziehung, deren Meridianschnitt G′H′K′ eine Curve ist, welche ihre Concavität nach Aussen wendet und von zwei horizontalen Tangenten begrenzt wird; 3) die cylindrische Basis, welche durch Umdrehung der Vertikalen K′K″ entstanden ist. Das Fussgestelle macht gewöhnlich einen Theil des Gesimses am Fuss einer Säule aus; sonst dient es auch für sich als Träger einer Büste oder eines anderen Gegenstandes. In letzterem, hier betrachteten Falle ist es gewöhnlich noch mit verschiedenen Ornamenten versehen, wie Fig. 2 zeigt; man sieht hier über der Einziehung zwei cylindrische Reife, zwischen denen ein Rundstab hervorragt; unterhalb der Einziehung ist wieder ein cylindrischer Reif, ein Viertelsstab und endlich als Basis ein Cylinder. Um aber die schwierigen und wichtigen Fälle, welche die geometrische Schattenconstruction des Fussgestelles darbietet, dem Leser so deutlich als möglich zu machen, wird dieser Körper hier auf seine drei wesentlichen Theile reducirt, wie sie in Fig. 1 angezeigt sind.

§. 93.

Zur Construction der Einziehung kann man zwei Hohlkehlen oder Viertelskreise anwenden, welche sich an einander anschliessen. Da nun die Entfernung GL gleich der Summe beider Halbmesser, und KL gleich ihrer Differenz sein muss, so nehme man die Vertikale KO′ gleich der halben Summe KD sammt der halben Differenz DO′, alsdann erhält man O′K als den Halbmesser des untern Bogens KH und OG als den Halbmesser des obern Bogens GH.

§. 94.

Um der Einziehung mehr oder weniger Tiefe zu geben, kann man den Halbmesser go beliebig nehmen und mit demselben einen unbestimmten Bogen gh beschreiben, hierauf eine Senkrechte kd = go errichten, die Gerade od ziehen und auf ihrer Mitte das Perpendikel io′ errichten, welches die verlängerte Senkrechte kd in dem Punkte o′ schneidet; dieser Punkt ist alsdann der Mittelpunkt des unteren Bogens kh. Denn diese beide Bogen schliessen sich in dem auf der Centrallinie oo′ liegenden Punkte h an einander an.

§. 95.

Taf. 6. Fig. 2. Die durch die beiden vorhergehenden Methoden erhaltenen Meridiancurven erleiden in den Punkten H und h eine plötzliche Krümmungsänderung; will man diesen Umstand vermeiden, so zeichne man über der

Geraden GK als Durchmesser einen Halbkreis, oder auch eine Halbellipse, welche GK zu ihrer grossen und eine beliebige kleine Axe hat; hierauf gebe man allen Ordinaten dieser ersten Curve eine solche Neigung, dass sie der Horizontalen GJ parallel werden, wie Fig. 3 es zeigt, so erhält man als Meridiancurve eine stetige Halbellipse, welche durch zwei horizontale Tangenten begrenzt wird.

§. 96.

Man nehme nun an, die Hauptfigur werde von Lichtstrahlen erleuchtet, welche alle der Richtung Taf. 6. (OS, O′S′) parallel seien. Um nun fürs Erste die Licht- und Schattengrenze auf der Einziehung zu finden, Fig. 1. bemerke man, dass diese Curve die Berührungslinie ist zwischen der Umdrehungsfläche der Einziehung und dem um sie beschriebenen, mit (OS, O′S′) parallelen Cylinder. Man darf daher nur die im §. 384 der **Darstellenden Geometrie** gegebenen Methode anwenden, die im folgenden §. kurz wiederholt werden soll.

§. 97.

Es sei P′p′ ein beliebiger Parallelkreis der Umdrehungsfläche und C′p′ die Tangente an der Meridiancurve, welche diesem Parallelkreis entspricht. Diese Tangente beschreibt bei ihrer Umdrehung mit der Meridiancurve einen senkrechten Kegel, an welchen man zwei auf den Lichtstrahlen parallele Berührnungsebenen legen muss. Zu diesem Zwecke bewege man diesen Kegel parallel mit sich selbst so lange fort, bis seine Spitze C′ in den Punkt O′ zu liegen kommt, durch welche der Lichtstrahl (OS, O′S′) gezogen ist; alsdann kann man die mit C′p′ parallel gezogene Gerade O′T′ als Erzeugende dieses Kegels betrachten und sein horizontaler Grundschnitt wird der mit OT beschriebene Kreis sein. Beschreibt man daher um OS als Durchmesser einen zweiten Kreis, so ergeben sich aus den Durchschnittspunkten dieser beiden Kreise die beiden Erzeugenden OJ und Oi, in welchen der Kegel von den beiden oben genannten Berührungsebenen berührt wird. Die Punkte M und m aber, in welchen jene Erzeugenden den Parallelkreis Pp schneiden, sind zwei Punkte der gesuchten Curve, deren Vertikalprojectionen M′ und m′ sich unmittelbar ergeben.

Man kann nun noch zwei andere Punkte ohne weitere Operationen finden, wenn man einen zweiten Parallelkreis Q′q′ so nimmt, dass die Tangente am Punkt Q′ der Meridiancurve der C′p′ parallel ist; denn aus der darstellenden Geometrie ist bekannt, dass man alsdann nur die Radien OJ und Oi bis zu ihren Durchschnittspunkten n und N mit dem Kreise Qq verlängern und hierauf letztere Punkte in n′ und N′ projiciren darf.

§. 98.

Die beiden auf dem Kehlkreise liegenden Punkte (D, D′) und (d, d′) findet man unmittelbar; denn weil die mit dem Lichtstrahl parallelen Berührungsebenen für die genannten Punkte vertikal stehen, so sind diese gegeben durch den auf OS senkrechten Durchmesser Dd. Aus einem ähnlichen Grunde erhält man die auf der Meridianlinie liegenden Punkte, wenn man an diese Curve die mit O′S′ parallelen Tangenten zieht.

§. 99.

Der **höchste Punkt** der Curve muss offenbar in der Vertikalebene OS liegen; man erhält ihn daher, wenn man an den durch diese Ebene erzeugten Meridianschnitt eine mit dem Lichtstrahl parallele Tangente zieht. Um diese Construction auszuführen, klappe man die Meridianebene OS auf die Vertikalebene auf und suche den Punkt a′, in welchem die Tangente dem aufgeklappten Strahl O′S″ parallel ist; hierauf projicire man a′ in a, führe a mittelst eines Kreisbogens in A zurük und projicire diesen letztern Punkt in A′ auf die

durch a' gezogenen Horizontale. Durch eine ähnliche Construction findet man auch den tiefsten Punkt (F, F'), und so erhält man endlich als Curve der Licht- und Schattengrenze:

(ABDMEFemdbA, A'B'D'M'E'F'e'm'd'b'A').

§. 100.

Man bemerke hier, dass diese Linie vier Punkte (B, B'), (b, b') (E, E'), (e, e') hat, in welchen die Lichtstrahlen Tangenten sind, nicht nur an der Einziehung, sondern auch an der Curve der Licht- und Schattengrenze, wie solches später, im §. 108, bewiesen wird, wo zugleich eine graphische Methode zu ihrer Bestimmung wird gegeben werden. Um aber keine zu lange Abschweifung zu machen, wird hier vorläufig nur auf die Existenz dieser einzelnen Punkte hingewiesen, welche sehr merkwürdig sind, besonders weil sie auf der von der Einziehung auf die Horizontalebene geworfenen Schlagschattencurve vier Wendepunkte erzeugen.

§. 101.

Um diese Schlagschattencurve $\alpha\beta\delta\varepsilon\varphi$... zu construiren, verlängere man die Lichtstrahlen, welche durch die verschiedenen Punkte der Licht- und Schattengrenze gehen, und suche ihre Durchschnitte mit der Horizontalebene. So erhält man aus dem Punkt (A, A') den Punkt α des Schlagschattens; der Punkt (B, B') liefert den Wendepunkt β; der Punkt (D, D') den Punkt δ; (E, E') gibt den Wendepunkt ε, u. s. w. Dieser Schatten wird zum Theil bedeckt durch die Schatten des Bandes und der Basis, welche nun construirt werden sollen.

§. 102.

Die Lichtstrahlen, welche über den obern Halbkreis (Lgl, L''g'') hinstreifen, erzeugen einen schiefen Cylinder, welcher die Horizontalebene in dem Halbkreis V''X''v'' schneidet, dessen Mittelpunkt ω man erhält, wenn man durch den Mittelpunkt (O, O'') einen Lichtstrahl zieht. Hierauf streift der Lichtstrahl über die Vertikalebene L'L'' hin, welche offenbar die Licht- und Schattengrenze auf dem Cylinder des Bandes ist, und erzeugt auf diese Art einen geradlinigen Schatten V'V'', der den vorhin genannten Kreis berührt. Im Punkte (L, L') angekommen, gleitet der Lichtstrahl an dem unteren Halbkreis (LGl, L'G') fort und erzeugt wieder einen schiefen Cylinder, der die Horizontalebene in dem Halbkreis V'X'v' schneidet, dessen Mittelpunkt der Punkt (S, S') ist.

Auf eine ähnliche Art findet man, dass der von dem Cylinder K'k'k''K'' auf die Horizontalebene geworfene Schlagschatten aus zwei Geraden UW und uw und einem Halbkreis WYw besteht, dessen Mittelpunkt gegeben ist, durch den Lichtstrahl, welcher vom Punkt (O, O''') ausgeht.

§. 103.

Taf. 6. Fig. 1. Man bemerke, dass der Halbkreis V'X'v' die Curve $\beta\delta\varepsilon$... im Punkte γ schneidet; hieraus geht hervor, dass der Lichtstrahl, welcher in diesem Punkte die Horizontalebene schneidet, zu gleicher Zeit den untern Kreis des Bandes und die Einfassung streift. Letztere berührt er in einem Punkte ϱ', welcher durch den Lichtstrahl $\gamma'\varrho'$ bestimmt wird, und es fällt nun von letzterer Lage des Lichtstrahles an der Schatten des Bandes auf die Einziehung selbst und erzeugt auf ihm eine Curve $\varrho'\lambda'\pi'$, welche auf folgende Art construirt wird.

Man schneide die Einziehung durch eine beliebige Horizontalebene Q'q'. Der hiedurch erzeugte Kreis

ist leicht auf der Horizontalebene zu zeichnen, weil man seinen Durchmesser Qq kennt. Jene Ebene Q'q' aber schneidet den schiefen Strahlencylinder des Bandes in einem Kreise, der dem des Bandes gleich, und dessen Mittelpunkt aus dem Durchschnitte der Geraden Q'q' und O'S' sich ergibt. Diese beiden Kreise nun liefern durch ihren Durchschnitt zwei Punkte der gesuchten Curve, welche man sofort auf Q'q' projiciren muss. Um die Figur nicht durch zu viele Linien zu verwirren, wurde diese Construction nicht wirklich ausgeführt; es wurde nur der dem Punkte ϱ' entsprechende Punkt π' angegeben, und der höchste Punkt der Curve auf folgende Art construirt.

§. 104.

Diesen höchsten Punkt liefert offenbar der Lichtstrahl, welcher vom Punkte (μ, μ') ausgeht, und die in der Vertikalebene $SO\mu$ liegende Meridiancurve schneidet. Man klappe daher diese Meridiankurve auf die vertikale Projectionsebene auf, ziehe durch den Punkt G' mit O'S'' eine Parallele $G'\lambda''$, und führe den Punkt λ'', in welchem letztere die Hauptmeridiancurve schneidet, durch eine Horizontale auf die Projection $\mu'\lambda'$ zurück, so erhält man λ' als den gesuchten höchsten Punkt.

Wollte man die fragliche Curve, welche der Durchschnitt einer Umdrehungsfläche mit einem schiefen kreisförmigen Cylinder ist, geometrisch vollenden, so würde man eine geschlossene Linie erhalten, deren Punkte alle nach §. 103 construirt werden könnten, und deren tiefster Punkt auf eben die Weise, wie der höchste, gefunden würde.

§. 105.

Da der Kreis WYw die Curve $\sigma\delta\varepsilon$ auch im Punkte ζ scheidet, so folgt hieraus, dass der Lichtstrahl, welcher die Horizontalebene in ζ trifft, die Basis des Fussgestelles in (Z, Z') streift, und zugleich die Einziehung n (ψ, ψ') berührt; mithin projicirt der Theil $(\psi ME, \psi' M'E')$ der Licht- und Schattengrenze auf der Einziehung seinen Schatten auf letztere Fläche selbst in einer Curve (EZ, E'Z'), von welcher man irgend einen Punkt auf folgende Art finden kann.

Man lege durch einen Punkt (M, M') eine Vertikalebene parallel mit dem Lichtstrahle, und construire die Curve, in welcher diese Ebene die Einziehung schneidet. Diess ist sehr leicht auszuführen, weil man nur die Punkte, in welchen der horizontale Grundschnitt dieser Ebene die verschiedenen Parallelkreise jener Umdrehungsfläche schneidet, auf die Vertikalebene projiciren darf. Hierauf ziehe man durch den Punkt (M, M') einen Lichtstrahl, so schneidet dessen Vertikalprojection die gefundene Durchschnittscurve in einem Punkte, welcher der Curve (EZ, E'Z') angehört.

§. 106.

Diese Schattenlinie, welche die Einziehung auf sich selbst wirft, endigt genau im Punkte (E, E'), weil, wie später (§. 115) bewiesen werden wird, in diesem besondern Punkte eine Berührung z w e i t e n G r a d e s zwischen dem Lichtstrahle und der Einziehung stattfindet, woraus alsdann hervorgeht, dass drei Durchschnittspunkte der Geraden mit der Fläche in einem einzigen Punkte zusammenfallen. Dieser Fall aber muss offenbar da stattfinden, wo die Durchschnittslinie (EZ, EZ') sich mit der Berührungslinie (DMF, D'M'F') vereinigt. — Man findet auf ähnliche Weise noch einen andern Ast (ez, e'z'), welcher ebenfalls ein von der Einziehung auf sich selbst geworfener Schlagschatten ist.

§. 107.

Das Vorhergehende zeigt, dass der Bogen (EFe, E'F'e') der Licht- und Schattengrenze als Schattenlinie unnütz wird. Um sich dieses Resultat erklären zu können, bemerke man, dass die Lichtstrahlen, welche

die Einziehung streifen, von (B, B') an bis (E, E') Tangenten an der Aussenwand derselben sind, während vom Punkte (E, E') an bis (F, F') die Lichtstrahlen Tangenten sind an der inneren Wand der Einziehung, und nicht wirklich bis zu diesen Berührungspunkten gelangen können, weil sie von dem undurchdringlichen Körper des Fussgestells, den sie vor der Berührung treffen, zurückgehalten werden. Der Leser kann, um sich diesen Unterschied in der Lage recht deutlich zu machen, nach §. 5 noch mehrere Durchschnitte der Einziehungsfläche mit vertikalen und den Lichtstrahlen parallelen Ebenen construiren, deren Form wie in Fig. 4
Fig. 1 und 4. ausfallen wird. Alsdann wird er erkennen, dass zwischen den Punkten (B, B') und (E, E') der Lichtstrahl die Lage $SM\mu$ annimmt, in welcher er die Durchschnittscurve in M berührt, und sie erst nachher in μ schneidet; dass er aber zwischen (E, E') und (F, F') die Lage $S_3\mu_3M_3$ annimmt, in welcher er die Durchschnittscurve im Punkte μ_3 schneidet, bevor er sie im Punkte M_3 berührt. Zwischen den beiden angegebenen Lagen gibt es aber noch eine $S_2\varepsilon$, in welcher der Lichtstrahl den vertikalen Schnitt genau im Inflexionspunkte ε berührt, was zur Folge hat, dass in diesem Punkte die Durchschnittscurve (EZ, E'Z') sich an die Licht- und Schattengrenze anschliesst, wie in §. 106 gesagt wurde, und es wird keinem Zweifel mehr unterliegen können, dass diese Vereinigung im Punkte (E, E') stattfinden müsse, wenn erst im §. 113 bewiesen worden ist, dass in diesem Punkte eine Berührung zweiten Grades zwischen dem Lichtstrahle und der Einziehungsfläche sattfinde.

Eben so sieht man, dass die Lichtstrahlen, welche die Einziehungsfläche auf dem Bogen (BAb, B'A'b') berühren, Tangenten an der obern Wand sind, wie S_4M_4; dass sie aber nicht wirklich zur Berührung gelangen können, so lange die undurchsichtige Kreisebene Gg sie in R zurückhält. — Es ist wohl kaum nöthig zu bemerken, dass der Parallelismus der Lichtstrahlen in Fig. 4 nur desshalb geändert wurde, um nicht mehrere in der Form zwar ähnliche aber nicht identische Schnitte construiren zu müssen.

§. 108.

Im §. 100 wurde gesagt, dass die Licht- und Schattengrenze auf der Einziehungsfläche im Allgemeinen vier Punkte enthalte, in welchen die Lichtstrahlen Tangenten seien, nicht allein an jener Fläche, sondern auch an der Curve der Licht- und Schattengrenze. Um diess zu beweisen, werde die Aufgabe umgekehrt
Taf. 6. so gestellt: Es sei auf der Meridiancurve g'h'k' ein Punkt (M, M') gegeben; man soll die Richtung desjenigen
Fig. 5. durch diesen Punkt gehenden Lichtstrahles finden, der nicht nur an der Einziehungsfläche, sondern gleichzeitig auch an der auf ihr verzeichneten Licht- und Schattengrenze Tangente sei.

Aus den auf die Krümmung der Flächen (Darst. Geom. Abschn. 8) bezüglichen Lehrsätzen ist bekannt, dass bei allen Umdrehungsflächen die Normalschnitte der grössten und der kleinsten Krümmung folgende sind: 1) die Meridiancurve, als deren Krümmungshalbmesser für den Punkt M' hier M'G = R durch Construction gefunden wurde; 2) der senkrecht auf diese Meridianebene durch die Flächennormale GM'H gehende Schnitt, dessen Krümmungshalbmesser genau das Stück M'H = R' jener Normale ist. Ausserdem ist bekannt (Darst. Geom. §. 684), dass man ein windschiefes Hyperboloid Σ construiren kann, das mit der Einziehungsfläche um M' herum osculirt, wenn man die Ellipse, welche mit dem einen jener Normalschnitte in M' osculirt zur Hauptellipse, und die Hyperbel, welche mit dem andern Normalschnitte in demselben Punkt osculirt, zur Haupt-Hyperbel von Σ nimmt. Bezeichnet man daher durch 2c die in der Richtung der Normale M'G genommene Axe, und durch 2a und 2b die beiden andern Axen, so müssen ihre Längen so genommen werden, dass

$$\frac{a^2}{c} = R \text{ und } \frac{b^2}{c} = R'.$$

Weil aber c willkürlich bleibt, so nehme man c = a; alsd ann verwandelt die Kehlellipse sich in den Krümmungs-

oder Osculationskreis EM'F, der mit $M'G = R$ beschrieben ist, während die imaginaire Axe $b = \sqrt{a \cdot R'} = M'D$ wird, welche man also erhält, wenn man zwischen M'G und M'H die mittlere Proportionale sucht. Nur muss man sich letztere Axe M'D senkrecht aus dem Mittelpunkte G auf die Ebene des Kehlkreises errichtet denken. Somit ist das Hyperboloid Σ völlig bestimmt, und osculirt am Punkte (M, M') mit der Umdrehungsfläche der Einziehung.

§. 109.

Ferner: wenn ein Cylinder um irgend eine Fläche beschrieben ist, so ist bekannt (nach §. 743 der Darst. Geom.), dass die Tangente an einem Punkte der Berührungscurve, und die Erzeugende des Cylinders, welche durch diesen Punkt geht, zwei conjugirte Tangenten sind, welche die Eigenschaft haben, dass sie beziehungsweise parallel sind mit den beiden conjugirten Durchmessern des Schnittes, welchen man, parallel mit der Berührungsebene, in das Ellipsoid oder Hyperboloid gemacht hat, das an dem betrachteten Punkte mit der Fläche osculirt. In vorliegender Aufgabe sind also der die Einziehung in M' berührende Lichtstrahl und die Tangente der Licht- und Schattengrenze an diesem Punkte, für jede gegebene Richtung der Lichtstrahlen, beziehungsweise parallel mit den beiden conjugirten Durchmessern des hyperbolischen Schnittes, welchen man mittelst der auf dem Kehlkreise senkrechten Ebene EF in das Hyperboloid Σ gemacht hat. Da man nun eine solche Richtung für den Lichtstrahl sucht, dass er mit der Tangente an der Licht- und Schattengrenze zusammenfalle, so muss man ihn offenbar parallel mit einer der Asymptoten der vertikal auf EF projicirten Hyperbel nehmen. Denn es ist bekannt, dass zwei conjugirte Durchmesser einer solchen Curve, welche sich einander immermehr nähern, endlich mit derjenigen Asymptote zusammenfallen, welche die gemeinschaftliche Diagonale aller der Parallelogramme war, die von den verschiedenen Paaren conjugirter Durchmesser gebildet wurden. *)

§. 110.

Diese Construction wird auf folgende Art ausgeführt. Da die Halbaxen der auf EF projicirten Hyperbel gleich GF und M'D sind, so denke man sich in der Berührungsebene an M' ein rechtwinkliges Dreieck, das $M'K' = GF$ zur Grundlinie habe, und dessen zweite Kathete in K' senkrecht auf der Vertikalebene stehe, und gleich M'D sei; alsdann wird die Hypotenuse dieses Dreiecks der Asymptote parallel sein. Um nun die Horizontalprojection dieses Dreiecks zu erhalten, projicire man den Punkt K' in J und mache $JK = M'D$; alsdann ist MK die horizontale und M'K' die vertikale Projection eines Lichtstrahls, welcher die doppelte Bedingung erfüllt, Tangente an der Einziehung und Tangente an der Licht- und Schattengrenze in dem gegebenen Punkte (M, M') zu sein.

§. 111.

Man bemerke hier, dass der Lichtstrahl (MK, M'K') ganz auf dem Osculations-Hyperboloid liegt, indem er offenbar mit einer Erzeugenden dieser windschiefen Fläche zusammenfällt; mithin findet zwischen diesem Lichtstrahle und der Einziehungsfläche eine Berührung zweiten Grades statt, worauf später wird zurückgewiesen werden.

*) Man sieht hieraus, dass der besondere Punkt, der hier gesucht wird, nie auf einer convexen Fläche sich finden kann. Denn für eine solche ist die Osculationsfläche zweiten Grades Σ nothwendig ein Ellipsoid, in welchem alle Schnitte Ellipsen sind; in einer derartigen Curve aber können nie zwei conjugirte Durchmesser zusammenfallen.

§. 112.

Taf. 6. Fig. 5. Nun werde die Aufgabe wieder in ihrem ursprünglichen Sinne genommen: Es sei die Richtung (OS,O′S′) eines Systems paralleler Lichtstrahlen gegeben; man soll den Punkt auf der Umdrehungsfläche finden, in welchem der Lichtstrahl Tangente ist, sowohl an der Fläche selbst, als auch an der Curve der Licht- und Schattengrenze.

Man nehme auf der Hauptmeridiancurve ghk verschiedene Punkte M′, P′, Q′..., und construire für dieselben, nach der oben angegebenen Weise, die Lichtstrahlen (MK, M′K′), (PR, P′R′), (QT, Q′T′).... welche die geforderte doppelte Bedingung erfüllen. Hierauf ziehe man mit ihnen durch den Punkt (O, O′) Parallelen, welche einen Kegel bilden, dessen horizontaler Grundschnitt eine Curve rkt ist, welche leicht construirt werden kann; alsdann drehe man den durch die Aufgabe bestimmten Lichtstrahl (OS, O′S′) um die Vertikale (O, O′Z′), so entsteht ein zweiter Kegel, dessen horizontaler Grundschnitt der mit OS beschriebene Kreis ist. Dieser letztere Kreis nun schneidet den Grundschnitt des ersten Kegels in v; daraus aber folgt, dass die Gerade (Ov, O′v′) eine den beiden Kegeln gemeinschaftliche Erzeugende ist. Zieht man daher die Tangente N′V′ parallel mit O′v′, hierauf NV parallel mit Ov, so erhält man den Lichtstrahl (NV, N′V′), welcher für den Punkt (N, N′) die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft hat, und welcher überdiess mit der Vertikalen denselben Winkel bildet, wie der ursprüngliche Strahl (OS, O′S′). Nun drehe man noch diesen Lichtstrahl (NV, N′V′) um die vertikale Axe O, bis er mit (OS,O′S′) parallel wird; hiebei wird der Berührungspunkt (N, N′) in eine Lage (B, B′) kommen, für welche Winkel BOi = VNJ ist, und es ist nun der mit (OS, O′S′) parallele Lichtstrahl (BW, B′W′) der gesuchte, welcher die doppelte Eigenschaft hat, an der Einziehungsfläche und an der Licht- und Schattengrenze im Punkte (B, B′) Tangente zu sein.

Mittelst der zweiten Asymptote, welche oben nicht angewendet wurde, findet man einen zweiten Punkt (b, b′), welcher die nämliche Eigenschaft hat, den man aber auch unmittelbar aus dem ersten ableiten kann, wenn man, senkrecht auf die Meridianebene OS, die Sehne Bb zieht. Wendet man nun ferner auf die Meridiancurve ghk, nachdem sie eine halbe Umdrehung gemacht hat, ähnliche Constructionen an, so findet man noch zwei andere analoge Punkte, und zwar die nämlichen, welche in Fig. 1 durch (E, E′) und (e, e′) bezeichnet worden sind.

§. 113.

In diesen vier Punkten nun findet, aus den in §. 111 angegebenen Gründen, eine Berührung zweiten Grades zwischen dem Lichtstrahle und der Umdrehungsfläche der Einziehung statt, womit also die in §. 106 und 107 ausgesprochenen Behauptungen bewiesen sind.

§. 114.

Taf. 6. Fig. 1. Die besonderen Punkte (B, B′), (E, E′)... erzeugen nothwendig vier Wendepunkte $\beta, \varepsilon, \ldots$ in der Curve $\alpha\beta\delta$.., welche der horizontale Grundschnitt des um die Einziehung beschriebenen Strahlencylinders ist. Denn die Osculationsebene der Licht- und Schattengrenze, für den Punkt (B, B′) z. B., ist offenbar Berührungsebene an dem Strahlencylinder, weil sie zwei auf einander folgende Tangenten dieser Curve enthält, deren eine genau die Erzeugende (Bβ, B′β′) des fraglichen Cylinders ist. Es muss mithin auch der horizontale Grundschnitt $\beta\delta$ dieser Osculationsebene Tangente an der Curve $\alpha\beta\delta$... sein. Aber bei einer windschiefen Curve durchschneidet die Osculationsebene die Curve (Darst. Geom. §. 653), indem sie den Bogen BA auf ihrer einen und den Bogen BC auf ihrer andern Seite lässt; mithin muss der Grundschnitt $\beta\theta$ der Krümmungsebene zwischen den Bögen $\alpha\beta$ und $\beta\delta$ durchgehen, welche übrigens auf einerlei

Seite der Vertikalebene $B\theta$ liegen; es findet also im Punkte θ nicht sowohl eine Inflexion als eine Wendung erster Art statt.

§. 115.

Um diese Krümmungs- oder Osculationsebene zu finden, bemerke man, dass sie mit der Berührungsebene der Einziehung im Punkte (B, B') zusammen fallen muss, weil diese Krümmungsebene, wie oben gesagt worden, Berührungsebene an dem um die Einziehung beschriebenen Strahlencylinder ist. Man construire daher, nach der bekannten Methode, die Berührungsebene dieser Umdrehungsfläche für den Punkt (B, B'), so ist der horizontale Grundschnitt dieser Ebene die gesuchte Tangente $\theta\theta$.

Schatten eines Säulen-Kapitäls.

§. 116.

Das Profil dieses Kapitäls ist auf einer Vertikalebene verzeichnet, welche durch die Axe der Säule geht, und eben diese Ebene dient auch zur Aufnahme derjenigen Projection, welche man in der Architektur den Aufriss nennt. Die Horizontalprojection (der Grundriss), welche, zu Vermeidung allzuvieler punktirter oder unsichtbarer Linien, als von unten nach oben gesehen angenommen wird, stellt hier nur die vordere Hälfte des Gegenstandes dar; das Fehlende ist leicht zu ergänzen. Die einzelnen Theile des Kapitäls sind folgende: Taf. 8.

Das rechtwinklige Plättchen A'A'', welches aus vier vertikalen Seitenflächen besteht, die einem, horizontal auf das vierfache Quadrat XAYO projicirten Parallelepiped angehören.

Die Kehlleiste B'C', welche von vier horizontalen, beziehungsweise mit AX und AY parallelen Cylindern begrenzt wird, deren jeder als senkrechten Schnitt eine mit B'C' identische Curve hat; woraus folgt, dass diese Cylinder sich zu zweien in ebenen Curven schneiden, welche in Geraden unter 45°, wie z. B. BC, sich projiciren.

Die Deckplatte D'D'', von vier vertikalen Rechtecken gebildet, welche die Seitenflächen eines, horizontal auf das vierfache Quadrat xDyO projicirten Parallelepipeds sind. Die nun folgenden Gesimstheile, werden von Umdrehungsflächen begrenzt, welche sich also horizontal in concentrischen Kreisen projiciren.

Der Viertelsstab E'F', welcher durch Umdrehung des Viertelskreises E'F' um die Axe O'Z' erzeugt wurde.

Der cylindrische Reif, durch Umdrehung der Geraden F'F'' um die nämliche Axe erzeugt.

Die Hohlkehle, welche zur Meridiancurve den Viertelskreis F''G' hat, dessen Convexität der Axe zugekehrt ist, so dass sie einen Theil der innern Fläche eines Wulstes bildet.

Der Hals, ein von der Vertikalen H'H'' beschriebener Umdrehungscylinder.

Endlich das Stäbchen, Astragal, welches das Kapitäl eigentlich mit dem Säulenschafte verbindet, und aus einem kleinen Wulst oder Pfühl, einem cylindrischen Riemen und einer Hohlkehle, Ablauf genannt, besteht.

Der Säulenschaft hat gewöhnlich eine conische Form, indem es gebräuchlich ist, den obern Halbmesser der Säule um ein Sechstheil kleiner als den untern zu nehmen, so dass, wenn der Modul oder untere Halbmesser in 24 gleiche Theile getheilt worden, nur 20 derselben auf den obern kommen, wie es auch in der Figur angezeigt ist. Da aber der hier betrachtete Theil des Schaftes nur klein ist, so kann er ohne Fehler als cylindrisch angenommen werden.

§. 117.

Alle diese Gegenstände werden von Lichtstrahlen erleuchtet, welche mit der Richtung (OS, O″S′) parallel sind. Es wird aber oft nöthig sein, die vertikale Hilfsebene OY anzuwenden, daher denn die Projection des Lichtstrahles auch auf dieser Ebene construirt werden muss. Man klappe zu diesem Ende die Ebene OY auf die Hauptvertikalebene OX auf; hierauf fälle man von einem beliebigen Punkte (S, S′) des Strahles die Senkrechte (SY, S′z′), so wird der Fusspunkt Y dieser Senkrechten sich in X aufklappen, welcher letztere Punkt sofort in S″ auf die Horizontale S′z′ projicirt werden muss; alsdann erhält man O′S″ als Aufklappung der gesuchten Hilfsprojection.

§. 118.

Taf. 7. Fig. 1. Schatten der Kehlleiste. Um der genauern Untersuchung willen wurde dieser Theil des Kapitäls auf Taf. 7 in vergrössertem Massstabe dargestellt. Fig. 1 zeigt die Zusammensetzung des Kehlleistenprofils aus zwei Kreisbögen, welche im Punkte J der Geraden BC sich an einander anschliessen. Gewöhnlich nimmt man den Punkt J ein wenig unterhalb der Mitte von BC. Nachdem man auf der Mitte von BJ die Senkrechte KO errichtet hat, darf man nur noch die Gerade OJO′ ziehen, um die Mittelpunkte O und O′ der beiden gesuchten Kreise zu erhalten.

§. 119.

Taf. 7. Fig. 2. In Fig. 2 ist die Projection O′S′ des gegebenen Lichtstrahls auf der Hauptvertikalebene, so wie die Aufklappung O′S″ der auf der Vertikalebene OY (Taf. 8) verzeichneten Hilfsprojection angegeben worden. Zieht man nun die Gerade AE″ parallel mit O′S″, so stellt dieselbe die Aufklappung des Hilfsgrundschnittes einer Ebene dar, welche parallel ist mit dem Lichtstrahle und durch die untere Kante des rechtwinkligen Plättchens geht. Diese Ebene kann den Cylinder der Kehlleiste nur in einer seiner Erzeugenden schneiden, und da ferner das durch die Hilfsebene OY erzeugte Profil der Kehlleiste bei seiner Aufklappung auf die Curve BGC fallen würde, so folgt, dass der Punkt E″ derjenige ist, durch welchen man die Horizontale E″F ziehen muss, um den Schlagschatten zu erhalten, den das Plättchen auf die Kehlleiste wirft. Da aber der Lichtstrahl, welcher vom Punkte A ausgeht, sich vertikal auf die mit O′S′ parallele Gerade AE′ projicirt, so muss folglich der vorhin construirte Schatten im Punkte E′ enden.

Ergänzt wird der Umriss des Schattens durch die Gerade E′e, welche durch die Lichtstrahlen entsteht, die über die vertikal in A projicirte Seitenkante des Plättchens hinstreifen; denn diese Strahlen erzeugen eine auf der Vertikalebene senkrecht stehende Ebene, welche die Kehlleiste in einer Curve schneidet, die sich in dem Grundschnitte AE′ jener Ebene projicirt. Es wirft also hier ein Theil der Seitenfläche des Plättchens seinen Schatten auf die vordere Fläche der Kehlleiste, weil in Tafel 8 der Lichtstrahl OS einen kleinern Winkel mit OX macht, als mit OY. Fände das Gegentheil statt, so würde der Schatten E′e nicht mehr auf die Vorderfläche der Kehlleiste fallen; dagegen würde jetzt auf der hier nicht sichtbaren Seitenfläche ein ähnlicher Umstand eintreten.

§. 120.

Die Licht- und Schattengrenze GJ auf der Kehlleiste erhält man mittelst einer an diesen Cylinder parallel mit dem Lichtstrahle gelegten Berührungsebene. Dieser Cylinder aber und seine Berührungsebene werden von der Hilfsebene OY auf Taf. 8 in einer Curve und einer Tangente geschnitten, welche, nach der Aufklappung, offenbar mit dem Profil BGC und der mit O′S″ parallelen Tangente GT″ zusammenfallen werden;

zieht man daher letztere Tangente, so erhält man den Punkt G, durch welche die Gerade GJ gezogen werden muss.

Da ferner diese Tangente die nämliche Curve im Punkte T″ schneidet, so schneidet also die längs GJ gelegte Berührungsebene den Cylinder in der Erzeugenden T″L, welche also der Schlagschatten ist, den die Kehlleiste auf sich selbst wirft; dieser Schatten muss aber im Punkte T′ endigen, weil der vom letzten Punkte G der Erzeugenden GJ ausgehende Lichtstrahl zur eigentlichen Projection die mit O′S′ parallele Gerade GT′ hat.

§. 121.

Von der Lage GT′ an streifen die Lichtstrahlen über die vorspingende auf BGC projicirte Curve weg, welche aus dem Durchschnitte der Vorder- und Seitenfläche der Kehlleiste entstanden ist, und erzeugen auf letzterer eine Curve T′R′P′, welche auf folgende Art construirt wird. Durch irgend einen Punkt M zieht man einen Lichtstrahl, dessen Vertikalprojection die mit O′S′ parallele MR′ ist, während seine Projection auf der Hilfsebene OY sich in der mit O′S″ parallelen MR″ aufklappen wird; da nun der Cylinder der Kehlleiste sich auf dieser Hilfsebene OY in einer Curve projicirt, deren Aufklappung mit BGC zusammenfällt, so erhält man also aus dem Durchschnittspunkte R″ die Erzeugende R″R′, in welcher der betrachtete Lichtstrahl die Kehlleiste schneidet; mithin ist R′ ein Punkt der gesuchten Schattencurve. So fährt man fort bis H, wo die Vertikalprojection HP′ des Lichtstrahls Tangente an der Curve BGC ist, und der Lichtstrahl die Kehlleiste in dem durch die Hilfsprojection HP″ bestimmten Punkte P′ trifft.

§. 122.

Ist aber der Lichtstrahl in HP′ angekommen, so befindet er sich offenbar in der Ebene, welche den Seitencylinder der Kehlleiste in der im Punkte H projicirten Erzeugenden berührt. Von hier an streift er längs dieser Erzeugenden hin und erzeugt eine Schattenebene, welche, da sie senkrecht auf der Vertikalebene steht, die Kehlleiste in einer auf die Gerade P′V projicirten Curve schneidet. Letztere Linie entsteht also dadurch, dass die Erzeugende H, welche die Lichtgrenze auf der Seitenfläche der Kehlleiste ist, einen Theil ihres Schattens auf die vordere Fläche wirft, und zwar aus dem schon in §. 119 angeführten Grunde. Was den Rest des von dieser Erzeugenden geworfenen Schattens betrifft, so fällt er auf die Seitenfläche längs der in V projicirten Geraden. Hier aber kann von diesem Schatten keine Rede sein.

§. 123.

Aus ähnlichen Betrachtungen wie in §. 119 geht hervor, dass der Schatten, den die untere Kante Cm der Kehlleiste auf die Deckplatte wirft, sich bis zu der Horizontalen N″Q erstreckt, welche durch den aufgeklappten Hilfsstrahl CN″ bestimmt wird; dieser Schatten aber wird links durch den ursprünglichen Strahl CN′ begrenzt.

§. 124.

Schatten auf der Deckplatte. Die Lichtstrahlen, welche die untere Kante (Dy, D″y′) streifen, bilden eine Ebene, deren Durchschnitt mit dem Viertelsstabe und mit den unterhalb desselben befindlichen Gesimstheilen gefunden werden muss. Diese Ebene nun steht offenbar senkrecht auf der Hilfsebene OY, auf welcher die Kante der Deckplatte in einem einzigen Punkte (y, y′) projicirt ist; lässt man nun das Ganze eine Viertelsumdrehung um die Axe der Säule machen, so klappt der Punkt (y, y′) sich offenbar in (x, D″) auf, und die Taf. 8.

Schattenebene projicirt sich auf der Vertikalebene OX in der mit O'S'' parallelen Geraden D''s''. In dieser Lage schneidet die Ebene D''s'' einen beliebig auf dem Viertelsstabe genommenen Parallelkreis K'O'' in einer Sehne, welche sich vertikal im Punkte L' und horizontal in plq projicirt, so dass die Punkte p und q diejenigen sind, in welchen die Peripherie dieses Parallelkreises von der aufgeklappten Schattenebene geschnitten wird. Führt man durch eine abermalige Viertelsumdrehung das Ganze wieder in seine erste Lage zurück, so wird hiebei die Sehne plq ihre Entfernung von der Axe nicht ändern, und PLQ werden; folglich sind die Punkte P und Q, welche sich vertikal in P' und Q' auf den Parallelkreis K'O'' projiciren, zwei Punkte der Schattencurve P'R'Q'N' auf dem Viertelsstabe. Verfährt man eben so in Beziehung auf andere Parallelkreise, so kann man so viel Punkte der Schattencurve erhalten, als man nur immer will. Uebrigens merke man sich folgende praktische Regel: Für jeden Parallelkreis projicire man den Durchschnittspunkt L' auf l, ziehe die Kreisordinate lp und trage diese von O'' bis P' und von O'' bis Q', was ein sehr einfaches Verfahren ist.

§. 125.

Der höchste Punkt dieser Curve, d. h. derjenige, in welchem die Tangente horizontal ist, muss in der Vertikalebene OY liegen, und man erhält ihn nach der allgemeinen Methode, wenn man den Punkt R, in welchem die Haupt-Meridiancurve von der aufgeklappten Schattenebene D''s'' geschnitten wird, auf R' bezieht. Ergänzte man die kreisförmige Meridianlinie E'F', so würde sie von dem Grundschnitt D''s'' noch ein zweites Mal geschnitten, und man erhielte auf ähnliche Weise einen zweiten auf O'Z' projicirten Punkt, in welchem die Tangente ebenfalls horizontal wäre; diese Construction wurde jedoch hier weggelassen, weil sie sich auf die innere Fläche des Wulstes bezöge, an welcher der Viertelsstab keinen Theil hat.

§. 126.

Die nämliche Schattenebene, welche durch die untere Kante der Deckplatte (Dy, D''y') geht, schneidet den cylindrischen Reif F'F'' in einem Ellipsenstück N'θ', welches nach der im §. 124 angewendeten Methode construirt wird, und zwar noch einfacher, weil bei diesem Cylinder alle Parallelkreise dem mit dem Halbmesser OF beschriebenen Kreise gleich sind. Den Scheitel dieser Ellipse, welcher auf O'Z' zu projiciren wäre, fände man durch Verlängerung der Vertikalen F'F'' bis zu ihrem Durchschnitte mit dem Grundschnitte D''s''.

§. 127.

Die nämliche Schattenebene schneidet auch die Hohlkehle in einer Curve $\theta'\pi'$ und den Hals in einer Ellipse λ's', welche beide nach der Methode des §. 124 construirt werden. Die Ellipse muss im Punkte (s, s') endigen, wo der Hals von dem Lichtstrahle (Ds, D''s'), der die Kante der Knaufplatte bestreift, getroffen wird.

§. 128.

Taf. 8. Schattengrenze auf dem Viertelsstabe. Da diese Curve die Berührungslinie ist zwischen der durch die Umdrehung von E'F' erzeugten Fläche und dem um sie beschriebenen, den Lichtstrahlen parallelen Cylinder, so kann man sie nach der im §. 384 der Darstellenden Geometrie erläuterten Methode construiren, welche hier kurz noch einmal wiederholt werden soll. Man wähle beliebig einen Parallelkreis K'O'' und ziehe an die Meridiancurve die ihm entsprechende Tangente K'T', so wird diese durch ihre Umdrehung um die Säulenaxe einen Kegel beschreiben, welcher den Viertelsstab längs des Parallelkreises K''O'' berührt.

Um nun an diesen Kegel eine mit den Lichtstrahlen parallele Berührungsebene legen zu können, bewege man ihn parallel mit sich selbst fort, bis seine Spitze in den Punkt (O, O′) gelangt, und seine Erzeugende nun die mit K′T′ parallele Gerade O′t ist; seine in der Horizontalebene S′z′ liegende Basis ist alsdann der mit dem Halbmesser Ot beschriebene Kreis. An diesen muss aus (S, S′) eine Tangente gezogen werden: man beschreibe daher über OS als Durchmesser eine Kreislinie, so ist der Punkt m, in welchem letztere den Kreis Ot schneidet, der Berührungspunkt, und mithin Om die Horizontalprojection der Erzeugenden des Kegels, welche der Berührungsebene entspricht. Verlängert man daher den Halbmesser Om, bis er den Parallelkreis OK in einem Punkt M schneidet und projicirt letzteren auf K′O″ in M′, so erhält man (M, M′) als einen Punkt der gesuchten Curve. Wäre der Wulst, von welchem der Viertelsstab einen Theil ausmacht, vollständig, so erhielte man die geschlossene Curve

$$(\alpha\beta M\gamma\ldots,\ \alpha'\beta'M'\gamma'\alpha''\theta''\gamma'').$$

Durch Anwendung der hier angegebenen Methode auf andere Parallelkreise kann man sich so viele Punkte der Curve verschaffen, als man nur immer will; einige derselben aber erhält man direct durch folgende leichte Constructionen.

§. 129.

Den auf dem Aequator liegenden Punkt (γ, γ') erhält man, indem man den Durchmesser $O\gamma$ senkrecht auf OS errichtet, und hierauf γ in γ' projicirt. Denn in diesem Punkte muss die Berührungsebene, welche hier vertikal ist, den Lichtstrahlen parallel sein, was das unterscheidende Merkmal aller zur Licht- und Schattengrenze gehörigen Punkte ist.

Zieht man ferner an die Meridiancurve E′F′ eine mit der Vertikalprojection O′S′ parallele Tangente, so wird auch der Berührungspunkt α', dessen Horizontalprojection α ist, ein Punkt der gesuchten Curve sein; denn in diesem Punkte muss die Berührungsebene am Viertelsstabe, welche hier senkrecht auf der Vertikalebene steht, ebenfalls mit den Lichtstrahlen parallel sein.

§. 130.

Der tiefste Punkt (β, β') der Lichtgrenze, d. h. derjenige, an welchem die Tangente horizontal ist, muss in der Vertikalebene OS liegen, da aus der Construction des §. 128 erhellt, dass für jeden Parallelkreis zwei Punkte gefunden werden können, welche auf einer, durch die Ebene OS rechtwinklig halbirten Sehne liegen. Man darf daher nur an die in der Vertikalebene OS enthaltene Meridiancurve eine mit den Lichtstrahlen parallele Tangente ziehen. Zu diesem Zwecke klappe man sie auf die Vertikalebene OX auf, und bemerke, dass zu gleicher Zeit ein Punkt (σ, σ') des Lichtstrahls in σ'' zu liegen kommt, so dass also $O'\sigma''$ die Aufklappung des Lichtstrahles ist. Nun ziehe man an die Meridiancurve E′F′ eine mit $O'\sigma''$ parallele Tangente, und führe hierauf Alles wieder in die Meridianebene OS zurück, so erhält man (β, β') als den gesuchten Punkt.

§. 131.

Man bemerke, dass diese Curve $\alpha'\beta'M'\gamma'$ die Curve P′R′Q′N′ in zwei Punkten schneidet, in welchen der Lichtstrahl Tangente an letzterer ist. Denn die Tangente am Punkt n′ ist der Durchschnitt der den Lichtstrahlen parallelen Ebene der Curve P′R′Q′, mit der Berührungsebene am Viertelsstabe, welche, für jeden Punkt der Curve $\alpha'\beta'M'$, ebenfalls mit den Lichtstrahlen parallel ist; mithin muss auch der Durchschnitt dieser beiden Ebenen derselben Richtung parallel sein.

Der Lichtstrahl n′n″ muss ferner auch die Curve N′θ′ treffen, und zwar in einem Punkte, welcher der von dem Viertelsstabe auf den Reif geworfenen Schattencurve angehört; mithin muss dieser Punkt n″ auf der Curve φ′ε′n″.. liegen, von welcher später die Rede sein wird.

§. 132.

Ehe die Construction der übrigen Schattenlinien vorgenommen wird, soll hier noch eine andere Methode angeführt werden, welche zwar in Beziehung auf die schon gefundenen Curven P′R′Q′N′, N′θ′, θ′π′, λ′ς′, α′β′M′ weniger genaue Resultate liefern würde, als die bereits angewendeten Constructionen, welche daher für die genannten Curven beizubehalten sind; aber für die noch übrigen Schattenlinien, welche in ihrer Vertikalprojection sehr flach ausfallen werden, ist die Methode, von der jetzt die Rede sein wird, als weniger umständlich und hinreichend genau zu empfehlen.

§. 133.

Methode der vertikalen Schnitte. Eine mit den Lichtstrahlen parallel gelegte Vertikalebene dh schneidet die Deckplatte in der Vertikalen d′d″ und den Viertelsstab in einer Curve e′k′f′, welche man erhält, wenn man die Punkte e, k, f, in welchen der Grundschnitt dh die verschiedenen Parallelkreise der Umdrehungsfläche schneidet, auf die Vertikalebene projicirt. Dieselbe Ebene dh schneidet den Reif in der Vertikalen f′f″ und die Hohlkehle in einer Curve f″g′, welche eben so construirt wird, wie die Curve auf dem Viertelsstabe. Endlich schneidet die Ebene dh noch den Hals in der Vertikalen h′h″ und die verschiedenen Gesimse des Stäbchens in ähnlichen Linien.

§. 134.

Die Anwendung nun, welche man von einem solchen Schnitte macht, ist folgende. Zieht man durch den Punkt d″ eine Gerade d″r′ parallel mit O′S′, so schneidet sie die Curve e′k′f′ in einem Punkte r′, welcher offenbar der von der Deckplatte auf den Viertelsstab geworfenen Schlagschattencurve, d. h. der bereits gefundenen Curve P′R′Q′ angehört.

Zieht man an die Curve e′k′f′ eine mit den Lichtstrahlen parallele Tangente und bezeichnet annäherungsweise den Berührungspunkt a′, so gehört dieser der Lichtgrenze α′β′M′ auf dem Viertelsstabe an. Verlängert man hierauf diese Tangente a′b′, bis sie die Vertikale f′f″ trifft, so gehört der Durchschnittspunkt b′ dem Schlagschatten an, den der Viertelsstab auf den Reif wirft, d. h. der Curve φ′ε′b′, von welcher später die Rede sein wird.

Zieht man ferner den Lichtstrahl f″c′, so schneidet er die Curve f″g′ in einem Punkte c′, welcher der Schlagschattenlinie φ″μ′c′ angehört, die von dem Reife auf die Hohlkehle geworfen wird. Der Lichtstrahl g′h‴ endlich schneidet die Vertikale h′h″ in einem Punkte h‴, welcher dem von der Hohlkehle auf den Hals geworfenen Schlagschatten angehört.

§. 135.

Schatten des Viertelsstabes auf dem Reife. Diese Curve φ′ε′n″ kann man im Allgemeinen dadurch erhalten, dass man Lichtstrahlen durch die verschiedenen Punkte der Curve α′β′M′γ′ zieht, und die Punkte sucht, wo die Horizontalprojectionen dieser Strahlen den mit OF beschriebenen Kreis schneiden; aber die Punkte n″ und b′ dieser Curve sind schon gefunden (§§. 131 und 134) und man darf daher nur noch die beiden Punkte ε′ und φ′ finden, was auf folgende Art geschehen kann. Den ersten, höchsten Punkt der

Curve findet man mittelst des Lichtstrahles, welcher vom tiefsten Punkt (θ, θ') der Lichtgrenze auf dem Viertelsstabe ausgeht; dieser schneidet den Kreis OF in ε, und man darf daher nur diesen Punkt ε auf $\theta'\varepsilon'$ projiciren. Um den Punkt φ' zu erhalten, ziehe man Fδ parallel mit OS, projicire den Punkt δ auf die Curve $\alpha'\theta'$M' und ziehe durch den Punkt δ' eine Parallele $\delta'\varphi'$ mit O'S', so schneidet diese die Vertikale F'F'' in dem gesuchten Punkte φ'

Diese Curve $\varphi'\varepsilon'$n''.. muss im Punkte v' enden, wo sie den untern Kreis des Reifes schneidet; da man aber diesen Punkt nicht unmittelbar finden kann, so setze man die Construction so fort, als ob der Cylinder des Reifes sich unbestimmt unter die Horizontale F'' herab erstrecke; alsdann wird die auf diese Art verlängerte Curve $\varphi'\varepsilon'$n''... den untern Kreis des Reifes in dem Punkte v' schneiden, wo sie als Schattenlinie enden muss.

§. 136.

Schatten des Reifes auf der Hohlkehle. Diese Curve $\varphi''\mu'$c'... ist der Durchschnitt einer durch den Kreisbogen F''G' beschriebenen Umdrehungsfläche mit dem schiefen Cylinder, welchen die den untern Kreis F'F'' streifenden Lichtstrahlen bilden, und kann daher im Allgemeinen gefunden werden, indem man diese beiden Flächen durch Horizontalebenen schneidet. Denn die auf solche Art mit der Hohlkehle erzeugten Schnitte sind Kreise von verschiedenen Halbmessern, deren Mittelpunkte in der Vertikalen (O, O'Z') liegen, während die Schnitte in dem schiefen Cylinder Kreise von constantem Halbmesser sind, deren Mittelpunkte sich in einer Geraden befinden, welche man, parallel mit dem Lichtstrahl, durch den Mittelpunkt der untern Basis des Reifes gezogen hat. Es wäre somit leicht, die Horizontalprojection der Durchschnittspunkte je zweier zu einem Schnitte gehöriger Kreise zu finden, und sie alsdann auf die Vertikalebene zu beziehen; da aber diese Schattencurve sich sehr langsam senkt, so ist es besser, hier die Methode der vertikalen Schnitte anzuwenden, um zwei oder drei Punkte dieser Curve zu finden, wie im §. 134 für den Punkt c' geschehen ist. Den höchsten Punkt μ' findet man direct und sehr einfach dadurch, dass man durch den Punkt F'' eine Parallele mit dem aufgeklappten Halbmesser O'σ'' zieht, wie es in §. 104 für das Fussgestelle geschah. Endlich muss man die Curve verlängern bis zu ihrem Durchschnittspunkte mit dem untern Kreise der Hohlkehle.

§. 137.

Nun aber ist zu untersuchen, ob diese Schattenlinie $\varphi''\mu'$c' . . . nicht theilweise verdeckt wird durch den Schatten des Viertelsstabes, welcher die Basis des Reifes im Punkte v' trifft. Man ziehe daher den Lichtstrahl v'v''; trifft er, wie es in vorliegender Figur geschieht, die Curve $\varphi''\mu'$c' ... in einem Punkte v', so ist diess ein Beweis, dass von letzterem Punkte an, die Hohlkehle eine neue, vom Viertelsstabe herrührende Schattenlinie empfängt. Diese neue Curve v''w'' construirt man durch Vertikalschnitte, welche man durch verschiedene Punkte ω'... der Lichtgrenze auf dem Viertelsstabe macht.

§. 138.

Schatten der Hohlkehle auf dem Halse. Diese Curve $\eta'\lambda'$h'''.... ist der Durchschnitt des senkrechten Cylinders H'H'' mit dem schiefen Cylinder der Strahlen, welche den untern Kreis der Hohlkehle streifen. Man construirt sie leicht, indem man durch verschiedene Punkte des Kreises OG Lichtstrahlen zieht, welche den Kreis OH in Punkte schneiden, die der gesuchten Curve angehören. Der höchste Punkt liegt in der Vertikalebene OS, und den Anfangspunkt η' der Curve erhält man mittelst des auf HJ projicirten Lichtstrahls.

§. 139.

Auch diese Curve $\eta'\lambda'h'''$... wird zum Theil von dem Schatten des Viertelsstabes bedeckt, welcher auf der Hohlkehle im Punkte w'' endigte; denn der durch letzteren Punkt gezogene Lichtstrahl trifft die Curve $\eta'\lambda'h'''$... in w'''. Der Hals erhält also von ω''' an eine neue vom Viertelsstabe herrührende Schattencurve $\omega'''V''$. Den letzten Punkt V'' dieser Curve erhält man mittelst der vertikalen Berührungsebene VU, welche man parallel mit dem Lichtstrahle an den Cylinder des Halses legt; zieht man hierauf durch den Punkt (U,U'), wo sie die Lichtgrenze trifft, den Lichtstrahl $U'V''$, so schneidet dieser die Vertikale V in dem gesuchten Punkte V''. Um einen zwischen w''' und V'' liegenden Punkt zu erhalten, ziehe man durch einen, beliebig zwischen w' und U' genommenen Punkt einen Lichtstrahl; alsdann schneidet die Horizontalprojection dieses Strahls den Kreis OH in dem gesuchten Punkte.

§. 140.

Der Lichtstrahl $(UV, U'V')$, welcher Tangente an dem Halse ist, trifft auf seinem Fortgange die ebene Fläche des Stäbchens in dem Punkte (ω, ω'); mithin fällt auch auf das Stäbchen ein Schlagschatten des Viertelsstabes. Zieht man nun durch einen benachbarten Punkt (u, u') einen Strahl $(u\psi, u'\psi')$, und construirt hierauf den Schnitt, welchen die durch diesen Strahl gelegte Vertikalebene $u\psi$ in den Wulst des Stäbchens macht, so ist der Punkt ψ', in welchem dieser Schnitt von der Vertikalprojection $u'\psi'$ getroffen wird, ein Punkt der Curve $(\omega'\psi', \omega\psi)$, in welcher der Viertelsstab seinen Schatten auf das Stäbchen projicirt.

§. 141.

Wenn auch der Lichtstrahl $(UV, U'V')$ den Wulst des Stäbchens nicht getroffen hätte, so hätte doch immer diese Fläche einen Schatten von dem Halse empfangen, und dieser Schatten hätte sich auf den Schnitt beschränkt, welchen die Vertikalebene UV, die den Hals in der Lichtgrenze $V'V''$ berührt, in diesen kleinen Wulst macht.

§. 142.

Es braucht keiner weiteren Erklärungen im Betreff des Wulstes, des cylindrischen Riemchens und des Ablaufes, aus welchen das Astragal besteht; diese Gesimse sind ganz dieselben wie die schon behandelten. Die Lichtgrenze auf dem Wulste wird ganz so construirt, wie die auf dem Viertelsstabe. Das Riemchen empfängt einen Schlagschatten von dem Wulste, welcher sich hier aber nicht bis zum Ablaufe und also auch nicht bis zum Säulenschafte erstreckt. Der Schatten, welchen das Riemchen auf die Hohlkehle unter ihm wirft, wird construirt wie in §. 136; dieser Schatten verlängert sich auch über den Säulenschaft hin, wo er nach der Methode des §. 138 construirt wird. Der letzte Punkt V''' dieser Curve endlich ist gegeben durch den Lichtstrahl $(Vx, V'''x')$, der in der Vertikalebene VU liegt, welche die Säule längs der Vertikalen VV''' berührt, und diese letztere Gerade bildet die Lichtgrenze auf der als cylindrisch betrachteten Säulenfläche.

Schatten eines Säulenfusses.

§. 143.

Taf. 7. Dieser Fuss besteht aus verschiedenen Theilen, welche alle von Umdrehungsflächen begrenzt werden,
Fig. 3. und welche ganz denen analog sind, die beim Kapitäl vorkamen; es wird also genügen, hier kurz die Natur

der verschiedenen Schattenlinien anzugeben, und den Leser wegen der Construction derselben auf die vorhergehenden §§. zu verweisen. Auf dem Säulenschafte, der, weil nur ein kleiner Theil von ihm angegeben ist, wieder als cylindrisch angenommen werden kann, wird die Lichtgrenze gebildet durch die Vertikale (A, A′A″), in welcher der Cylinder von der mit dem Lichtstrahle parallelen Ebene AB berührt wird. Diese Gerade wirft auf den Anlauf C′F′ einen Schatten A″a′B′, welcher nichts anderes ist, als der Schnitt, den die Vertikalebene AB in die Umdrehungsfläche C′F′ macht. Man construirt diese Schattencurve, indem man auf die Vertikalebene alle die Punkte B, a, ... projicirt, in welchen der Grundschnitt AB die verschiedenen Parallelkreise FB, Ja, ... der Anlaufsfläche schneidet.

§. 144.

Auf dem ersten cylindrischen Reife ist E′E″ die Lichtgrenze; diese wirft auf den Wulst unter ihr einen Schatten (E″e′, Ee), den man wie oben construiren kann, weil er der Durchschnitt dieser Umdrehungsfläche mit der Vertikalebene Ee ist, welche den Cylinder des Reifes berührt. Als Fortsetzung dieser Curve stellt sich eine andere (eh, e′h′) dar, welche von einem Theile E′H′ des obern Kreises des Reifes auf den Wulst projicirt wird; diese letztere Schattencurve ist also der Durchschnitt des Wulstes mit einem schiefen, kreisförmigen Cylinder, und könnte construirt werden, indem man diese beiden Flächen durch verschiedene Horizontalebenen schnitte, von denen jede zwei Kreise erzeugte, deren gemeinschaftliche Punkte der gesuchten Curve angehörten.

Aber es ist bequemer, hier die Methode der Schnitte in §§. 133 und 134 anzuwenden; man verlängert auf diese Art die Curve E″e′h′, bis sie die Lichtgrenze $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ schneidet, welche letztere Curve entweder ebenfalls durch die Methode der Schnitte oder genauer durch das in §. 128 u. s. w. angewendete Verfahren construirt werden kann. Auf der Horizontalebene wurde nur das Stück hγ dieser Lichtgrenze angegeben, weil das Uebrige auf dieser Projection unsichtbar ist.

§. 145.

Auf dem zweiten cylindrischen Reife ist die Linie R′K′L′ der Schlagschatten des vorigen Wulstes; man findet ihre verschiedenen Punkte durch die Methode der Schnitte, oder auch durch die in §. 135 für denselben Fall angewendeten Mittel. Ihr höchster Punkt (K, K′) wird bestimmt durch den von (β, β') ausgehenden Lichtstrahl. Man muss diese Curve verlängern, bis sie den untern Kreis in einem gewissen Punkte L′ schneidet, von welchem aus der Schatten des Wulstes auf die Einziehung F″G′φ' fällt.

§. 146.

Diese letztere Fläche erhält erstlich den Schatten U′V′l′ von dem untern Kreise des vorigen Reifes, ein Schatten, welcher aus dem Durchschnitte eines schiefen, kreisförmigen Cylinders mit der Umdrehungsfläche der Einziehung entsteht und durch Horizontalschnitte construirt werden kann. Da aber die Curve U′V′l′ sich sehr langsam senkt, so ist es besser, die Methode der Vertikalschnitte des §. 133 anzuwenden. Der höchste Punkt V′ ist gegeben durch den von (K, K″) ausgehenden Lichtstrahl. Diese Linie U′V′l′ muss im Punkte l′ endigen, wo sie den schon gefundenen Lichtstrahl L′l′ schneidet, welcher den Wulst in λ' berührt und zugleich den Reif im Punkte L′ streift; denn von hier an erhält die Einziehung den Schatten l′W′M′ von der Lichtgrenze $\lambda'\omega'\gamma'$. Dieser neue Schatten wird construirt durch vertikale mit OS parallel gemachte Schnitte, wie es hier für den Lichtstrahl ω'W′ angedeutet ist, und er verlängert sich, bis er den untern Kreis der Einziehung in Taf. 7. Fig. 3.

einem gewissen Punkte M′ schneidet. Die Horizontalprojection MWl dieser Schattenlinie ist nur sichtbar in dem kleinen Theile ausserhalb des Kreises Ot, welcher den sichtbaren Umriss des ersten Wulstes bildet.

§. 147.

Der dritte cylinderische Reif hat erstlich eine Lichtgrenze in der Geraden (P, P′P″); diese aber wirft, in Verbindung mit dem Theile (PM, P′M′) des oberen Kreises auf den zweiten Wulst einen Schatten (Ppm, P″p′m′), ganz analog dem auf dem ersten Wulste. Da aber hier die Curve P″p′m′ den Lichtstrahl γ′M′m′, der bereits als Tangente am ersten Wulste in γ bekannt ist, schneidet, ehe sie die Lichtgrenze $\varrho'\psi'\varepsilon'Q'$ erreicht hat, so folgt, dass an den Schatten P″p′m′, den der Reif auf den Wulst wirft, ein neuer (m′n′, mn) sich anschliesst, der von den Lichtstrahlen herrührt, welche den ersten Wulst längs des Bogens $\gamma'N'$ berühren und auf den untern Wulst fallen. Diese Schattencurve (m′n′, mn) wird ebenfalls mittelst vertikaler, parallel mit OS in beide Wulste gemachter Schnitte construirt und muss im Punkte (n, n′) endigen, wo sie die Lichtgrenze $\varrho'\psi'\varepsilon'Q'$ schneidet. Was diese letzte Curve betrifft, so construirt man sie auf die nämliche Art, wie für den ersten Wulst; auf der Horizontalebene ist nur der sichtbare Theil εQn angegeben.

§. 148.

Der Sockel endlich, welcher die Form eines quadratischen Parallelepipeds hat, empfängt auf seiner obern Fläche den Schatten (πq, π'q′) von der Curve (εQn, ε'Q′n′); er selbst projicirt auf die Horizontalebene geradlinige Schatten, welche leicht zu construiren sind.

Schatten einer Schraube mit dreieckigem Gewinde.

§. 149.

Taf. 9. Diese Schraube besteht aus einer cylindrischen, auf den Kreis Oa projicirten Spindel, und dem scharfen Gewinde, welches durch das gleichschenklige Dreieck a′A′a″ auf folgende Art erzeugt wurde. Die Spitze (A, A′) dieses Dreiecks durchläuft eine Schraubenlinie (ABCD..., A′B′C′D″A″D‴...), deren Ganghöhe A′A″ der Grundlinie a′a″ des erzeugenden Dreiecks gleich ist, während seine verlängerten Seiten A′O′ und A′O‴ die vertikale Axe O stets unter gleichen und constanten Winkeln schneiden. Hieraus folgt, dass die obere und untere Fläche des Gewindes Theile zweier windschiefen Schraubenflächen sind, welche sich in einer andern, innern Schraubenlinie (abd...., a″b′d″a‴...) schneiden, wie solches im fünften Kapitel des siebenten Abschnittes der Darstellenden Geometrie gezeigt wurde. Unter der Voraussetzung nun, dass alle dort erörterten Details dem Leser noch im Gedächtnisse sind, wird hier nur daran erinnert, dass der Umriss der Vertikalprojection des Gewindes von zwei Curven gebildet wird, welche die Erzeugenden O′A′, O″A′ zu Asymptoten haben, und sich an einen sehr kleinen Bogen der äusseren Schraubenlinie anschliessen; man kann aber ohne merklichen Fehler diese Curvenstücke als Gerade zeichnen, welche zu gleicher Zeit Tangenten an den beiden Schraubenlinien A′B′D″.. und a″b′d″... sind. Den Kopf der Schraube bildet ein senkrechtes Prisma, welches sich auf der Horizontalfläche als ein Achteck projicirt, das man als die obere Fläche der zu der Schraube gehörigen Schraubenmutter betrachten kann.

§. 150.

Die Lichtstrahlen werden parallel mit der Richtung (SO, S′E″) angenommen, und diejenigen derselben, welche die äussere Schraubenlinie streifen, bilden einen Cylinder, dessen horizontalen Grundschnitt

$$D\lambda\alpha k\gamma\delta\lambda\alpha_2\varepsilon\varphi\gamma\delta_2\ldots$$

man findet, wenn man die Punkte sucht, in welchen mehrere dieser Strahlen wie z. B. ($A\alpha$, $A'\alpha'$), ($D\delta$, $D'\delta'$)... die Horizontalebene schneiden. Diese Curve würde den Umriss des Schlagschattens bestimmen, welchen die Schraube auf die Horizontalebene wirft, wenn man denselben finden wollte; aber sie dient auch noch zu anderem Gebrauche.

§. 151.

Die Curve ($C'M'K'J'L'$, $CMKJL$) bestimmt den Schlagschatten, den die äussere Schraubenlinie auf die obere Fläche des Gewindes wirft; sie ist folglich der Durchschnitt des Strahlencylinders in §. 150 mit der windschiefen Fläche, welche durch die Gerade $A'a''O'$ erzeugt wurde. Um irgend einen Punkt (M, M') dieser Curve zu finden, construire man zuerst eine Erzeugende der windschiefen Fläche, indem man einen beliebigen Strahl OB zieht, den Punkt B in B' auf die äussere Schraubenlinie projicirt, hierauf von der Höhe des Punktes B' eine Distanz $3O''' =$ der constanten Höhe oO' auf die Axe trägt, und endlich die Gerade $O'''B'$ zieht. Nun lege man durch diese Erzeugende eine mit den Lichtstrahlen parallele Ebene, indem man die Gerade ($O'''\omega'$, $O\omega$) zieht. Da nun der Grundschnitt $\omega\theta$ dieser Ebene den Grundschnitt des Cylinders im Punkte φ schneidet, so folgt, dass die Ebene selbst den Cylinder im Lichtstrahle (φF, $\varphi' F''$) schneidet, welcher also die äussere Schraubenlinie im Punkte (F, F'') streift, und die Erzeugende (BO, $B'O'''$) in dem gesuchten Punkte (M, M') trifft.

§. 152.

Den Punkt (K, K') dieser Curve, welcher in der Vertikalebene SO liegt, erhält man direct aus dem Durchschnitte des Lichtstrahls und der Erzeugenden, welche beide in dieser Ebene liegen, und deren Vertikal-projectionen $E''K'$ und $E'e'$ man unmittelbar erhält, wenn man den Punkt E in E' und E'' und den Punkt e in e' projicirt.

Der äusserste Punkt (C, C') ist gegeben durch den Lichtstrahl, welcher den Punkt γ trifft, in welchem die beiden Aeste des horizontalen Grundschnittes des in §. 150 betrachteten Cylinders sich schneiden; denn dieser gemeinschaftliche Punkt γ entspricht einer Erzeugenden (γCG, $\gamma' C'G'$), welche die beiden Schraubengänge $A'D''$ und $A''D'''$ zugleich streifen muss. Ebenso bezeichnet der Punkt λ, in welchem die Grundschnittäste des nämlichen Cylinders sich abermals schneiden, einen Lichtstrahl ($Hl\lambda$, $H'l'\lambda'$), welcher ebenfalls zwei auf einander folgende Gänge der äussern Schraubenlinie streift und somit den andern Endpunkt der fraglichen Schattencurve liefert.

§. 153.

Alle diese Resultate wiederholen sich auf dieselbe Weise auf den verschiedenen auf einander folgenden Gängen des Gewindes und man erhält sie also dort einfach durch Vertikalen, die man durch die schon gefundenen Punkte C', M', K',... zieht. Auf denjenigen Gängen jedoch, welche in der Nähe des Kopfes der Schraube liegen, erscheinen neue Schattenlinien, welche die schon construirten ganz oder zum Theil bedecken könnten. So zeigt sich auf dem Gewinde $A'''a'''$ eine Schattencurve (np, $n'p'$), die von der horizontalen Kante (PN, $P'N'$) herrührt und aus dem Durchschnitte der durch diese Kante gehenden Schattenebene mit der windschiefen Fläche des Gewindes entsteht. Um diese Curve zu construiren, ziehe man, wie in §. 151, eine Erzeugende der windschiefen Fläche, und lege durch dieselbe eine mit dem Lichtstrahle parallele Ebene; alsdann ist es leicht, den Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der Horizontalen (PN, $P'N'$) zu finden, und zieht man nun durch diesen Punkt einen Lichtstrahl, so schneidet er die betrachtete Erzeugende in einem der gesuchten Taf. 9.

Curve (pn, p′n′) angehörigen Punkte. Auf eine ähnliche Art findet man den Schatten (pq, p′v′q′), den die Gerade (PQ, P′Q′), und den Schatten (qw, q′w′), den die Gerade (QR, Q′R′) projicirt. Die Grenzen dieser verschiedenen Curven kann man auf keine andere Art erhalten, als indem man jede derselben unbestimmt verlängert, bis sie die benachbarte Curve schneidet; den Punkt (w, w′) aber kann man direct finden, indem man den Durchschnitt der parallel mit den Lichtstrahlen durch die Gerade (QR, Q′R′) gelegten Ebene mit dem Grundschnitte $D\lambda\alpha k\gamma$.. des Cylinders sucht. Um aber diese Construction auszuführen, ist es gut, eine dem Kopfe der Schraube näher liegende Horizontalebene, z. B. die durch den Punkt a‴ gehende. anzuwenden.

§. 154.

Dieser letzte Strahl (Rw, R′w′), welcher die äussere Schraubenlinie nur streift, trifft bei seinem Fortgange auf das untere Gewinde, und diess zwar in dem Punkte (r, r′), wo er die schon gezeichnete Curve (J″M″C″, JMC) schneidet; der übrige Theil (RT, R′T′) der horizontalen Kante verursacht eine Schattenebene, welche die windschiefe Fläche in einer Curve (rt, r′t′) schneidet, die man wie in §. 153 construiren kann. Die horizontale Kante (TU, T′U′) endlich erzeugt eine Schattenlinie (tu, t′u′), welche auf ähnliche Art construirt wird. Es wird kaum nöthig sein, zu bemerken, dass diese beiden Curven, weil sie sich tiefer senken, als die Linie J″M″C″ einen Theil dieser letztern verdecken.

§. 155.

Man hatte es hier nur mit Schlagschatten und nicht mit einer eigentlichen Licht- und Schattengrenze zu thun, welche durch Strahlen gebildet würde, die Tangenten an der windschiefen Fläche des Schraubengewindes wären; denn die Richtung (SE, S′E′) macht mit der Axe der Schraube einen zu kleinen Winkel, als dass letzterer Umstand hätte eintreten können (s. §. 177). Da aber jener Fall zu sehr feinen und ziemlich schwierigen Untersuchungen Veranlassung gibt, so wird es von Nutzen sein, diese Aufgabe noch einmal vorzunehmen und zwar mit einer solchen Richtung der Lichtstrahlen, für welche jene Berührungslinien vorkommen müssen.

Anderer Fall der Schatten auf einer dreieckigen Schraube.

§. 156.

Taf. 10. Ohne die in den §§. 149 und 150 angegebenen Details zu wiederholen, werde hier blos bemerkt, dass das Parallelepiped mit quadratischer Basis, welches den Kopf der Schraube bildet, hier nach unten versetzt wurde, damit eine grössere Anzahl wichtiger Linien zum Vorscheine komme. Die obere Fläche dieses Parallelepipeds wurde als Horizontalebene der Figur angenommen und auf sie der Grundschnitt

$$AR\gamma\lambda\delta\mu\pi\alpha\varrho\gamma_2\delta\mu_2\alpha_2\ldots$$

des Cylinders gezeichnet, der von den Lichtstrahlen gebildet wird, welche die äussere Schraubenlinie (ABD..., A′B′D′A″D″..) bestreifen. Um nun die Lichtgrenze (MN, M′N′) auf der obern Fläche des Gewindes zu erhalten, welche durch die Bewegung der Geraden (AO, A′a′O′) erzeugt wurde, muss man diejenigen Punkte dieser windschiefen Fläche finden, für welche die Berührungsebenen parallel mit dem Lichtstrahle (SO, S′O‴) sind. Man suche z. B. den Punkt (x, x′) der Lichtgrenze, welcher auf einer beliebigen in OB projicirten Erzeugenden liegt. Die Vertikalprojection B′O‴ dieser Erzeugenden erhält man, indem man den Punkt B in B′ projicirt, und die Höhe h″O‴ gleich der constanten Distanz h′O′ nimmt. Hierauf ziehe man die Tangente

BT, mache sie gleich dem rectificirten Bogen BA und verbinde den Punkt T mit dem Grundschnitte (G, G′) der Erzeugenden, so ist (Darst. Geom. §. 609) die Gerade GT der horizontale Grundschnitt der Berührungsebene des Schraubengewindes am Punkte (B, B′).

§. 157.

Nun lege man ferner durch die Erzeugende (OB, O‴B′) eine mit den Lichtstrahlen parallele Ebene, deren Grundschnitt offenbar ωG ist. Diese Ebene muss bekanntlich die Schraubenfläche in einem gewissen, noch unbekannten Punkte x berühren; um aber diesen Punkt zu finden, darf man nur (Darst. Geom. §. 615) ωGE verlängern, bis sie die Tangente BT in E schneidet, hierauf Ee parallel mit OB, und durch den Durchschnittspunkt e mit TO die mit BE parallel ex ziehen. Auf diesem einfachen Wege erhält man einen Punkt x der gesuchten Horizontalprojection MxN; und projicirt man hierauf x in x′ auf B′O‴, so erhält man auch einen Punkt der Vertikalprojection M′x′N′. Da nun dieses Verfahren sich auf jede andere Erzeugende anwenden lässt, so genügt es, um so viele Punkte der Lichtgrenze zu construiren, als man nur immer will. Weil aber dieses Curvenstück sehr flach ist, so wäre es von grossem Vortheile, wenn man die auf der äussern und innern Schraubenlinie liegenden Endpunkte M und N direct finden könnte; denn diese Punkte reichen in der Anwendung gewöhnlich hin, um den nöthigen Theil der Lichtgrenze hinreichend genau ausführen zu können. Die beiden folgenden §§. werden daher von der Aufsuchung dieser Endpunkte M und N handeln.

§. 158.

Man bemerke zuerst, dass für alle Punkte der Schraubenlinie (ABD, A′B′D′) die verschiedenen Berührungsebenen der Schraubenfläche gegen die Axe der Schraube gleich geneigt sind. Denn die Erzeugende dieser Fläche und die Tangente an der Schraubenlinie machen unter sich und mit der durch den Berührungspunkt gezogenen Vertikalen drei Winkel, welche offenbar constant bleiben für die verschiedenen Punkte der betrachteten Schraubenlinie. Hieraus folgt, dass diese verschiedenen Berührungsebenen alle parallel sind mit denen, welche den Umdrehungskegel berühren würden, der seinen Scheitel in (O, O‴) hätte, und dessen Basis der Kreis wäre, den man mit der auf den Grundschnitt GHT gefällten Senkrechten OH beschreiben müsste (welcher Grundschnitt der für den Punkt (B, B′) bereits construirten Berührungsebene angehört). Ferner ist klar, dass der Winkel GOH, welcher von der Projection OB der in dieser Ebene enthaltenen Erzeugenden und der Projection OH ihrer Linie des grössten Falls, gebildet wird, ebenfalls unverändert bleibt, so lange der Berührungspunkt (B, B′) der Berührungsebene in derselben Schraubenlinie (ABD, A′B′D′) bleibt. Taf. 10.

§. 159.

Die Bestimmung des Punktes M läuft nun darauf hinaus, eine Ebene zu finden, welche dem Lichtstrahle parallel sei, und zugleich die Schraubenfläche an der Schraubenlinie (ABD, A′B′D′) berühre. Man lege daher an den im vorigen §. bestimmten Kegel, dessen Basis der mit OH beschriebene Kreis ist, eine dem Lichtstrahle parallele Ebene; diese muss durch die Gerade (O‴ω′, Oω) gehen, und ihr Grundschnitt ist die Tangente ωF, *) während ihre Linie des grössten Falls in OF projicirt ist. Obgleich nun diese Ebene ωFO nur

*) Diese Tangente ωF ist nicht angegeben, erstlich um Verwirrung zu vermeiden, und auch weil der Berührungspunkt F direct erhalten wird aus dem Durchschnitte des um Oω als Durchmesser beschriebenen Kreises; diess aber reicht hin, um die Gerade OF zu zeichnen, auf welche sich die Berührungslinie des Kegels mit der Berührungsebene projicirt, eine Linie, welche offenbar die Linie des grössten Falls auf dieser Ebene ist.

parallel ist der **Berührungsebene an der Schraubenfläche**, welche dem gesuchten Endpunkte M entspricht, so ändert diess doch nichts in der Horizontalprojection der Linie des grössten Falls, welche auch für die gesuchte Berührungsebene sich in OF projicirt. Um nun die noch unbekannte Erzeugende zu finden, welche in letzterer Ebene enthalten sein muss, erinnere man sich, dass der Winkel GOH für alle Punkte der Schraubenlinie (ABD, A′B′D′) constant bleibt; nimmt man daher den Bogen KM gleich JB und projicirt den Punkt M in M′, so ist der durch die beiden Projectionen M und M′ bestimmte Punkt offenbar ein solcher, in welchem die Tangente an der Schraubenfläche mit dem Lichtstrahle parallel ist. Man hat also einen der Endpunkte der Lichtgrenze auf der obern Fläche des Gewindes; den andern (N, N′) findet man durch ähnliche Constructionen, auf diejenige Ebene angewendet, welche die Schraubenfläche im Punkte b der inneren Schraubenlinie (dab, d′a′d″) berührt.

§. 160.

Durch den Lichtstrahl ($O\omega, O'''\omega'$) kann man eine zweite Berührungsebene an den Umdrehungskegel legen, der zur Basis den mit OH beschriebenen Kreis hat, und die Linie des grössten Falls dieser neuen Berührungsebene wird sich in Of projiciren. Legt man daher an letztere Gerade einen Winkel = GOH an, oder besser, nimmt man den Bogen km = JB, so erhält man den Endpunkt m einer andern Lichtgrenze (mn, m″n″), welche ebenfalls noch auf der obern Fläche des Gewindes liegt. Da aber alle Gänge dieses Gewindes identisch und die Lichtstrahlen stets einer und derselben Richtung parallel sind, so kann man einfach durch Vertikalen, welche man durch die bereits gefundenen Punkte zieht, die analogen Lichtgrenzen M″N″, M‴N‴, m‴n‴ ..., welche auf den anderen Gängen vorkommen, construiren.

§. 161.

Bis jetzt wurde blos die obere Fläche des Schraubengewindes betrachtet, welche durch Bewegung der Geraden A′O′ erzeugt ist; aber die untere Fläche dieses Gewindes, welche durch die Bewegung der Geraden A″O″ erzeugt wird, ist ebenfalls eine windschiefe Schraubenfläche, die, was die Form betrifft, mit dem zweiten durch die Verlängerung $O'A_2$ der Erzeugenden O′A′ entstandenen Mantel oder Flächenast (nappe) der ersten Schraubenfläche ganz übereinstimmt. Gleichwohl gehören diese beiden durch A″O″ und $O'A_2$ erzeugten Flächenäste nicht einer einzigen und derselben Schraubenfläche an, den besondern Fall ausgenommen, da die Gerade A″O″ nach 1 oder 3 oder 5... Halbumdrehungen mit $O'A_2$ zusammenfiele; aber die beiden durch eben jene Geraden erzeugten Schraubenflächen unterscheiden sich wenigstens nur durch ihre Höhe über der Horizontalebene, und sie würden mit einander in allen ihren Theilen zusammenfallen, wenn man die eine von ihnen um die constante Grösse A_2D''', oder A_2D'' herabliesse, wobei übrigens jeder Punkt der bewegten Fläche in derselben Vertikale bleiben müsste, in der er sich Anfangs befand. Hieraus folgt, dass die Licht- und Schattengrenzen auf diesen beiden Schraubenflächen die nämlichen Horizontalprojectionen PQ und pq haben, und dass man, um diese zu finden, auf der ersten durch die unbestimmte Gerade $A'O'A_2$ beschriebenen Schraubenfläche fortmachen kann, indem man aber jetzt den obern Mantel dieser Fläche ins Auge fasst.

§. 162.

Taf. 10. Alles was im §. 158 über die Berührungsebenen am untern Mantel der Schraubenfläche für solche Berührungspunkte, die wie (B, B′) stets auf der Schraubenlinie (ABD, A′B′D′) liegen, gesagt wurde, gilt gleicherweise auch für die Berührungsebenen am obern Mantel, vorausgesetzt, dass man die Berührungspunkte

wieder auf derselben Schraubenlinie nehme, wie z. B. den in B_2 projicirten Punkt, welcher auf der Verlängerung der Erzeugenden (BO,B′O‴) liegt. Diese neuen Berührungsebenen sind also wieder denen parallel, welche den Umdrehungskegel berühren, dessen Scheitel (O, O‴) und dessen Basis der mit OH beschriebene Kreis ist; auch ist, für jede derselben, der dem Winkel GOH analoge Winkel wieder constant und demjenigen gleich, der dem Punkte (B, B′) entsprach. Nur was die Linie des grössten Falls betrifft, so würde sie, für den Punkt B_2, statt wie OH diesseits OBG, nun jenseits fallen, wie diess leicht sich ergeben muss aus der Lage, welche der Fuss der Tangente an dem Punkte B_2 der Schraubenlinie erhalten würde. Hat man folglich an den Kegel OH die beiden durch den Lichtstrahl (Oω, O‴ω′) gehenden Berührungsebenen gelegt, und die Linien OF und Of ihres grössten Falls bestimmt, so muss man den Bogen BJ von K und k aus aber in entgegengesetzter Richtung auf KM und km tragen, hierauf die Strahlen über den Mittelpunkt O hinaus verlängern, um die Grenzpunkte P und p zu erhalten; diess aber geschieht, indem man K_2 p gleich KM und k_2 P gleich km nimmt; oder auch, indem man die Curvenäste PQ und pq symmetrisch mit MN und mn zeichnet, symmetrisch nämlich in Beziehung auf den Durchmesser OC, welcher senkrecht auf OS steht.

§. 163.

Ist diess geschehen, so projicire man die Punkte P und p in P′ und p′, P″ und p″... auf die äussere, und hierauf die Punkte Q und q in Q′ und q′, Q″ in q″ auf die innere Schraubenlinie. Mittelst dieser Grenzpunkte kann ein geschickter Zeichner die Curven P′Q′, p′q′, P″Q″..., welche, so weit sie hier in Betracht kommen, nur eine schwache Krümmung haben, hinreichend genau ausführen; übrigens soll hier noch eine Methode angegeben werden, nach welcher man diese Curven in ihrer ganzen Ausdehnung auf der unbestimmt verlängerten windschiefen Fläche finden kann.

§. 164.

Man könnte zu diesem Zwecke nach einander die verschiedenen Schraubenlinien betrachten, welche auf der Schraubenfläche liegen, und kleinere und grössere Halbmesser als OB haben; alsdann könnte man das Verfahren in den §§. 159 und 162 auf sie anwenden, durch welches man alle die Punkte der Fläche erhielte, in welchen die Berührungsebene mit den Lichtstrahlen parallel ist. Dieses Verfahren wäre aber ziemlich mühsam; viel einfacher ist es, jene Punkte nach einander auf den Erzeugenden der Schraubenfläche aufzusuchen, nach der Methode des §. 157, wo gelehrt wird, wie man den Berührungspunkt (x, x′) einer Ebene findet, welche man durch eine beliebige Erzeugende (OB, O‴B′) parallel mit den Lichtstrahlen gelegt hat.

Man muss daher verschiedene Lagen der beweglichen unbestimmten Erzeugenden (AO, A′O′A_2) construiren (§. 156), durch jede derselben eine mit den Lichtstrahlen parallele Ebene legen, und nach §. 157 den Punkt der Erzeugenden bestimmen, in welchem die durch sie gelegte Ebene die Schraubenfläche berührt. Dieser Punkt wird bald auf den untern bald auf den obern Mantel der Fläche fallen, und die Reihenfolge aller so gefundenen Punkte liefert zwei unbestimmte Curven

(MNOQP, M′N′z′$Q_2$$P_2$), (mnOqp, m″n″z″...)

als Linie der Licht- und Schattengrenze auf beiden Mänteln des ersten Ganges, der durch die Bewegung der Geraden (AO, A′O′A_2) erzeugten Schraubenfläche. Die folgenden, durch die 2te, 3te u. s. w. Umdrehung dieser Geraden erzeugten Gänge erhalten identische Schattengrenzen, deren Horizontalprojectionen auch mit MNOQP und mnOqp zusammenfallen werden; aber ihre Vertikalprojectionen, von denen hier nur die wirklich auf den Schraubengewinden zum Vorscheine kommenden Theile M″N″, m‴n‴, M‴N‴,... angegeben sind, liegen um 1, 2, 3... Ganghöhen A′A″ der Schraubenlinie höher als M′N′Z′ und m″n″z″.

§. 165.

Die Punkte (O, z'), (O, z'')..., in welchen diese Curven die Axe der Schraube schneiden, sind gegeben durch den Durchschnitt dieser vertikalen Axe mit den Erzeugenden, welche in der Meridianebene SO liegen. Denn in diesen Durchschnittspunkten ist die Berührungsebene der Schraubenfläche, welche durch die Erzeugende und die Axe gehen muss, offenbar parallel mit den Lichtstrahlen, weil sie mit der Vertikalebene SO selbst zusammenfällt. So erhält man also den erstern z' dieser Punkte, indem man die erste Erzeugende construirt, welche in Os projicirt ist; den andern z'' durch Construction der in OS projicirten Erzeugenden und so fort, so dass alle diese Punkte $z', z'', z''', \ldots$ um die Hälfte der Ganghöhe $A'A''$ der leitenden Schraubenlinie von einander entfernt sein werden.

§. 166.

Man bemerke jedoch, dass der obere As $z' Q_2 P_2$ nicht eigentlich den unteren Flächen der Schrauben-gewinde angehört, und dass man alle seine Punkte um eine constante Grösse A_2D'' oder A_2D' tiefer nehmen müsste, um die Curven $P''Q''$ und $P'Q'$ zu erhalten, welche die wahren Lichtgrenzen auf diesen Flächen des Gewindes sind. Diess rührt von dem Unterschiede her, der im §. 161 nachgewiesen wurde zwischen den beiden Schraubenflächen von derselben Form, die von den Geraden $O'A_2$ und $A''O''$ beschrieben werden.

§. 167.

Taf. 10. V o n d e n S c h l a g s c h a t t e n. Die Lichtstrahlen, welche die untere Fläche des Gewindes längs der Berührungscurve $(PQ, P'Q')$ berühren, fallen auf die obere Fläche des nächst untern Gewindes, und bringen dort einen Schlagschatten $(QY, Q'Y')$ hervor, der im Punkte (Y, Y') endigt, wo er die Licht-grenze $(MN, M'N')$ schneidet. Denn der in die Lage $(VY, V'Y')$ gelangte Lichtstrahl berührt gleichzeitig die beiden Gewindeflächen und trifft die Horizontalebene im Punkte (φ, φ'). Um die Curve $(QY, Q'Y')$ zu construiren, bestimme man zuerst die horizontalen Grundschnitte $\varrho\varphi\psi$ und $\lambda\varphi$ der beiden Cylinder, welche durch die über die Curven $(PQ, P'Q')$ und $(MN, M'N')$ hingleitenden Lichtstrahlen gebildet werden; diese Grundschnitte haben die Punkte ϱ und λ mit dem Grundschnitt $AR\gamma\delta\alpha\delta_2\ldots$ des schon im §. 156 besprochenen Cylinders gemeinschaftlich. Der Punkt φ nun, in welchem die beiden Grundschnitte $\varrho\varphi\psi$ und $\lambda\varphi$ sich schneiden, liefert offenbar den Lichtstrahl $(\varphi YV, \varphi'Y'V')$, welcher die beiden Gewindeflächen gleichzeitig berührt und daher den Punkt (Y, Y') bestimmt, wo der gesuchte Schlagschatten enden muss. Nachdem man hierauf eine Erzeugende der Schraubenfläche $A'a'$ construirt hat, welche von einem zwischen Q' und N' liegenden Punkte ausgeht, lege man durch diese Gerade eine mit den Lichtstrahlen parallele Ebene und suche den Punkt, in welchem ihr horizontaler Grundschnitt die Curve $\varrho\varphi\psi$ schneidet; alsdann wird der durch diesen Durchschnitts-punkt gezogene Lichtstrahl die betrachtete Erzeugende in einem Punkte schneiden, welcher der Curve $(QY, Q'Y')$ angehört. Diese sehr einfachen Operationen wurden hier nur angedeutet; das Resultat $Q'Y'$ muss auf die bekannte Weise auch auf die anderen Gänge in $Q''Y''$, $Q'''Y'''$, ... getragen werden.

Gleicherweise kommt auch auf der andern Seite der Schraube ein Schatten $(qy, q''y'')$ vor, den die Curve $(pq, p''q'')$ auf das Gewinde wirft; dieser Schatten wird wie oben bestimmt durch die Grundschnitte $\pi_2\eta_2$ und $\mu\eta_2$ der Cylinder, welche von den Lichtstrahlen, die über die beiden Curven $(pq, p''q'')$ und $(mn, m''n'')$ hingleiten, gebildet werden. Hierauf muss die Schattenlinie $q''y''$ auch auf die anderen Schraubengänge, in qy', $q'''y'''$, ... getragen werden. Nur das obere und untere Ende der Schraube, wo die Gewinde abgeschnitten sind, erfordern einige Modificationen, von denen nun die Rede sein soll.

§. 168.

Oben endigt die Schraube mit einer Horizontalebene A''''d'''', über welche noch ein kleines Stück der cylindrischen Spindel hervorragt, um den Eintritt in die Mutterschraube zu erleichtern. Diese Horizontalebene A''''d'''' nun musste die untere und obere Fläche des Gewindes in zwei Curven ALd und Ald schneiden, welche, nach §. 620 der Darst. Geom., Archimedische Spiralen sind. Sie wurden auf folgende Art construirt: Nachdem die Halbmesser gezogen waren, welche den Halbkreis APD in 8 gleiche Theile theilten, wurden sie nach einander um 1/8, 2/8, 3/8, ... des Stücks Aa vermindert, und durch die auf diese Weise bestimmten Punkte wurde sodann die Curve ALd gezogen. Die andere Spirale Ald wurde auf ähnliche Weise construirt.

§. 169.

Auf dem Flächenaste A''''a'''d'''' nun reducirt sich die Lichtgrenze auf das Curvenstück (Q'''L'', QL) und mithin der Schlagschatten Q'''Y''' auf das Stück (Q'''Z', QZ), dessen letzten Punkt man vermittelst des Lichtstrahls (L''Z', LZ) erhält; denn von dieser letzten Lage aus streifen die Lichtstrahlen längs der Spirale (LU, L''U') hin, und treffen das unterhalb befindliche Gewinde in einer neuen Curve (Z'W', ZW), welche im Punkte (W, W') endigen muss, wo sie die schon gezeichnete Lichtgrenze (M'''N''', MN) schneidet.

Um diese Curve (Z'W', ZW) zu construiren, muss man zuerst den horizontalen Grundschnitt des Strahlencylinders suchen, dessen Leitlinie die Spirale (Ld, L''d'''') ist; hierauf muss man durch eine beliebige Erzeugende der windschiefen Gewindefläche eine mit den Lichtstrahlen parallele Ebene legen, und alsdann durch den Punkt, wo der Grundschnitt dieser Ebene den Grundschnitt des Strahlencylinders schneidet, einen Lichtstrahl ziehen, welcher sofort die betrachtete Erzeugende in einem Punkte der gesuchten Curve schneiden wird.

§. 170.

Auf der andern Seite der Schraube zeigt das letzte Gewinde eine auf das Stück (ml, m''''l'') reducirte Lichtgrenze; ein Schlagschatten ist auf diesem Gewinde nicht vorhanden. Aber die etwas hervorragende Schraubenspindel projicirt auf die Ebene der beiden Spiralen einen Schatten, der offenbar aus zwei geradlinigen Tangenten an dem mit Oa beschriebenen Kreise, und aus einem dem letztern gleichen Halbkreise bestehen wird; von diesem halbkreisförmigen Schatten kann aber hier nur ein kleiner Theil vorhanden sein, weil die Horizontalebene A''''d'''' nicht über die beiden Spiralen hinaus verlängert ist.

§. 171.

Am untern Theile der Schraube schneidet die Horizontalebene A'd' das Gewinde ebenfalls in zwei Spiralen ALd und Ald, und die Lichtgrenzen auf dem ersten Gewinde reduciren sich auf die Stücke (PL, P'''L') und (nl, n'l'). Diese letzte Curve aber reducirt sich wieder auf das Stück (ly, ly''), wegen des von der Curve (pq, p'q') geworfenen Schattens (qy, q'y').

§. 172.

Schlagschatten auf der Horizontalebene. Um diese Schatten zu construiren, darf man nur die Grundschnitte der verschiedenen mit den Lichtstrahlen parallelen Cylinder suchen, welche zu Leitlinien Curven haben, deren Projectionen gegeben sind. Es wird also hinreichend sein, hier diese Schatten nur aufzuzählen und die Curven anzugeben, von denen sie herrühren. Taf. 10.

Die Curve (ly, l'y') projicirt fürs Erste auf die Horizontalebene einen Schatten lη, dessen Grenze durch

den Lichtstrahl ($v y \eta$, $v' y' \eta'$) bestimmt wird. Von dieser Lage weg streift der Lichtstrahl über die Curve (vp, $v'p'$) hin, und erzeugt den Schatten $\eta\pi$, dessen letzter Punkt offenbar in der Curve

$$AR\gamma\lambda\delta\mu\pi\alpha\varrho\gamma_2\delta_2\alpha_2 \,..$$

liegt, welche den Grundschnitt des Cylinders bildet, der zur Leitlinie die äussere Schraubenlinie hat. Im §. 156 wurde empfohlen, diesen Grundschnitt zuerst zu construiren.

§. 173.

In der Lage ($p\pi$, $p'\pi'$) angekommen, streift der Lichtstrahl weiter über den Bogen (pm, $p'm''$) der Schraubenlinie hin, und erzeugt den Schatten $\pi\mu$; hierauf steigt er, von der Lage ($m\mu$, $m''\mu''$) weg, an der Curve (mn, $m''n''$) hinauf, und erzeugt den Schatten $\mu\eta_2$, dessen Endpunkt durch den Lichtstrahl ($vy\eta_2$, $v''y''\eta''$) bestimmt wird; denn in dieser Lage hat er die Curve (pq, $p''q''$) erreicht, auf welcher er fortgleitet vom Punkte (v, v'') an bis (p, p''), wodurch alsdann der Schatten $\eta_2\pi_2$ entsteht. Indem nun der Lichtstrahl wieder auf dem Bogen (pm, $p''m'''$) der Schraubenlinie fortgleitet, erzeugt er den Schatten $\pi_2\mu_2$; und so geht es weiter fort auf den übrigen Schraubengängen.

§. 174.

Auf dem vordern Theile der Schraube finden ähnliche Umstände statt, nur etwas weniger bestimmt, wegen der Kleinheit gewisser Bögen; es wurde desshalb auch der Schatten des hintern Theils zuerst vorgenommen. Die Lichtgrenze (PL, $P'''L'$) erzeugt den Schatten LR; hierauf gleitet der Lichtstrahl auf dem Bogen (PM, $P'''M'$) der Schraubenlinie fort und erzeugt den Schatten $R\gamma\lambda$; alsdann bestreift er den Bogen (MY, $M'Y'$), und bringt dadurch den Schatten $\lambda\varphi$ hervor, dessen Endpunkt durch den Lichtstrahl ($VY\varphi$, $V'Y'\varphi'$) bestimmt wird. In dieser letztern Lage aber hat der Strahl die Curve (PQ, $P'Q'$) erreicht, auf welcher er nun über den kleinen Bogen (VP, $V'P'$) hinstreift, und den Schatten $\varphi\varrho$ erzeugt. Von der Lage ($P\varrho$, $P'\varrho'$) weg, gleitet er auf dem Bogen (PM, $P'M''$) der Schraube fort, und erzeugt den Schatten $\varrho\gamma_2\lambda_2$. So fortfahrend findet man nach einander Curven, welche den vorhergehenden identisch sind.

§. 175.

Taf. 10. In vorliegender Figur besteht die Licht- und Schattengrenze auf der windschiefen Schraubenfläche aus zwei gesonderten Aesten

$$(MNOQP,\ M'N'z'Q_2P_2) \text{ und } (mnOqp,\ m''n''z''\ldots.),$$

deren jeder sich auf den beiden Mänteln der Schraubenfläche unendlich verlängert. Diess wird immer der Fall sein, wenn der von dem Lichtstrahle ($SO\omega$, $S'O'''\omega'$) mit der Horizontalebene gebildete Winkel ω kleiner ist, als der Winkel α, den die Erzeugende (AO, $A'O'$) mit der nämlichen Ebene bildet. Wäre aber der Winkel ω grösser als α, so würden die beiden Aeste ONM und Onm sich der Geraden $O\omega$ nähern, und endlich in einem etwas jenseits dieser Geraden liegenden Punkte sich vereinigen; das Nämliche würden die beiden oberen Aeste ORP und Opp thun, so dass die Licht- und Schattengrenze in diesem Falle eine geschlossene Curve würde. Dem Beweise dieser Behauptungen müssen einige Grundsätze vorangeschickt werden, welche theils für sich, theils aus dem Vorhergehenden klar sind:

1) Der Fall einer Ebene, d. h. der Winkel, den sie mit der Horizontalebene macht, ist immer grösser, als der Fall jeder in dieser Ebene enthaltenen Geraden, und letzterer wird höchstens dem ersteren gleich, wenn die Gerade senkrecht auf dem horizontalen Grundschnitte der Ebene steht.

2) Wenn der Berührungspunkt einer Berührungsebene an der windschiefen Schraubenfläche sich auf

einer und derselben Erzeugenden dieser Fläche fort- und zwar von der vertikalen Axe wegbewegt, so nimmt der Fall der Berührungsebene ab von 90° an, bis er dem Falle α jener Erzeugenden gleich wird; eine Grenze, welche er nur erreicht, wenn der Berührungspunkt in unendlicher Entfernung liegt. Diess erhellet leicht, wenn man sich nur des Verfahrens erinnert, mittelst dessen (§. 156) die Berührungsebene für den beliebig genommenen Punkt (B, B') der Erzeugenden (OBG, O'''B'G') construirt wurde; denn es geht aus demselben hervor, dass der Winkel BGT spitzig sein muss.

3) Wenn im Gegentheile der Berührungspunkt sich auf derselben Schraubenlinie fortbewegt, so bleibt der Fall der Berührungsebene constant (§. 158).

§. 176.

Ist nun der Winkel ω grösser als α, so gibt es auf der Schraubenfläche eine gewisse, leicht zu bestimmende Schraubenlinie (sie mag H heissen), für deren Punkte alle die Berührungsebenen einen dem Winkel ω gleichen Fall haben.*) Wenn man nun, um diejenige von diesen Ebenen zu finden, welche dem Lichtstrahle parallel ist, auf die Schraubenlinie H das im §. 159 für die dem Halbmesser OB entsprechende Schraubenlinie gebrauchte Verfahren anwendet, so wird man unmittelbar und ohne die Constructionen auszuführen, bemerken, dass die beiden Tangenten ωF und ωf in eine Gerade zusammen fallen müssen. Denn die Basis des Hilfskegels, welche dort der mit OH beschriebene Kreis war, muss nunmehr, da der Kegel einen dem Winkel ω gleichen Fall hat, eine durch den Punkt ω selbst gehende Kreislinie werden. Hieraus folgt aber, dass auf der Schraubenlinie H die beiden Punkte, welche M und m analog sind, in Einen zusammen fallen. Eben so findet es sich für die den beiden P und p analogen Punkte.

Was diejenigen Schraubenlinien betrifft, deren Halbmesser grösser als der von H ist, so enthalten sie keine Punkte mehr, welche der Licht- und Schattengrenze angehören, weil alsdann die Basis des Hilfskegels den Fusspunkt ω des durch seine Spitze gehenden Lichtstrahles überragt; eine Folgerung, welche mit dem oben (§. 175, Nr. 1) aufgestellten Grundsatze übereinstimmt, weil die Berührungsebenen an den Punkten solcher Schraubenlinien alle einen geringeren Fall als ω haben würden, und also keinen Lichtstrahl von der Neigung ω enthalten könnten.

§. 177.

Aus dem Vorhergehenden erhellet, dass auf der Schraube der Tafel 9 eine geschlossene Curve vorkommen musste, welche die Licht- und Schattengrenze in rein geometrischem Sinne darstellte, d. h. als eine Berührungslinie der Schraubenfläche mit Geraden, welche den Lichtstrahlen parallel waren. Da aber diese Curve keine wirkliche Existenz hatte, indem sie von den Schlagschatten bedeckt wurde, so war es für unnöthig erachtet worden, sie in der Figur wirklich anzugeben.

*) Um diese Schraubenlinie H zu construiren, muss man, nachdem der Lichtstrahl (O'''ω', Oω) gezeichnet worden, mit einem Halbmesser gleich Oω eine Kreislinie beschreiben, welche die Basis eines Kegels sein wird, der seine Spitze in (O, O''') hat, und dessen Seitenlinien den Fall ω haben. Hierauf muss man an diesen Kegel eine durch die Erzeugende (OBG, O'''B'G') gehende Berührungsebene legen, was einfach dadurch geschieht, dass man an den Punkt der Basis eine Tangente zieht. Diese Ebene, deren Fall offenbar gleich ω ist, wird nun die Schraubenfläche in einem gewissen Punkte der Erzeugenden (OBG, O'''B'G') berühren; sucht man also diesen Berührungspunkt nach der sehr einfachen Weise des §. 157, so erhält man einen Punkt der Grenz-Schraubenlinie H, was hinreichend ist, um diese Curve völlig zu bestimmen. — Man findet ein Beispiel dieser Bestimmung im §. 180, aber für eine besondere Schraubenfläche.

Schatten einer Schraube mit viereckigem Gewinde.

§. 178.

Taf. 11. Die Spindel dieser Schraube ist wieder ein vertikaler, auf den Kreis abde projicirter Cylinder; das Gewinde aber ist erzeugt durch die Bewegung eines Quadrats (A″A‴a‴a″, Aa), dessen Grundlinie und ihre Gegenseite die Axe der Schraube stets unter einem rechten Winkel schneiden, während eine der Ecken (A, A‴) beständig in einer Schraubenlinie (ABDE, A′D′A‴D‴...) bleibt, deren Ganghöhe A′A‴ gewöhnlich doppelt so gross ist, als die Seite A″A‴. Hieraus folgt, dass die obere und untere Fläche des Gewindes zwei Schraubenflächen mit einer Richtungsebene sind (Darst. Geom. §. 616). Ausserdem aber bietet das Gewinde noch eine Seitenfläche dar, welche von der Seite A″A‴ beschrieben ist, und aus cylindrischen Zonen besteht, welche alle auf den Kreis ABDE projicirt sind.

§. 179.

Auf dieser Seitenfläche erhält man die Licht- und Schattengrenzen unmittelbar, weil sie auf einander folgende Stücke der Vertikalen B und E sind, in welchen der Cylinder ABDE von den Ebenen berührt wird, welche dem Lichtstrahle (SO, S′G″) parallel sind. Eben so erhält man auf der cylindrischen Spindel abde die Licht- und Schattengrenzen b′b″, e′e″... als Theile der Vertikalen b und e; ein Theil der sogenannten Lichtgrenzen aber wird von den Schlagschatten bedeckt, von welchen gleich nachher die Rede sein wird.

§. 180.

Auf der windschiefen Fläche des Gewindes gibt es hier keine Lichtgrenzen; gleichwohl bleiben die Methoden der §§. 157 und 159, und sogar mit mehr Einfachheit, anwendbar auf die vorliegende Schraubenfläche, deren Erzeugende A‴a‴ mit der Axe beständig einen rechten Winkel bildet; aber durch diese Methoden würde man als Berührungslinie der mit den Lichtstrahlen parallelen Berührungsebenen eine geschlossene Curve erhalten, welche ganz im Innern der cylindrischen Spindel enthalten wäre.

Um diese Behauptung zu rechtfertigen, darf man nur die Grenz-Schraubenlinie suchen, welche in §. 176 durch H bezeichnet wurde. Zu diesem Zwecke ziehe man den Lichtstrahl (C′I′,OI), und beschreibe den Kreis IK, welcher die Basis eines Umdrehungskegels sein wird, dessen Spitze in (C, O) ist, und dessen Erzeugende denselben Fall ω haben, wie der Lichtstrahl. Legt man hierauf an diesen Kegel eine durch die Erzeugende (CO, C′) der Schraubenfläche gehende Berührungsebene, so wird diese Ebene, deren Grundschnitt die mit CO parallele $K\theta$ ist, zum Fall den Winkel ω haben und die Schraubenfläche in einem gewissen Punkte γ der Erzeugenden (CO, C′) berühren. Dieser unbekannte Punkt γ nun muss auf einer Schraubenlinie liegen, deren Subtangente gleich OK ist. Man ziehe daher die Tangente CT, mache sie gleich dem rectificirten Kreisbogen CA, ziehe OT, welche die $K\theta$ in θ schneidet, und fälle die Senkrechte $\theta\gamma$, so erhält man den gesuchten Berührungspunkt γ; denn es folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, dass der Kreisbogen $\alpha\gamma$ gleich $\theta\gamma$ ist. Mithin ist also die in $\alpha\gamma\delta$... projicirte Schraubenlinie diejenige, für deren sämmtliche Punkte die Berührungsebenen an der Schraubenfläche den Fall ω haben, und folglich kann (§. 176) die Licht- und Schattengrenze sich nicht über diese Schraubenlinie $\alpha\gamma\delta$ hinauserstrecken; da aber diese Curve hier im Innern der Schraubenspindel enthalten ist, so kann mithin keine Licht- und Schattengrenze auf der windschiefen Gewindefläche vorkommen.

§. 181.

Schlagschatten. Die Curve l'g'p'f' ist der Schlagschatten auf der cylindrischen Spindel abdc und wird hervorgebracht durch die untere Schraubenlinie (DAB, D'A''D''); sie ist der Durchschnitt eines vertikalen mit einem schiefen Cylinder. Um sie zu erhalten, ziehe man durch einen beliebigen auf der Schraubenlinie genommenen Punkt (G, G') einen Lichtstrahl, dessen horizontale Projection Gg die Basis des senkrechten Cylinders in einem Punkte g schneidet, welcher auf die Vertikalprojection des fraglichen Lichtstrahles in g' projicirt werden muss. Den Punkt p' der Curve erhält man mittelst des besondern Strahles aP, und die Endpunkte l' und f' mittelst der Strahlen bL und eF, welche Tangenten an der Schraubenspindel sind. Taf. 11.

§. 182.

Der Strahl (Lb, L'l'), welcher Tangente an der Spindel geworden, fällt auf die windschiefe Fläche der Schraube im Punkte (M, M'), der durch das Zusammentreffen von L'l' mit der Curve b'M'6' bestimmt wird. Letztere Curve ist der Schlagschatten, der durch die Berührungsebene der Spindel längs der Vertikalen (b, b'b'') hervorgebracht wird; man erhält sie also, wenn man verschiedene Erzeugende der Schraubenfläche construirt und die Punkte sucht, in welchen ihre Horizontalprojectionen von dem Grundschnitte b6 der eben erwähnten Berührungsebene geschnitten werden. Als Schattenlinie aber muss diese Curve b'M'6' sich im Punkte M' endigen, wo sie von der Geraden L'l'M' getroffen wird, weil, von letzterer Lage an, die über die äussere Schraubenlinie (L'R'D'', LRD) hinstreifenden Lichtstrahlen auf die windschiefe Fläche des Gewindes fallen und daselbst eine neue Curve (MN, M'N') erzeugen, welche auf folgende Weise construirt wird.

§. 183.

Man bestimme zuerst den horizontalen Grundschnitt des Cylinders, welcher von denjenigen Lichtstrahlen gebildet wird, die über die Schraubenlinie (A''L'D'', ALD) hinstreifen; dadurch erhält man eine Curve, welche bei den vorhergehenden Schrauben schon mehrere Male dargestellt worden ist; hierauf lege man durch irgend eine Erzeugende der Schraubenfläche eine mit den Lichtstrahlen parallele Ebene, deren horizontaler Grundschnitt den vorerwähnten Grundschnitt des Cylinders in einem gewissen Punkte schneiden wird. Zieht man nun durch diesen Punkt einen Lichtstrahl, so wird dieser die Erzeugende der Schraubenfläche in einem der gesuchten Curve (MN, M'N') angehörigen Punkte schneiden. Diese sehr leichten Operationen werden hier blos angedeutet, weil die Curve, um welche es sich handelt, sehr flach ist und ihr letzter Punkt (N, N') unmittelbar erhalten wird, wenn man den Durchschnitt der horizontalen Grundschnitte der zwei Strahlencylinder sucht, deren Leitlinie die obere und untere Schraubenlinie A''R'D'' und A'B'D' wären.

§. 184.

Alle diese Resultate müssen sich auf dieselbe Weise auf den verschiedenen Gängen der Schraube wiederholen. Ferner wird hinter der Vertikalebene AD, durch den Schraubenlinienbogen (FE, F'E') eine vom Punkte φ ausgehende Schattencurve auf die Horizontalebene geworfen, und auf jedem der folgenden Gänge kann eine vom Punkte e''' ausgehende Curve, als der Durchschnitt der windschiefen Schraubenfläche mit der Berührungsebene längs der Vertikalen (e, e'''e''''), auf dieselbe Weise construirt werden, wie die Curve (bM6, b'M'6') im §. 182. Da aber diese Linien unsichtbar sind auf der Figur, so wurde es für unnöthig erachtet, sie zu zeichnen.

§. 185.

Was den Kopf der Schraube betrifft, welcher die Form eines achteckigen Prisma VXY... hat, so bildet der von demselben auf das letzte Gewinde geworfene Schlagschatten drei elliptische Bögen

$$(q'v', Ev), \ (v'u'x', vx), \ (x'y', xy),$$

welche die Durchschnitte sind des vertikalen Cylinders EABD mit den Ebenen, die man mit den Lichtstrahlen parallel durch die drei Seiten $(QV, Q'V')$, $(VX, V'X')$, $(XY, X'Y')$ des achteckigen Prisma gelegt hat. Diese Curven sind leicht zu construiren; hat man nämlich einen Lichtstrahl, wie $(Vv, V'v')$ gezogen, so darf man nur auf seine Vertikalprojection den Punkt v beziehen, in welchem seine Horizontalprojection die Basis EABD des senkrechten Cylinders schneidet.

§. 186.

Verlängert man die dritte Ellipse $x'y'$ hinreichend, so schneidet sie endlich die untere Schraubenlinie des Gewindes in einem Punkte y', und es wird der diesem Punkte entsprechende Lichtstrahl das Gewinde nur noch streifen. Bei seinem Fortgange nun trifft dieser Strahl die windschiefe Fläche in einem gewissen Punkte (ω, ω'), welcher gegeben ist durch das nothwendige Zusammentreffen der Geraden $(Yy, Y'y')$ mit der Curve $(MN, M''N'')$, indem letztere der bereits von der Schraubenlinie $A''''y'$ auf dieselbe windschiefe Fläche geworfene Schatten ist (§. 183).

Der noch übrige Theil der Schattenebene, welcher der Geraden $(YZ, Y'Z')$ entspricht, schneidet die windschiefe Fläche des Gewindes in einer neuen Curve $(\omega z, \omega' z')$, die man aus den Durchschnitten jener bekannten Ebene mit verschiedenen, leicht zu construirenden Erzeugenden der Schraubenfläche findet.

§. 187.

Weitere Beispiele über Schattenconstruction anzufügen, wurde für unnöthig erachtet, da die bisherigen alle Arten von gewöhnlich vorkommenden Flächen darbieten; auch sind die schwierigeren Fälle so sorgfältig behandelt und untersucht worden, dass der einsichtsvolle Leser gewiss nun mit den nöthigen Hilfsmitteln ausgerüstet ist, um alle weiteren Fälle, die ihm noch vorkommen mögen, selbstständig auflösen zu können. Freilich wird hiebei vorausgesetzt, dass der Leser die Figuren der bis jetzt gebrauchten Tafeln, zum grössten Theil wenigstens, selbst ausgeführt, und dass er alle, auch die scheinbar ins Kleinliche gehenden Untersuchungen, welche bis jetzt vorgenommen wurden, mit Aufmerksamkeit verfolgt habe. Denn nur durch solche Uebungen wird er die schätzbare Fähigkeit erlangen, schon vor dem Beginne der graphischen Operationen vorausbestimmen zu können, welche Form und Ausdehnung die Hauptschatten auf einem gegebenen Gegenstande haben, und welche ihrer Theile durch Nebenschatten wieder verdeckt werden; ferner welche Aussprünge derselbe erleiden müsse beim Uebergange von einer Wandfläche z. B. zu einer andern, nicht damit zusammenhängenden u. s. w. Dieses Talent der Vorausbestimmung ist immer nützlich, wird aber unentbehrlich in den häufig vorkommenden Fällen, wo der Mangel an geometrischen Bestimmungsstücken oder — noch mehr — der Mangel an Zeit, die Anwendung der bisher gebrauchten strengen Methoden nicht gestattet; alsdann gibt es keinen andern Führer als ein richtiges Gefühl für Formen, das man nur durch zahlreiche, streng geometrisch ausgeführte Beispiele erlangen kann.

Drittes Kapitel.

Ueber die glänzenden Punkte und die Abstufungen der Licht- und Farbenstärke.

§. 188.

Es sei T ein undurchsichtiger, dem leuchtenden Punkte S ausgesetzter Körper. Denkt man sich denselben vorerst den Reflexen der umliegenden Gegenstände und auch denen der Atmosphäre entzogen, so ist nur der Theil ABCDE dieses Körpers beleuchtet, welcher vor der Schatten- und Lichtgrenze BCDE liegt, d. h. vor der Berührungslinie des um ihn beschriebenen Kegels, der in S seine Spitze hat (§. 3); der übrige Theil der Oberfläche von T ist vollkommen dunkel. Es ist aber nicht genug, dass ein Element dieser Oberfläche beleuchtet sei, um sichtbar zu sein: dasselbe muss auch das von S erhaltene Licht in das Auge des Beobachters senden können, das hier in O angenommen wird. Denkt man sich nun den um T beschriebenen Kegel OFCGE, so kann von keinem jenseits der Berührungscurve FCGE liegenden Punkte eine Gerade nach O gezogen werden, welche nicht den Körper T schnitte; da diess aber für Lichtstrahlen unmöglich ist, so ist mithin der vor der Berührungslinie FCGE liegende Theil AFCGE der einzige, welcher von dem Beobachter gesehen werden kann, wesshalb man ihn auch den sichtbaren Umriss des Körpers T, in Beziehung auf den Augpunkt O nennt. Nimmt man nun zugleich auch auf die oben bezeichnete Schattengrenze Rücksicht, so folgt, dass nur der Flächentheil AFCDEF wahrhaft sichtbar sein kann, welcher den beiden Flächenregionen gemeinschaftlich ist, die durch den sichtbaren Umriss und die Lichtgrenze bestimmt werden.

Taf. 12. Fig. 1.

§. 189.

Der sichtbare Theil des Körpers T ist jedoch in gewissen Flächen in noch engere Grenzen eingeschlossen. Setzt man nämlich voraus, die Oberfläche desselben sei, ausserdem dass sie allem reflectirten Lichte entzogen ist, im strengsten Sinne stetig und vollkommen polirt oder glatt, so wird jeder Lichtstrahl SM, welcher diese Fläche in einem Punkte M trifft, für welchen die Normale durch MN dargestellt ist, in einer Richtung MR zurückgeworfen, welche in der Ebene SMN liegt und mit MN einen Reflexionswinkel RMN bildet, welcher dem Einfallswinkel SMN gleich ist. In Folge dieses Gesetzes nun wird es im Allgemeinen nicht geschehen, dass die Gerade MR durch den Punkt O geht, und mithin wird der Punkt M, obgleich er erleuchtet ist, für den Beobachter nicht sichtbar sein. Dieser wird mithin nur solche Punkte der Oberfläche wahrnehmen, für welche, wie z. B. für A, die Normale eine solche Richtung hat, dass sie den Winkel SAO in zwei gleiche Theile theilt. Diese Punkte aber reduciren sich gewöhnlich auf einen einzigen, wie im folgenden §. bewiesen werden soll.

§. 190.

Man construire zuerst eine Ellipse $\alpha\beta\gamma$, welche die Punkte S und O zu Brennpunkten, und deren grosse Axe $\alpha\gamma$ eine beliebige Länge habe. Dreht man nun diese Curve um die Gerade SO, so erzeugt sie ein Umdrehungs-Ellipsoid, und es wird die Normale für jeden Punkt dieser Fläche sich in der Ebene der elliptischen Meridiancurve befinden und auch normal auf letzterer sein; daher wird sie auch den Winkel, welchen die aus S und O nach dem betrachteten Punkte des Ellipsoids gezogenen Radien Vectoren bilden, in zwei gleiche

Theile theilen. Lässt man nun die Axe $\alpha\gamma$ allmählig wachsen, ohne die Brennpunkte zu ändern, so wird das Ellipsoid sich stetig vergrössern, und bald eine Lage $a'A\gamma'$ einnehmen, in welcher es die Fläche T in einem gewissen Punkte A berührt; mithin wird für diesen Punkt die Normale An der Fläche zugleich auch Normale an dem Ellipsoid sein, und als solche den Winkel SAO in zwei Hälften theilen. Der Berührungspunkt A muss also derjenige auf der Fläche T sein, welcher dem Beobachter das von S ausgegangene Licht zuwirft, und folglich ist er der sichtbare Punkt dieses Körpers, unter Voraussetzung einer vollkommen polirten Oberfläche.

Dieser Punkt ist im Allgemeinen ein einziger; denn wenn man nicht voraussetzt, die Fläche T habe, ausserordentlicherweise, Erhöhungen und Vertiefungen, so ist leicht einzusehen, dass das veränderliche Ellipsoid $\alpha\beta\gamma$ jene Fläche nur einmal berühren kann, besonders unter der mit eingerechneten Bedingung, dass der Berührungspunkt auf dem erleuchteten Theile des Körpers und zwar innerhalb des sichtbaren Umrisses FCGE sich befinde.

§. 191.

Ein vollkommen polirter Körper also, der nur directes Licht von einem leuchtenden Punkte erhält, bietet nur einen einzigen sichtbaren Punkt dar, dessen Lage im vorigen §. bestimmt wurde. Man kann sich hievon, auf eine freilich unvollkommene Weise, überzeugen, wenn man eine metallene und sorgfältig polirte Kugel einem strahlenden Lichte aussetzt, wie z. B. dem der Sonne, wenn die Atmosphäre von Wolken und Dünsten frei ist. Alsdann wirft ein sehr kleiner Theil der metallischen Oberfläche das Bild des leuchtenden Körpers zurück, mit einem Glanze, den das Auge kaum zu ertragen vermag, während der übrige Theil der Kugel sehr trübe erscheint: ganz verfinstert und unsichtbar desshalb nicht, weil die Atmosphäre und die umliegenden Gegenstände Reflexe erzeugen, von denen ein Theil in das Auge des Beobachters gelangt. Ohne dieses indirecte Licht würde man nicht über die Form polirter Körper urtheilen können, weil man nur einen sehr kleinen Theil ihrer Oberfläche wahrnehmen würde.

§. 192.

Taf. 12. Fig. 2. Die meisten Gegenstände aber, welche sich dem Blicke darbieten, wie Steine, Holz u. s. w. sind matte oder sehr unvollkommen polirte Körper. Ihre äussere Umhüllung nämlich ist, wenn sie auch im Ganzen den Anschein einer stetigen Fläche darbietet, doch mit einer Menge Erhöhungen und Vertiefungen übersäet, die oft unmerklich sind im Verhältnisse zu den Dimensionen des Körpers selbst, aber sehr beträchtlich in Beziehung auf die Lichtmolecülen, welche von äusserster Feinheit sind. Eine solche rauhe Oberfläche bietet dem Lichte zahlreiche, in allen möglichen Richtungen geneigte Facetten dar (Fig. 2), und diese reflectiren nach dem Auge des Beobachters Lichtstrahlen, welche nicht dahin gelangen würden, wenn sie auf die in Fig. 2 ebenfalls angegebene, nicht unterbrochene Oberfläche des Körpers fielen. Bei einem matten Körper also reflectirt oder zerstreut jedes Element der Oberfläche das Licht nach allen Seiten, während es dasselbe nur nach einer Richtung zurückwirft, wenn der Körper vollkommen polirt ist. Da nun kein Körper letztere Eigenschaft in aller Strenge besitzt, so findet immer einige Lichtzerstreuung statt, aber diess um so weniger, je mehr die Politur des Körpers sich der Vollkommenheit nähert. Eben desshalb kann man, wie oben bemerkt worden, leichter die Form der matten als der polirten Körper beurtheilen.

§. 193.

Fig. 1. Wird also ein matter Körper T von dem einzigen leuchtenden Punkte S erhellt, so ist das ganze Stück AFCDEF seiner Oberfläche für den in O befindlichen Beobachter sichtbar, und den Theil CDG könnte er nur

durch das von den umliegenden Gegenständen reflectirte Licht wahrnehmen, welches hier nicht zugelassen wird. Auf jenem ersten Stücke aber gibt es einen glänzenden Punkt, d. h. einen Punkt, der einen lebhaftern Glanz hat, als die anderen, und welcher genau jener in §. 190 construirte Punkt A ist, der dort unter Voraussetzung einer vollkommenen Politur, als der einzig sichtbare bezeichnet wurde.

Wenn nämlich der Körper T', obgleich er matt ist, unseren Augen eine scheinbar stetige Umhüllung darbietet, so kommt diess daher, weil die äussersten Facetten der Erhöhungen, aus denen seine Oberfläche besteht, in der Krümmung der geometrischen Fläche BAD liegen, welche seine Umhüllung zu sein scheint. Genügt daher die Berührungsebene dieser Fläche für den Punkt A der Bedingung des §. 189, so treffen an dieser Stelle zwei Ursachen zusammen, durch welche das Licht in das Auge des Beobachters gesendet wird: Fig. 2.

1) Die äussersten Facetten, welche in der Berührungsebene liegen und deren Zahl immer sehr gross ist, weil diese Ebene nicht blos einen mathematischen Punkt mit der Umhüllung des Körpers gemein hat, reflectiren das Licht wie ein Spiegel nach dem Punhte O. 2) Die inneren und unregelmässig liegenden Facetten senden ebenfalls zerstreutes Licht nach dem Auge O. Von diesen beiden Ursachen ist die zweite allen Punkten des sichtbaren Theiles gemeinschaftlich, obgleich sie mit der Neigung der Berührungsebene sich ein wenig ändert, wie später (§. 214) erklärt werden wird; die erste Ursache aber, welche hier die bei weitem vorherrschende ist, besteht einzig nur für den Punkt A. Dieser Punkt muss daher viel mehr Klarheit zeigen, als die anderen Punkte des sichtbaren Theiles, und er wird daher mit Recht der glänzende Punkt, Glanzpunkt, Lichtpunkt *(point brillant)* der Fläche genannt.

§. 194.

Construction des glänzenden Punktes. Um die Lage dieses Punktes auf einer bestimmten Fläche zu finden, kann man eine Methode anwenden, welche sich den graphischen Constructionen leichter bequemt, als die Betrachtung des berührenden Ellipsoides, das in §. 190 nur als Mittel zum Beweise angewendet wurde. — Man nehme an, die Aufgabe sei gelöst, S sei der leuchtende Punkt, O der Augpunkt, A der gesuchte glänzende Punkt auf der gegebenen Fläche Σ. Zieht man nun die Normale AN dieses Punktes, so muss sie (§. 189) den Winkel SAO in zwei gleiche Theile theilen und wird daher folgende zwei Bedingungen erfüllen: 1) Die Normale AN muss in der Ebene des Winkels SAO liegen, und wird daher die gegebene Gerade OS in einem gewissen, zwischen O und S liegenden Punkte N schneiden; 2) da die beiden Winkel SAN und NAO gleich sind, so muss die Normale auch die Gerade OV, welche man parallel mit dem einfallenden Strahle SA gezogen hat, in einer Entfernung OV = OA schneiden. Umgekehrt: jede Normale NA, welche diesen beiden Bedingungen genügt, theilt den Winkel SAO in zwei Hälften, und es ist also A der gesuchte glänzende Punkt. Taf. 12. Fig. 3.

§. 195.

Man ziehe nun durch einen Punkt n, den man beliebig auf der gegebenen Geraden OS, aber zwischen O und S genommen hat, eine Normale na auf die gegebene Fläche, und suche den Punkt a, wo sie diese Fläche schneidet (§. 197). Hierauf ziehe man parallel mit Sa die Gerade Ov, welche die Normale an in einem gewissen Punkte v treffen muss, und suche alsdann auf dieser Normalen einen Punkt α so, dass seine Entfernung vom Punkte O gleich sei der Entfernung Ov, was auf einer regelmässigen Figur sich leicht ausführen lässt, indem man nur die Ebene der beiden Geraden Ov und anv in eine Projectionsebene aufklappen darf. Fällt alsdann der so bestimmte Punkt α mit a zusammen, so ist der gesuchte glänzende Punkt gefunden. Da diess aber im Allgemeinen nicht geschehen wird, so muss man die nämlichen Constructionen für eine zweite Normale n'a' wiederholen, welche man aus einem andern Punkte n' der Geraden OS gezogen, und auf

welcher man einen Punkt α' so bestimmt hat, dass die Entfernung $O\alpha' = Ov'$ sei. So fortfahrend, erhält man zwei fehlerzeigende Curven, deren eine $aa'a''$. . . der geometrische Ort aller Punkte auf der Fläche ist, für welche die Normalen die Gerade SO schneiden; die andere $\alpha\alpha'\alpha''$. . ist der Ort der Punkte, welche, auf diesen Normalen, die nämliche Entfernung vom Auge O haben, wie die Punkte v, v', v'' Jeder Punkt A also, welcher diesen beiden Curven gemeinschaftlich ist, erfüllt beide Bedingungen zugleich und liefert eine Auflösung der vorliegenden Aufgabe.

§. 196.

Man bemerke indess, dass von den verschiedenen Durchschnittspunkten der beiden verlängerten fehlerzeigenden Curven $aa'a''$. . . und $\alpha\alpha'\alpha''$. . ., nur diejenigen zur Anwendung kommen, welche demjenigen Stücke der Fläche angehören, das dem sichtbaren Umrisse und der Lichtgrenze gemeinschaftlich ist, ein Stück, das in Fig. 1 durch AFCDEF bezeichnet wurde; denn ausserhalb dieser Region müsste der einfallende oder zurückgeworfene Strahl den undurchsichtigen Körper durchdringen, was für Lichtstrahlen unmöglich ist.

Es kann auch vorkommen, dass gar keine Auflösung statt findet, wenn die Umhüllung des Körpers, wie es häufig der Fall ist, aus verschiedenen, schroff abgeschnittenen Flächentheilen besteht, welche, einzeln, sich nicht bis zu der Region erstrecken, wo der glänzende Punkt auf der vollständigen geometrischen Fläche seine Stelle haben würde.

§. 197.

Die im §. 195 angegebene Methode setzt voraus, dass man eine Normale an eine Fläche ziehen könne, die durch einen ausserhalb der Fläche gegebenen Punkt gehe. Nun aber liefert die Geometrie keine directe und strenge Auflösung dieser Aufgabe, wenn die Fläche von beliebiger Form ist, und ein geschickter Zeichner wird in diesem Falle am Besten thun, wenn er näherungsweise eine Normale zieht, hierauf an den Punkt, wo diese die Fläche schneidet, eine Berührungsebene construirt, und nun untersucht, um wie viel und nach welcher Seite hin diese Berührungsebene sich von der senkrechten Richtung entfernt, welche sie in Beziehung auf die wahre Normale haben soll; durch eine passende Aenderung in der Lage des Berührungspunktes wird es ihm alsdann nach zwei oder drei Versuchen gelingen, die wahre Normale zu erhalten. Wünscht man jedoch ein mehr methodisches Verfahren, so kann man das folgende anwenden.

§. 198.

Durch den gegebenen Punkt n ziehe man eine beliebige Gerade, z. B. eine Vertikale, lege durch diese verschiedene Ebenen, und suche ihre Durchschnitte mit der gegebenen Fläche. An diese ebenen Curven ziehe man hierauf aus n Normalen, was leicht nach §. 324 der Darstellenden Geometrie geschehen kann, nachdem man jede der Curven in eine der Projectionsebenen aufgeklappt hat; alsdann bilden die Fusspunkte x, x', x'' . . . dieser Normalen auf der Fläche eine erste Curve, welche offenbar den gesuchten Punkt a enthalten muss. Ebenso ziehe man durch n eine zweite Gerade, z. B. eine Horizontale, und lege durch sie eine Reihe schneidender Ebenen, welche ebene Curven liefern, an welche man aus n Normalen ziehen muss. Alsdann wird die aus den Fusspunkten dieser letzteren Normalen gebildete Curve $yy'y''$. . die erste $xx'x''$. . in einem Punkte a schneiden, für welchen die Gerade na senkrecht auf zweien Tangenten der Fläche und mithin normal auf letzterer steht.

Man wird übrigens selten nöthig haben, dieses mühsame Verfahren anzuwenden, da man es in der

Praxis hauptsächlich mit Umdrehungsflächen, Cylindern und Ebenen zu thun hat, für welche die Construction der Normale sich sehr vereinfacht.

§. 199.

Ist z. B. die Fläche durch Umdrehung irgend einer Meridiancurve erzeugt, so legt man durch die Axe und den gegebenen Punkt n eine Ebene, und zieht an den hiedurch erhaltenen Meridianschnitt aus n eine Normale, so ist diese die gesuchte Normale der Fläche selbst. Diese Construction lässt sich leicht ausführen, nachdem man die Meridiancurve auf eine der Projectionsebenen aufgeklappt hat, und man erhält zugleich auch den Punkt, in welchem die Normale die gegebene Fläche schneidet.

§. 200.

Man braucht in diesem Falle den Ausgangspunkt n der Normale nicht willkürlich auf der Geraden OS anzunehmen (§. 195), sondern man betrachtet einen Parallelkreis der Umdrehungsfläche und sucht, unter allen diesem Kreise entsprechenden Normalen, diejenige, welche die Gerade OS schneidet. Diess geschieht sehr leicht, indem man durch die Gerade OS und die Spitze des Kegels, welcher der Ort aller jener Normalen ist, eine Ebene legt; der Durchschnitt dieser Ebene mit der des Parallelkreises ist eine Gerade, welche den Kreis in zwei Punkten schneidet, durch welche die gesuchten Normalen gehen. Von diesen ist aber gewöhnlich nur eine anwendbar nach §. 196.

§. 201.

Ist die gegebene Fläche cylindrisch, so darf man nur durch den betrachteten Punkt n eine auf die Erzeugende des Cylinders senkrechte Ebene legen, den hiedurch erzeugten senkrechten Schnitt construiren und an diesen aus n eine Normale ziehen, welche alsdann offenbar auch normal auf der cylindrischen Fläche sein wird.

§. 202.

Ist endlich die betrachtete Fläche MP eben, so erhält man den glänzenden Punkt durch eine bekannte Construction, indem man auf MP die Senkrechte SB fällt, diese um BC = SB verlängert und CO zieht, welche Gerade die Ebene MP in dem gesuchten Punkte A schneidet. Denn offenbar bilden hier der einfallende Strahl SA und der reflectirte AO gleiche Winkel mit der Ebene oder mit der Normale AN. Taf. 12. Fig. 4.

Bis jetzt wurde, um die Aufgabe über den glänzenden Punkt in ihrer ganzen Allgemeinheit zu lösen, angenommen, der leuchtende Punkt und der Augpunkt haben eine endliche und gegebene Entfernung von einander. Die Auflösung vereinfacht sich aber sehr unter den folgenden Vorraussetzungen, welch auch meist der Wirklichkeit näher kommen als die bisherigen.

§. 203.

Wenn der leuchtende Punkt unendlich weit entfernt ist, d. h. wenn alle einfallenden Lichtstrahlen parallel mit einander sind. Dieser Fall findet statt, wenn ein Körper dem directen Lichte der Sonne ausgesetzt ist (§. 15). Ist O der Augpunkt und A der glänzende Punkt der Fläche, so wird die Linie OS in Fig. 3 hier durch eine Gerade OS′ ersetzt, welche aus O parallel mit der gegebenen Richtung der Lichtstrahlen gezogen wurde. Diese Gerade OS′ ist es jetzt, welche von der Normale AN geschnitten werden muss, und der Durchschnitt muss in einer Entfernung ON = OA Taf. 12. Fig. 5.

stattfinden. Um also den Punkt A zu finden, ziehe man aus einem beliebigen Punkte n der constanten Geraden OS′ (die aber oberhalb O genommen werden muss) eine Normale na auf die Fläche nach einer der in den §§. 197 . . 201 angegebenen Methoden, bestimme den Punkt a, wo sie die Fläche trifft und suche auf dieser Normalen einen Punkt α, dessen Entfernung vom Punkte O gleich On sei, auf dieselbe Art wie in §. 195. Wiederholt man hierauf diese Constructionen für verschiedene auf OS′ genommene Punkte n′, n″. . ., so erhält man die beiden Curven aa′a″ . . . und $\alpha\alpha'\alpha''$. ., deren Durchschnitt den glänzenden Punkt A gibt.

Die in §. 196 angegebenen Beschränkungen, hinsichtlich der Lage dieses Punktes, gelten auch in diesem und in den folgenden Fällen.

§. 204.

Wenn der Augpunkt unendlich weit entfernt ist. Unter dieser Voraussetzung sind alle reflectirten Lichtstrahlen einer und derselben Richtung parallel. Dieser Fall kommt vor bei einem Körper, welcher von einem in endlicher Entfernung liegenden Punkte S erleuchtet, aber als Projection auf einer Zeichnenebene gesehen wird. Denn diese Art der Darstellung erfordert, dass das Auge des Beobachters in unendlicher Entfernung in einer auf der Projectionsebene senkrechten Geraden sich befinde, damit die Gesichtslinien die projicirenden Linien der Zeichnung werden (Darst. Geom. §. 16). Zieht man daher durch den leuchtenden Punkt S eine Parallele mit der Richtung der reflectirten Lichtstrahlen, so kommt man auf den im vorigen §. erläuterten Fall der Fig. 5 zurück.

§. 205.

Taf. 12. Fig. 6. Wenn sowohl der leuchtende Punkt als der Augpunkt in unendlicher Entfernung sich befinden. Hier sind die einfallenden Strahlen alle einer gewissen Richtung parallel und die reflectirten einer andern, und nach dem was in den vorhergehenden §§. gesagt wurde, ist dieses der Fall, wenn ein Körper unmittelbar von der Sonne erleuchtet und als Projection gesehen wird. Zieht man alsdann durch einen beliebigen Punkt R eine Gerade RS parallel mit der vorgeschriebenen Richtung der Lichtstrahlen, und eine andere Gerade RO parallel mit der Richtung der reflectirten Strahlen, d. h. senkrecht auf die angenommene Projectionsebene, so zeigt die Halbirungslinie RN des Winkels ORS offenbar die Richtung, welche die Normale der Fläche an der Stelle des gesuchten glänzenden Punktes haben muss, so dass also die ursprüngliche Aufgabe nun folgende Gestalt annimmt.

§. 206.

Man soll auf einer gegebenen Fläche einen Punkt finden, für welchen die Normale mit einer gegebenen Linie RN parallel sei. Hat die Fläche eine beliebige Gestalt, so erfordert die allgemeine Auflösung, dass man beliebig zwei Gerade RT und RT′ senkrecht auf RN ziehe, hierauf die Berührungscurven zweier um die gegebene Fläche beschriebenen Cylinder suche, von denen der eine mit RT, der andere mit RT′ parallel ist; alsdann ist der Durchschnittspunkt dieser beiden Curven so gelegen, dass die ihm entsprechende Berührungsebene parallel mit TRT′, und daher die Normale parallel mit RN ist.

§. 207.

Ist die Fläche durch Umdrehung erzeugt, so liegt jede Normale in einer Meridianebene. Legt man daher durch die Axe eine Ebene parallel mit RN, so schneidet diese Ebene die Fläche in einer Meridiancurve, welche den gesuchten Punkt enthalten muss. Man darf daher nur an diese Meridiancurve eine mit RN parallele

Normale ziehen, was leicht geschehen kann, nachdem man die Curve in eine der Projectionsebenen aufgeklappt hat.

§. 208.

Man bemerke hier, dass, wenn man die Voraussetzung paralleler einfallender und paralleler reflectirter Lichtstrahlen auf eine cylindrische, conische und überhaupt auf eine entwickelbare Fläche anwendet, diese Fläche nicht blos einen glänzenden Punkt, sondern eine glänzende Linie (*ligne brillante*) darbietet. Denn für alle Punkte der geradlinigen Erzeugenden, welche durch den oben bestimmten Punkt A geht, ist die Berührungsebene gemeinschaftlich (Darst. Geom. §. 177) und mithin die verschiedenen Normalen parallel, so dass also alle die im §. 206 geforderte Eigenschaft besitzen, welche der Aufgabe genügt.

Unter den anderen Voraussetzungen kann es nur einen oder mehrere glänzende Punkte in endlicher Zahl geben, weil diese Punkte hervorgehen aus der Berührung des gegebenen Körpers mit einem Umdrehungsellipsoid, das aber offenbar zu einem Umdrehungsparaboloid wird, wenn entweder der leuchtende Punkt oder der Augpunkt unendlich weit entfernt sind.

§. 209.

Beispiel. Der glänzende Punkt auf einer Kugel. Die gegebenen Stücke und die daraus erhaltenen Resultate seien dieselben wie für Taf. 2, wo die Kugel als Mittelpunkt den Punkt (O, O′) hatte und von Lichtstrahlen beleuchtet wurde, die mit der Richtung (OS, O′S′) parallel waren. Man erinnere sich ferner der Hilfsprojection auf einer mit dem Lichtstrahle parallelen Vertikalebene X″Y″, auf welcher dieser Strahl sich in O″S″ projicirte. In Beziehung auf die Horizontalprojection nun sind alle reflectirten Strahlen vertikal (§. 204); und die Normale des glänzenden Punktes, welche in der Ebene des einfallenden und des reflectirten Strahles liegen und hier durch den Mittelpunkt (O, O′) gehen muss, befindet sich offenbar in der Vertikalebene OS. Diese Ebene aber schneidet die Kugel in einem grössten Kreise, der sich in seiner wahren Grösse in B″6″H″ projicirt. Verlängert man nun den Lichtstrahl S″O″ nach α'', und zieht die Vertikale O″6″, so ist die Gerade O″λ'', welche den Winkel α''O″6″ in zwei Hälften theilt, die Normale des glänzenden Punktes, der sich seitlich in λ'' und horizontal in λ projicirt. Taf. 2.

§. 210.

Der glänzende Punkt in Beziehung auf die Vertikalprojection der nämlichen Kugel ist ganz verschieden von dem vorhergehenden, denn die reflectirten Strahlen müssen hier als senkrecht auf der Vertikalebene XY betrachtet werden (§. 204). Die Normale des glänzenden Punktes muss also, da sie auch durch den Mittelpunkt (O, O′) geht, in der Ebene δ'O′S′ liegen, welche senkrecht auf der Vertikalebene und den Lichtstrahlen parallel ist. Diese Ebene δ'O′S′ schneidet die Kugel in einem grössten Kreise, welcher, um seinen Grundschnitt δ'O′S′ umgeklappt, mit A′δ'L′ zusammenfällt, wobei alsdann der Lichtstrahl (Oδ, O′δ') in die Lage O′δ'' kommt, welche man erhält, indem man die Senkrechte $\delta'\delta''$ gleich $\delta\varepsilon$ nimmt. Der reflectirte Strahl (Oγ, O′) endlich erhält seine Aufklappung in der Senkrechten O′γ''. Zieht man nun die Gerade O′μ'' so, dass sie den Winkel δ''O′γ'' in zwei Hälften theilt, so erhält man μ'' als Aufklappung des glänzenden Punktes. Um seine wahre Lage zu erhalten, muss man ihn durch eine auf δ'O′S′ senkrechte Gerade auf μ' beziehen.

Aber, wie zu Anfang dieses §. gesagt worden, man darf nicht vergessen, dass die beiden Punkte λ und μ' nicht die Projectionen eines und desselben Punktes der sphärischen Fläche sind.

Ueber die Abstufungen der Licht- und Farbenstärke.

§. 211.

Soll eine Zeichnung colorirt oder auch nur getuscht werden, so ist es, zur Hervorbringung der verschiedenen Lichteffecte, die sich auf einem erhabenen Gegenstande zeigen, nicht genug, die Licht- und Schattengrenzen, die Umrisse der Schlagschatten, die glänzenden Punkte und Linien seiner Oberfläche zu kennen; man muss auch die mehr oder minder lebhafte Helle seiner erleuchteten Theile, so wie die mehr oder minder starken Schatten derjenigen Regionen, welche kein directes Licht empfangen, zu beurtheilen wissen. Denn was die letztgenannten Regionen betrifft, so ist derjenige Theil derselben, welcher innerhalb des sichtbaren Umrisses fällt, stets sichtbar für den Beobachter, und oft, durch die Reflexe der Atmosphäre, auf eine sehr deutliche Art (§. 193).

Der Grad der Helle aber, den ein Flächenelement dem Beobachter darbietet, hängt von zwei Ursachen ab: 1) von der Menge directen oder reflectirten Lichtes, welche das Element empfängt; 2) von dem mehr oder minder grossen Theile dieser empfangenen Lichtmenge, den das Element nach dem Auge des Beobachters sendet. Die folgenden §§. nun enthalten eine Prüfung dieser beiden Ursachen, welche von verschiedenen Umständen abhängen, deren einige sogar sich jeder strengen Schätzung entziehen.

§. 212.

Taf. 12. Fig. 7. Intensität des von dem erleuchteten Gegenstande empfangenen Lichtes. Es sei MN ein Element, d. h. ein unendlich kleiner Theil der Oberfläche des Körpers T, der von dem leuchtenden Punkte S erhellt wird. Dieser Punkt sendet rings um sich her Lichtstrahlen, von welchen angenommen wird, dass sie nach allen Richtungen dieselbe Intensität haben. Die absolute Lichtmenge also, welche das Element MN empfängt, hängt einzig von der Anzahl der Lichtstrahlen ab, welche in dem Kegel MSN enthalten sind Wenn man nun, bei unverändert beibehaltener Grösse des Elements MN, seine Neigung oder seine Entfernung gegen den Punkt S sich ändern lässt, so ändert sich auch die Winkel-Capacität des Kegels SMN. Um aber diese Capacität auf eine bestimmte Art zu schätzen, schneide man den Kegel durch eine um S, als Mittelpunkt, beschriebene Kugel, deren Halbmesser SA man gleich der Einheit des Linienmaases genommen hat; alsdann ist der Flächeninhalt des Schnittes AB der Lichtmenge proportional, welche MN von S empfängt. Denn ein anderes Element M'N' wird offenbar zwei oder dreimal so viel Licht empfangen als MN, wenn der Schnitt A'B' an Fläche zwei oder dreimal grösser ist als der Schnitt AB.

§. 213.

Um noch ein genaueres Maas zu erhalten, bezeichne man durch k die Lichtmenge, welche der Punkt S nach einer kleinen ebenen Fläche senden würde, welche der Einheit des Flächenmaases, z. B. einem Quadrat-Millimeter, gleich wäre, wenn man diese Fläche in die Lage AB setzte. Offenbar ist k eine constante Grösse, welche durch die Erfahrung bestimmt werden muss, und welche nur mit der Natur des leuchtenden Punktes sich ändern kann; sie ist die Intensität der vom Punkte S entsendeten Lichtmenge in Beziehung auf die Einheit des Flächenmaases und auf die der Einheit des Linienmaases gleichgesetzte und in orthogonaler Richtung genommene Entfernung. Es drückt folglich $k \times AB$ die absolute Lichtmenge aus, welche in dem Kegel SMN enthalten ist, oder welche auf das Element MN fällt.

§. 214.

Schneidet man den nämlichen Kegel SMN noch einmal durch eine Kugel, deren Halbmesser gleich SM ist und durch R bezeichnet werde, so wird der Schnitt MD unendlich klein sein, in der Berührungsebene der Kugel liegen und folglich senkrecht sein auf SM, wie diess schon für AB der Fall ist. Da nun diese beiden parallelen, in den Kegel SMN gemachten Schnitte sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze verhalten, so ist

$$AB = \frac{MD}{R^2}$$

Ferner, weil alle Erzeugende des Kegels SMN Normalen an der Kugel sind, so kann man die Fläche MD als die Projection von MN auf der Berührungsebene der Kugel betrachten. Bezeichnet man daher durch α den spitzen Winkel SMN, welchen der Lichtstrahl SM mit dem Flächenelemente MN bildet, so hat man ferner:

$$MD = MN \sin . \alpha, \text{ und folglich: } k . AB = \frac{k . \sin . \alpha}{R^2} MN.$$

Diess ist das Maas der Lichtmenge, welche ein Element der Fläche T empfängt, und man sieht, dass es proportionirt ist der Grösse dieses Elements und dem Sinus der Neigung α, und dass es im umgekehrten Verhältnisse steht mit dem Quadrate der Entfernung des Elements vom leuchtenden Punkte. Der Coefficient von MN in letzterem Ausdrucke, nämlich

$$(1) \qquad L = \frac{k \sin \alpha}{R^2}$$

ist es eigentlich, was man die Intensität des Lichtes im Punkte M der Fläche T nennt. Denn nach dem Vorhergehenden drückt er die Lichtmenge aus, welche eine ebene, der Einheit des Flächenmaases gleiche Fläche erhalten müsste, wenn sie in allen ihren Punkten auf die nämliche Art erleuchtet würde, wie der Punkt M oder das Element MN. Man könnte ferner annehmen, die Fläche T sei durchaus in Elemente getheilt, welche alle gleich MN seien; alsdann würde die von jedem derselben empfangene Lichtmenge sich nicht anders als proportionirt mit L ändern.

§. 215.

Wird der Körper T nicht blos durch einen leuchtenden Punkt S, sondern durch einen leuchtenden Körper T′ erhellt, so sendet jeder Punkt eines Flächenelements von T′ nach dem Elemente MN ein mit SMN identisches Büschel Lichtstrahlen; denn, bei der unendlich kleinen Ausdehnung von SV ändern die Entfernung SM und der Winkel SMN sich nicht merklich. Die von SV nach MN gesendete Lichtmenge ist also dem Flächeninhalte von SV = ds′ proportionirt*), und die Intensität des von dem ganzen Körper T′ nach M gelangten Lichtes wird ausgedrückt durch das begrenzte Integral

Taf. 12. Fig. 7.

$$(2) \qquad L' = k \int \frac{\sin \alpha}{R_2} ds' = k \iint \frac{\sin \alpha}{R_2} \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} . dx' dy'$$

*) Die Schiefe des Elements SV gegen die Gerade SM bleibt hier unberücksichtigt, was gegen die Ansicht der Verfasser einer sehr beachtenswerthen im 1. Heft des *Journal de l'École polytechnique* eingerückten Abhandlung streitet. Diese haben nämlich über den Kegel MSV so geurtheilt, als wenn das Licht von M ausginge, um auf SV zu fallen; während die conischen Büschel, welche MN zur gemeinschaftlichen Basis und zu Spitzen die Punkte von SV haben, weder an Grösse noch an Zahl sich ändern, wenn das Element sich mehr oder weniger neigt. Die Kegel kommen im letztern Falle nur einander näher und mehr über einander zu liegen, aber die Menge der von SV nach MN gesendeten Lichtstrahlen bleibt stets dieselbe.

welches sich auf das ganze Flächenstück von T' bezieht, das für den Punkt M (x, y, z) sichtbar ist. Um den Calcul vorzubereiten, muss man aus der Gleichung $F(x', y', z') = 0$ der Fläche T' die partiellen Differentialien p' und q' entwickeln, hierauf die Grössen R^2 und $\sin \alpha$ als Functionen der Coordinaten x, y, z für den Punkt M, und der x', y', z' für den Punkt S ausdrücken, was nach den Formeln der analytischen Geometrie im Raume *) sehr leicht geschehen kann; endlich muss man die Integrationen vornehmen, indem man x, y, z als Constante betrachtet. Was die Grenzen der beiden auf einander folgenden Integralen betrifft, so entwickelt man sie, wie gewöhnlich, aus einer Gleichung $f(x', y') = 0$, die man aus der Projection der Berührungscurve eines um T' beschriebenen Kegels erhält, der seine Spitze in M hat; eine Curve, deren Bestimmung im 14. Kapitel der analytischen Geometrie im Raume gelehrt wird. Es lässt sich aber leicht voraussehen, dass die Integrationen sich sehr selten und nur in solchen Fällen ausführen lassen, die zu einfach sind, als dass man nöthig hätte, sie einem solchen Calcul zu unterwerfen, wesshalb denn die Auflösung des allgemeinen Problems hier nicht weiter verfolgt wird.

§. 216.

Werden alle Lichtstrahlen als parallel angenommen, so verwandelt die Formel (1) für die Intensität des empfangenen Lichtes sich in

$$L = k' \sin \alpha.$$

Denn unter dieser Voraussetzung ist der leuchtende Punkt S unendlich weit entfernt; man kann also alle Entfernungen R als gleich annehmen und R^2 wird der gemeinschaftliche Divisor aller Elemente der Fläche T, so dass er also in der Constanten k' mit einbegriffen sein kann. Eigentlich hätte man zugleich $R = \infty$ setzen sollen. Um sich aber genau auszudrücken, muss man nicht sagen, dass der Körper T von einem einzigen, unendlich entfernten Punkte erleuchtet werde, denn in diesem Falle wäre das Licht, das der Körper empfinge in Wahrheit Null. Er erhält vielmehr sein Licht von einem Körper T', der endliche Ausdehnungen hat, und in einer sehr grossen Entfernung sich befindet. Man muss also die Formel (2) anwenden, wo die constanten Factoren $\sin \alpha$ und R^2 aus dem Integral heraustreten, und welches sich somit in den Flächeninhalt A des vordern Theiles von T' verwandelt; dieser Flächeninhalt A muss aber zu R^2 ein endliches Verhältniss haben.

§. 217.

Es ist übrigens besser, den Fall, da die Lichtstrahlen parallel sind, unmittelbar zu behandeln, indem man das cylindrische Büschel betrachtet, welches unter einem Winkel α auf das Element MN fällt. Denn bezeichnet man durch ω den Flächeninhalt des senkrechten Cylinderschnittes, welcher offenbar der Anzahl Lichtstrahlen, die er umschliesst, proportionirt sein muss, so hat man offenbar

$$\omega = MN \,.\, \sin \alpha; \text{ und folglich ist } k' \omega = k' \,.\, \sin \alpha \,.\, MN$$

die absolute Lichtmenge, welche auf MN fällt, wenn k' diejenige bezeichnet, welche eine der Einheit des Flächenmaases gleiche, ebene Fläche erhalten würde, auf welche die Lichtstrahlen senkrecht fielen, aus einer Entfernung, welche hier beliebig sein kann. Hieraus folgt endlich, nach den zu Ende des §. 214 angestellten Betrachtungen, dass die Intensität des empfangenen Lichtes, für den Punkt M der Fläche T, zum Maase hat:

$$L = k' \sin \alpha.$$

*) Analytische Geometrie im Raume von C. F. A. Leroy, aus dem Französischen übersetzt von E. F. Kauffmann, Stuttgart, E. Schweizerbart's Verlagshandlung, 1840.

§. 218.

Intensität der scheinbaren Helle. Es ist nun ferner der Fortgang der Lichtstrahlen von dem erleuchteten Körper zum Auge des Beobachters zu untersuchen. Aber es ist schwer, diesen zweiten Theil des allgemeinen Problems auf eine befriedigende Weise zu behandeln, da die Physik auf ihrem gegenwärtigen Standpunkte nur wenig Aufschlüsse über die Modificationen, welche das Licht bei seinem Zusammentreffen mit matten Körpern erleidet, und über die Contextur ihrer äussern Umhüllung zu geben vermag. Die folgenden Betrachtungen müssen also mehr als ein Versuch und als eine Andeutung betrachtet werden von dem Wege, den man einzuschlagen hat, um derartige Fragen dem Calcul zu unterwerfen.

Es ist im §. 192 gesagt worden, dass auf einem matten Körper die äusseren Theilchen eine Menge verschieden geneigter Facetten darbieten, welche, nachdem sie einen Theil des empfangenen Lichtes absorbirt haben, den Rest desselben zurückwerfen, indem sie ihn nach allen Seiten hin zerstreuen; und obgleich durch diese beiden Ursachen das Licht sehr geschwächt wird, so folgt doch nicht weniger, dass das erleuchtete Element MN als eine strahlende Fläche betrachtet werden kann. Jeder Punkt also, wie M, sendet nach dem Taf. 12.
Auge ein Strahlenbüschel MPQ, dessen Basis die Oeffnung PQ der Pupille ist. Nun ist bekannt, dass alle Fig. 7.
Strahlen dieses Büschels, nachdem sie die Krystalllinse durchdrungen haben, sich hinter derselben in einem auf der Axe MO des Büschels, und, wenn das Gesicht gut ist, genau auf der Netzhaut liegenden Punkte m vereinigen, wodurch das Bild von M entsteht. Auf gleiche Weise bildet der Punkt N sich auf der Netzhaut in n ab, und das vollständige Bild von MN ist also mn.

§. 219.

Nimmt die Entfernung MO zu, so nimmt die Winkel-Capacität jedes einzelnen Kegels MPQ im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats dieser Entfernung ab (§. 214), und mithin ändert sich auch die Intensität des in m anlangenden Lichtes nach dem nämlichen Gesetze. Das Nämliche gilt von dem ganzen Bilde mn, welches durch eine viermal geringere Lichtmenge hervorgebracht wird, wenn die Entfernung MO sich verdoppelt. Nun wird es wohl mit den Gesetzen des richtigen Denkens übereinstimmen, wenn man den Eindruck, den der Sehne rv erhält, nach der Lichtmenge schätzt, durch welche er erschüttert wird; woraus also folgt, dass die scheinbare Helle des Elements MN sich im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats seiner Entfernung vom Auge ändert, *) wenn seine Neigung gegen MO dieselbe, und die Atmosphäre, durch welche die Lichtstrahlen dringen müssen, unberücksichtigt bleibt.

*) Dieses Resultat stimmt ganz mit dem überein, auf welches auch die Verfasser der in der vorigen Note angeführten Abhandlung gekommen sind; aber ihre Betrachtungsweise war weniger genau als die unsrige, denn sie haben über den Kegel OMN so geurtheilt, als käme das Licht von O, um auf MN zu fallen. Andrerseits gelangt Herr Brisson in seinen Zusätzen zu der Geometrie von Monge auf die Schlussfolge, dass die scheinbare Helle eines Elements MN unabhängig sei von seiner Entfernung vom Auge, weil, wenn das Bild mn, bei verdoppelter Entfernung, durch eine viermal geringere Lichtmenge hervorgebracht wird, es auch viermal kleiner ist, daher denn die Helle dieselbe bleibe. Diess wäre wahr für einen Beobachter, der von aussen dieses Bild mn betrachtete; das Organ unseres Auges aber muss, wenn es von zwei gleich grossen Flächenelementen ungleiche Lichtmengen empfängt, verschiedene Eindrücke erhalten, und daher in uns das Urtheil erzeugen, dass beide Elemente nicht gleich scheinbare Helle haben. Wir werden freilich zu gleicher Zeit auch urtheilen, dass das eine der beiden gleichen Elemente weiter entfernt sei, weil sein Bild kleiner ist. Nun kann neben dieser letztern Folgerung die erstere wohl bestehen; die Verbindung beider aber hingegen könnte höchstens auf den Schluss führen, dass beide Elemente gleiche absolute Lichtmengen haben empfangen müssen, woraus die Identität ihrer scheinbaren Helle keineswegs folgt.

§. 220.

Was nun jene Neigung betrifft, so wird sie stets nach dem spitzen Winkel θ geschätzt, den die Gesichtslinie OM mit der Berührungsebene der Fläche T am Punkte M bildet. Aber ihre Abnahme hat keinen merklichen Einfluss weder auf die Grösse noch auf die Anzahl der einzelnen Lichtkegel, wie MPQ, welche von den verschiedenen Punkten des unendlich kleinen Elements MN ausgehen; wesshalb es scheint, man könne schliessen, wie in §. 215, dass die Intensität des Lichtes durch eine grössere oder geringere Neigung des Elements MN nicht geändert werde. Aber hier stellt sich ein wesentlicher Unterschied heraus: MN ist keine selbstleuchtende, sondern eine matte und blos erleuchtete Fläche, und ein grosser Theil des von ihr zurückgeworfenen Lichtes kommt von den verschieden geneigten Facetten, welche sich in den Höhlungen befinden, von denen die äussere Umhüllung übersäet ist (§. 192); daher es denn geschieht, dass wenn MN von der auf MO senkrechten Richtung MG abweicht, sehr viele jener inneren Facetten durch die nächstanliegenden Erhöhungen verdeckt werden, und kein Licht mehr nach dem Auge O senden können. Man muss daher annehmen, dass mit der Abnahme des Neigungswinkels θ auch die von dem Elemente MN reflectirte Lichtmenge abnehme in dem Verhältnisse von MG zu MN, das offenbar durch den sin θ ausgedrückt wird.

§. 221.

Verbindet man dieses Resultat mit dem des §. 219, so folgt, dass die Lichtmenge, welche ein in der Entfernung $MO = \varrho$ befindliches und unter dem Winkel θ gegen diese Gerade geneigtes Element MN reflectirt, der Grösse $\frac{\sin\theta}{\varrho^2}$ proportionirt ist; und da die Intensität des von diesem Elemente empfangenen Lichtes bereits durch L ausgedrückt wurde, so erhält man also für die scheinbare Helle des Punktes M auf der Fläche T das Maas

$$\lambda = A\,\frac{\sin\theta}{\varrho^2} \times L, \qquad (4)$$

ein Ausdruck, in welchem man, je nach dem Falle, den man behandeln will, statt L seinen Werth aus einer der Formeln (1), (2), (3) substituiren muss, und in welchem A eine von der Natur des erleuchteten Körpers abhängige Constante bezeichnet; denn alle Körper absorbiren einen Theil des Lichts, das sie empfangen, und reflectiren nur einen mehr oder minder grossen Theil desselben, der von ihrer Farbe, ihrer natürlichen Beschaffenheit und dem Grade ihrer Politur abhängt.

§. 222.

Setzt man den Augpunkt O in unendliche Entfernung, wie bei den in ihren Projectionen ausgeführten Zeichnungen geschehen muss, oder auch nur in eine im Vergleiche mit den Dimensionen des erleuchteten Körpers sehr grosse Entfernung, so wird ϱ eine Constante, welche in den Coefficienten A mit aufgenommen werden kann; nimmt man ferner an, dass alle einfallenden Strahlen unter sich parallel seien, wie es gewöhnlich auch der Fall ist, so erhält man den Werth von L, der hier substituirt werden muss, aus (3), und die Formel (4) erhält nun folgende Gestalt:

$$\lambda = A \sin\alpha \sin\theta = A\,\frac{(1 - ap - bq)\,(1 - a'p - b'q)}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\,\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}\,(1 + p^2 + q^2)}$$

Hier ist die Richtung der Lichtstrahlen durch $x = az$, $y = bz$, die der Gesichtslinien durch $x = a'z$, $y = b'z$ ausgedrückt, und p, q sind die aus der Gleichung $F(x, y, z) = o$ der erleuchteten Fläche entwickelten partiellen Differentialien von z.

§. 223.

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, kann man stets die Axe der z so wählen, dass sie den Winkel SAO, den der Lichtstrahl und die Gesichtslinie mit einander bilden, in zwei Hälften theilt; nimmt man hierauf die Ebene dieses Winkels zur Ebene der xz, so hat man offenbar $b = o$, $b' = o$, $a' = -a$, und Formel (5) nimmt folgende einfache Gestalt an: Taf. 12. Fig. 8.

$$(6) \qquad \lambda = B \frac{1 - a^2 p^2}{1 + p^2 + q^2}.$$

§. 224.

Mittelst dieses analytischen Ausdruckes kann man den glänzenden Punkt der erleuchteten Fläche suchen, d. h. denjenigen, welcher die grösste scheinbare Helle zeigt. Bekanntlich muss zu diesem Zwecke den beiden Bedingungen $\frac{d\lambda}{dp} = o$ und $\frac{d\lambda}{dq} = o$ Genüge geleistet werden; diese aber sind hier:

$$(7) \qquad \frac{p\,[1 + a^2 (1 + q^2)]}{(1 + p^2 + q^2)^2} = o$$

$$(8) \qquad \frac{q\,(1 - a^2 p^2)}{(1 + p^2 + q^2)^2} = o.$$

Diesen Gleichungen nun wird gleichzeitig genügt, wenn man $p = o$ und $q = o$ setzt; hieraus aber folgt für das Maximum der scheinbaren Helle die Gleichung $\lambda = B$, welche anzeigt, dass jener Umstand stattfindet im Punkte M der Fläche, in welchem die Berührungsebene der Ebene der xy parallel ist. Die Normale in diesem Punkte muss also der Axe der z parallel sein. Aus der im §. 223 getroffenen Anordnung der Coordinatenaxen aber ersieht man, dass die Normale MN des glänzenden Punktes den von dem Lichtstrahle und der Gesichtslinie gebildeten Winkel S'MO' in zwei Hälften theilen muss, ein Resultat, welches vollkommen mit dem übereinstimmt, welches im §. 193 auf anderem Wege gefunden worden ist.

Wäre die erleuchtete Fläche cylindrisch oder entwickelbar, so würde vorstehende Bedingung für das Maximum nicht einen Punkt, sondern eine glänzende Linie liefern, weil die Normalen längs einer und derselben Erzeugenden alle parallel wären.

§. 225.

Die Gleichungen (7) und (8) lassen keine andere Auflösung mehr zu, als die im vorigen Paragraphen bereits gefundene; denn die Natur der Aufgabe fordert, dass alle Werthe, wodurch die Grösse λ negativ würde, verworfen werden. Aus demselben Grunde lässt diese Variable auch kein anderes Minimum zu, als Null, ein Werth, den man erhält, wenn man setzt:

$$(9) \qquad 1 - a^2 p^2 = o, \text{ woraus } p = \pm \frac{1}{a}.$$

Die erste dieser beiden Auflösungen zeigt alle Punkte der Fläche T an, für welche die Berührungsebene parallel ist mit der Geraden AS, welche durch $x = az$ dargestellt wurde. Denn wenn man in der allgemeinen Gleichung der Berührungsebene

$$Z - z = p\,(X - x) + q\,(Y - y)$$

$Y = o$ setzt, um ihren Grundschnitt mit der Ebene der xz zu finden, so erhält man eine mit $x = az$ parallele Gerade, woraus zur Genüge erhellt, dass die Berührungsebene selbst mit dieser Richtung parallel ist, was auch q sein mag. Es folgt hieraus, dass der Ort der Punkte auf der Fläche T, welche dem ersten Werthe von (9) entsprechen, genau die Licht- und Schattengrenze auf dem Körper T ist, und man kann in Wahrheit

sagen, dass die scheinbare Helle daselbst Null sei, indem die Reflexe der Atmosphäre bei den vorhergehenden Rechnungen unberücksichtigt gelassen wurden.

Die zweite Wurzel der Gleichung (9) zeigt alle diejenigen Punkte auf der Fläche T an, für welche die Berührungsebene parallel mit der Geraden AO wird, die durch $x = -az$ dargestellt wurde; mithin ist der Ort aller dieser Punkte der sichtbare Umriss des Körpers T, weil vorausgesetzt wird, der Beobachter befinde sich in unendlicher Entfernung in der Richtung AO. Für diesen Umriss aber wird die scheinbare Helle wirklich Null, weil die auf ihm liegenden Punkte aufhören von dem Beobachter gesehen zu werden.

§. 226.

Man kann sich auch zur Aufgabe stellen, auf der Oberfläche des erleuchteten Körpers die Curven von gleicher Lichtstärke *(courbes d'égale teinte)* zu finden, d. h. die unendlich schmalen Zonen, deren jede in allen ihren Punkten dieselbe scheinbare Helle zeigt, und daher eine durchaus gleich starke Färbung erhalten muss. Zu diesem Zwecke darf man nur den aus (4) und (6) erhaltenen Werth von λ einer beliebigen Constanten gleich setzen; und wenn man hiebei die Annahme festhält, dass die Lichtstrahlen sowohl als die Gesichtslinien unter sich parallel seien, so erhält man die Bedingungsgleichung

$$(10) \qquad \frac{1 - a^2 p^2}{1 + p^2 + q^2} = c,$$

welche mit der Gleichung $F(x, y, z) = o$ für die Oberfläche des erleuchteten Körpers verbunden, die die gesuchten Curven liefert. Jede derselben unterscheidet sich von den anderen durch den besondern Werth, den man der Constanten c beilegt; dieser Werth aber muss stets zwischen 0 und 1 enthalten sein, weil die Grösse λ zum Minimum Null (§. 225) und zum Maximum B hat (§. 224).

§. 227.

Für die Kugel z. B. hat man die Gleichung

$$(11) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Hier nun ist $ap = -\frac{x}{z}$, $q = -\frac{y}{z}$, so dass also die Bedingungsgleichung (10) folgende Gestalt erhält:

$$(12) \qquad z^2 - a^2 x^2 = cr^2,$$

welche, mit der Gleichung für die Kugel combinirt, folgendes Resultat liefert:

$$(13) \qquad y^2 + (1 + a^2) x^2 = r^2 (1 - c).$$

Die Gleichungen (12) und (13) sind also die Projectionen der Curven von gleicher Lichtstärke oder gleich starker Färbung auf der Kugel, und man sieht, dass sie sich als Hyperbelstücke auf die dem Lichtstrahle und der Gesichtslinie parallele Ebene projiciren, während ihre Projectionen auf derjenigen Ebene, welche senkrecht auf der Normalen des glänzenden Punktes steht, Ellipsen sind. Diese Ellipsen sind immer reell, weil, wie oben gesagt worden, die Constante stets zwischen 0 und 1 enthalten sein muss.

§. 228.

Für irgend eine beliebige entwickelbare Fläche hat man stets $p = f(q)$, welche Gleichung mit der Bedingung

$$\frac{1 - a^2 p^2}{1 + p^2 + q^2} = c$$

combinirt, nur auf constante Werthe von p und q, nämlich auf

$$p = \varphi(c) \text{ und } q - \psi(c)$$

führen kann. Hieraus aber folgt, dass bei solchen Flächen jede Curve von gleich starker Färbung, die einem und demselben Werthe von c entspricht, durch eine Reihe von Punkten gebildet wird, für welche die Berührungsebene unverändert bleibt; die Curven von gleich starker Färbung sind also hier nichts anderes, als die verschiedenen geradlinigen Erzeugenden der entwickelbaren Fläche, und diese Folgerung gilt ins Besondere für Cylinder und Kegel.

§. 229.

Will man nun die Form eines erleuchteten Körpers, z. B. der Kugel in §. 227, durch eine getuschte Zeichnung genau darstellen, so muss man auf letzterer, durch leichte Bleistiftzüge, die Curven von gleich starker Färbung angeben, welche sehr nahe an einander liegenden Werthen von c entsprechen, wie z. B.

$$c=1,\ c={}^{9}/_{10},\ c={}^{8}/_{10},\ c={}^{7}/_{10},\ldots,\ c={}^{1}/_{10},\ c=0.$$

Die erste dieser Curven reducirt sich offenbar auf einen einzigen Punkt, nämlich auf den glänzenden Punkt der Fläche, um welchen herum man einen kleinen Raum ganz weiss lassen muss. Auf dem übrigen Raume trägt man eine erste Lage Tusche von sehr schwacher Intensität auf, und verbreitet sie gleichförmig über die ganze Fläche bis zur letzten Curve. Hierauf trägt man zwischen der zweiten und letzten Curve eine zweite Lage Tusche auf; alsdann zwischen der dritten und letzten Curve eine dritte Lage u. s. w. Endlich muss man noch diese verschiedenen Zonen mittelst eines in reines Wasser eingetauchten Pinsels in einander verschmelzen, damit beim Uebergange von einer Zone zur andern keine Grenze merklich werde. Die Region des Körpers ausserhalb der letzten Curve, welche dem Werthe $c=0$ entspricht (und welche gewöhnlich ein System zweier verschiedener Linien bildet, wie aus §. 225 erhellet), müsste eine noch dunklere und gleichförmige Tusche erhalten, wenn man nicht auf die atmosphärischen Reflexe Rücksicht nehmen müsste, durch welche diese Region ein wenig erhellt wird, besonders in gewissen Parthieen, von denen später die Rede sein wird.

§. 230.

Der geometrischen Strenge wegen muss hier bemerkt werden, dass die verschiedenen Lichtgrade, welche den Werthen von $c={}^{9}/_{10},\ {}^{8}/_{10},\ {}^{7}/_{10},\ldots$ entsprechen, nicht genau erhalten werden durch ein wiederholtes Auftragen von 1, 2, 3... unter sich identischer Tuschlagen auf eine und dieselbe Zone; das Gesetz, durch welches das Verhältniss zwischen den Werthen von c und der Zahl n der Tuschlagen bestimmt wird, ist vielmehr dasjenige, welches zwischen den Zahlen und ihren Logarithmen für eine nur wenig unter der Einheit genommene Grundzahl besteht. Ueber diese Materie wird man mit Interesse die Abhandlung lesen, welche in der Anmerkung zu §. 215 citirt wurde, und wo auch die sehr eleganten graphischen Operationen angegeben sind, mittelst welcher die Verfasser nur mit Anwendung des Lineals und Cirkels, die Curven von gleich starker Färbung auf der Kugel construirt haben. Aber es wurde für unnöthig erachtet weiter nach Verfahrungsarten zu trachten, durch welche die aus der Theorie geschöpften praktischen Anwendungen mehr Genauigkeit erhalten könnten. Denn da die Voraussetzungen, auf welchen diese Theorie beruht, gewisse noch wenig bekannte Erscheinungen und die Reflexe der Atmosphäre ganz ausschliessen, so kann sie nur dazu dienen, dem Zeichner Andeutungen zu geben, wie er der Wahrheit nahe kommen kann. Diese Andeutungen aber müssen immer wieder durch den Eindruck, den die Betrachtung erleuchteter Körper in verschiedenen Lagen, in ihm hervorbringt und durch die Geschicklichkeit in der Führung des Pinsels modificirt werden.

Von den Reflexen der Atmosphäre.

§. 231.

Bisher wurde angenommen, die Lichtstrahlen bewegten sich frei im leeren Raume; in Wahrheit aber müssen sie die Atmosphäre durchschneiden, welche, da sie nicht vollkommen durchsichtig ist, einen Theil dieser Strahlen aufhält, und sie gleich den undurchsichtigen Körpern zurückwirft. Fällt also ein Büschel Lichtstrahlen auf ein Flächenelement eines erleuchteten Körpers, so hat es schon von seiner ursprünglichen Intensität verloren. Freilich ist dieser erste Verlust nur wenig merkbar, besonders wenn es sich vom Sonnenlichte handelt, und dann ist er auch für alle den Beobachter umgebenden Gegenstände als gleich anzunehmen, weil ihre gegenseitigen Entfernungen sehr klein sind im Vergleiche mit der Grösse der Luftschichte, welche die Lichtstrahlen durchschneiden müssen, um zu jenen Gegenständen zu gelangen. Aber auf dem Rückwege des Lichts von dem erleuchteten Körper bis zu dem Auge des Beobachters wird, durch die dazwischen liegenden Lufttheilchen, die scheinbare Helle merklich vermindert und auf einen viel schwächern Grad gebracht, als sie in den Formeln (5) und (6) dargestellt ist. Ohne nun das Gesetz dieser Abnahme mit mathematischer Schärfe ausdrücken zu wollen, ist doch so viel klar, dass dieselbe grösser wird mit der Entfernung des Beobachters von dem erleuchteten Gegenstande. Da ferner die Lichtstrahlen, welche von den Theilchen der dazwischen liegenden Luft nach dem Auge reflectirt werden, die Farbe dieser Theilchen annehmen, so erhält durch die Mischung dieser Strahlen mit denen, welche unmittelbar von jenem Gegenstande herkommen, letzterer eine bläuliche Färbung, die um so entschiedener wird, je beträchtlicher die Masse der dazwischen liegenden Luft ist, so dass also entfernte Gegenstände in ganz anderem Lichte und sogar in anderer Farbe erscheinen werden.

§. 232.

Der Einfluss der zwischenliegenden Luft zeigt sich auch bei den Schatten: diese müssten absolut schwarz und unsichtbar erscheinen ohne die Anwesenheit der umliegenden Gegenstände und besonders der Atmosphäre, welche nach jenen beschatteten Theilen Lichtstrahlen zurückwerfen, durch welche die Dunkelheit gemildert und ihre Formen für das Auge erkennbar gemacht werden. Mit diesen reflectirten Strahlen aber, welche die Schattenregion eines Körpers in das Auge sendet, verbinden sich auch die von den Theilchen der dazwischenliegenden Luft nach dem Auge reflectirten Strahlen; diese tragen mit zur Erleuchtung der Schatten bei, und verleihen denselben eine bläuliche Färbung, welche jedoch nur dann merklich wird, wenn die Masse der zwischenliegenden Luft ein wenig beträchtlich ist.

§. 233.

Soll daher auf einem Gemälde der Zwischenraum, welcher zwei ungleich entfernte Gegenstände trennt, merklich gemacht werden, so ist es Grundsatz, den entferntern mit weniger lebhaften Farben zu malen, indem man die hellen Farben dämpft und die Intensität der Schatten schwächt. Handelt es sich aber von der Darstellung sehr entfernter Gegenstände, so müssen dieselben die allgemeine Färbung der Atmosphäre erhalten.

§. 234.

„Von diesem wohlbekannten Grundsatze *) wird nicht selten ein Missbrauch gemacht, der hier bezeichnet werden soll. Nach dem eben Gesagten zeigt sich nur dann, wenn der Unterschied der Entfernungen verschiedener

*) Dieser §. ist aus den von Brisson veröffentlichten *Leçons* von *Monge*, die einen Anhang zu der darstellenden Geometrie des Letztern bilden, gezogen.

Gegenstände von unserm Auge beträchtlich wird, ein merklicher Unterschied in den Wirkungen, welche die zwischenliegenden Luftmassen auf das von jenen Gegenständen zurückgesendete Licht hervorbringen. Hat man z. B. die Vorderseite eines Gebäudes vor Augen, und bildet ein Theil derselben einen Vorbau, dessen Vorsprung ein Meter beträgt, so wird die Luftschichte von 1 Meter Dicke, welche die vom Hinterbau herkommenden Strahlen mehr zu durchlaufen haben als die anderen, denselben nichts oder vielmehr so wenig von ihrer Intensität rauben, dass der Verlust für unsere Sinne unmerklich ist. Wird nun angenommen, dass Vor- und Hinterbau parallel und auf dieselbe Weise erleuchtet seien, so ist es unrichtig, ihnen eine in der Stärke verschiedene Färbung zu geben, wie viele Zeichner thun; sie erscheinen uns gleich erleuchtet, und müssen in der Darstellung gleiche Helle erhalten.

„Gleichwohl unterscheiden wir in der Wirklichkeit vollkommen, dass der eine Theil jener Vorderseite einen Vorsprung vor dem andern hat: hiebei ist nicht nothwendig, dass der Vorbau einen Schatten auf den zurückstehenden Theil werfe; die Richtung der Sonnenstrahlen und die Lage des Auges können von der Art sein, dass nirgends ein Schatten zum Vorscheine kommt, und doch urtheilt der Beobachter leicht, welche Ebene die nähere und welche die entferntere ist. Es ist wesentlich zu untersuchen, durch was unser Urtheil in einem solchen Falle geleitet wird, damit der Maler in seiner Darstellung die Mittel wo möglich nachahmen könne, welche in der Wirklichkeit unserem Auge zu einem richtigen Urtheile verhelfen.

„Wir wollen uns wieder die Vorderseite eines Gebäudes vorstellen von völlig gleichem Farbentone, und deren einer Theil einen Vorbau gegen den andern bilde. Bringt man nun irgend ein Hinderniss, z. B. ein Brett, so an, dass es die Kante, womit der Vorbau endigt, unserm Anblick verbirgt, so wird es unmöglich für uns, zu beurtheilen, welcher von den beiden Theilen der Façade der nähere ist; wird aber das Hinderniss wieder weggenommen, so stellt sich sogleich das richtige Urtheil wieder ein. Aus dieser sehr einfachen Erfahrung lernen wir also, dass es die Art ist, wie das Licht auf die Endkante des Vorbaues wirkt, durch welche wir von dem Vorhandensein eines Vorsprungs in Kenntniss gesetzt werden. Wäre diese Kante eine gerade mathematische Linie, so wäre die Wirkung des Lichts auf dieselbe Null oder vollkommen unmessbar, und wir würden also nicht unterscheiden können, welches der vorspringende Theil der Façade ist. Diese Kante aber ist nie eine mathematische Linie; das Material, aus welchem sie besteht, hat keine absolute Dichtigkeit; die nstrumente, mit welchen es bearbeitet wurde, sind nicht vollkommen; man hat bei der Bearbeitung nicht die äusserste Vorsicht angewendet, und so war also die Kante, wie sie aus den Händen der Arbeiter hervorging, schon weit entfernt von mathematischer Genauigkeit. Unterdessen hat Alles, was dieselbe von aussen treffen, streifen oder reiben konnte, mit dazu beigetragen, sie noch mehr abzustumpfen, und statt also eine scharfe, lineäre Kante zu sein, ist sie vielmehr eine abgerundete Fläche, die man als einen Theil eines vertikalen kreisförmigen Cylinders von sehr kleinem Halbmesser betrachten kann. So ist es denn also die Art, wie das Licht auf diese cylindrische Fläche wirkt, und wie es von derselben nach unserm Auge gesendet wird, durch welche wir den Vorsprung gewahr werden.“

§. 235.

Nach den in den §§. 221 und 224 entwickelten Sätzen muss es auf dem kleinen Cylinder, der die Endkante des Vorbaues bildet, auf derjenigen Seite, woher das Licht kommt, eine glänzende Linie geben, deren Helle stärker ist als die der Façade. Diese Linie hebt sich aber um so stärker aus dem Grunde der Façade hervor, je schneller die Abstufung der Lichtstärke bei einem Cylinder von so kleinem Halbmesser ist, und folglich ist es also diese Glanzlinie, welche uns von dem Vorhandensein eines Vorsprungs an dieser Stelle in Kenntniss setzt. Auf der dem Lichte entgegengesetzten Seite des Vorbaues hingegen haben alle Erzeugenden

des kleinen Cylinders, der dort die Kante bildet, eine schwächere, scheinbare Helle als die Façade, und da auch hier eine sehr schnelle Abstufung der Lichtstärke stattfindet, so stellt sich diese Kante als eine dunkle Linie dar, welche an dieser Seite uns den Vorsprung gewahr werden lässt.

Will man nun alle diese Umstände in einem Gemälde darstellen, so muss man den beiden Parallelebenen, aus welchen die Façade besteht, einerlei und gleichstarke Färbung ertheilen; die Kanten aber, welche auf der Schattenseite sich befinden, muss man etwas dunkler, und diejenigen, welche auf der Lichtseite sind, etwas heller angeben.

§. 236.

Vom atmosphärischen Strahle. Es ist gesagt worden, dass die Lichtstrahlen, welche die Atmosphäre durchschneiden, zum Theil durch die nicht vollkommen durchsichtigen Lufttheilchen zurückgehalten werden. Diese Theilchen reflectiren nach Art der undurchsichtigen Körper die Lichtstrahlen, und zerstreuen sie nach allen Seiten, wodurch ein atmosphärisches Licht erzeugt wird, dessen Intensität beträchtlich genug ist, um diejenigen Körper, auf welche keine Sonnenstrahlen fallen, sichtbar zu machen. Dieselbe Ursache ist es auch, welche die Morgen- und Abenddämmerung hervorbringt. Die Erfahrung aber lehrt, dass es für jeden Stand der Sonne eine Richtung gibt, in welcher diese Reflexe eine grössere Intensität haben als in jeder andern, und diese Richtung wird der atmosphärische Hauptstrahl genannt.

Taf. 12. Fig. 9. Man stelle sich einen undurchsichtigen Körper T von beliebiger Form in einer solchen Höhe über dem Boden XY vor, dass derselbe ganz isolirt und nach allen Seiten von einer grossen Masse Luft umgeben ist. Wenn der Körper in dieser Lage von den mit SA parallelen Sonnenstrahlen erleuchtet wird, so üben die Reflexe der Atmosphäre ihren grössten Einfluss in der Richtung RA aus, welche genau der Richtung SA entgegengesetzt ist. Dieses hat man daraus zu erklären gesucht, dass man die Luft als aus lauter Kügelchen bestehend betrachtete, auf welchen jeder einfallende Lichtbüschel sich um so mehr aus einander breitet, einen je grössern Winkel er mit der Normale bildet, so dass also die Intensität des reflectirten Lichtes mit der Vergrösserung dieses Winkels abnähme, während sie in RA ihr Maximum erreicht *). Wie dem auch sei, so wird dieser Satz hier als eine durch die Erfahrung bestätigte Thatsache angenommen, und es folgt daraus, dass der isolirte Körper T sich in denselben Umständen befindet, als wenn er auf der einen Seite von den mit SA parallelen Lichtstrahlen und auf der andern von einem weit schwächern mit RA parallelen Lichte erleuchtet würde; die in Beziehung auf das directe Licht in Schatten liegende Region desselben wird also ebenso gut Abstufungen der Lichtstärke und einen glänzenden Punkt darbieten, wie die erleuchtete Region.

§. 237.

Taf. 12. Fig. 10. Am häufigsten aber kommt es vor, dass die von uns beobachteten Körper sich in der Nähe des Bodens oder gar auf demselben befinden. In diesem Falle kann der Körper T nur von dem über XY liegenden Theil der Atmosphäre Reflexe erhalten und unter diesen letzteren würden diejenigen, welche die meiste Intensität haben, mit der Horizontalen HA parallel sein, weil sie sich am meisten dem absoluten Maximum rA nähern. Es ist aber zu bemerken, dass die Luftkügelchen sich gegenseitig Licht zuwerfen, und dass also die über AH befindliche Region der Atmosphäre, weit erhellter ist als die untere, die wegen der Nähe des Bodens

*) Man sehe hierüber die *Science du dessin* von *M. Vallée* (pag. 309), ein Werk, aus welchem die Hauptresultate dieses §. entlehnt sind, und in welchem dieser gelehrte Ingenieur auf eine neue und gründliche Art sehr interessante optische Fragen behandelt hat. Man findet daselbst auch treffliche Regeln und Rathschläge in Betreff der Luftperspective und des Tuschens.

dieser Gegenseitigkeit entbehrt. Nimmt man diese Ursache und die sehr ungleichen Luftmassen, welche die Richtung AH umgeben, in Rechnung, so wird man leicht einsehen, dass der atmosphärische Hauptstrahl RA sich über HA erheben mus, und man kann den Winkel RAH auf ungefähr 20 Grade schätzen, so lange die Höhe der Sonne über dem Horizonte nicht mehr als 25° beträgt. Hiebei wird, als sich von selbst verstehend, angenommen, dass der atmosphärische Strahl RA und der Sonnenstrahl SA sich in einerlei Vertikalebene befinden.

Wird der Winkel SAD grösser, so verliert der grösste Reflex, der, ohne die gegenseitige Wirkung der verschiedenen Theile der Atmosphäre auf einander, stets die Richtung HA behalten würde, von seiner Intensität, weil er sich mehr von dem nach rA gerichteten absoluten Maximum entfernt; es wird also dieser Reflex HA nun noch mehr von dem Lichte der obern Region der Atmosphäre beherrscht werden, und der atmosphärische Hauptstrahl RA wird eine noch grössere Erhebung erhalten als im vorhergehenden Falle. Gewöhnlich nimmt man an, dass wenn der Winkel SAD eine Grösse von 45° hat, alsdann der Winkel RAH ebenfalls 45° in sich fasst; so dass also bei diesem Stande der Sonne, welcher der günstigste für ein Gemälde ist, der Sonnenstrahl SA und der atmosphärische Strahl RA senkrecht auf einander stehen.

§. 238.

Wenn man aus der für die Lichtstrahlen angenommenen Richtung die des atmosphärischen Strahles RA näherungsweise bestimmt hat, so suche man diejenigen Punkte der beschatteten Region auf diesem Körper, für welche die Berührungsebene auf RA senkrecht ist, oder dieser senkrechten Lage nahe kommt. An diesen Stellen der Oberfläche haben alsdann die Reflexe der Atmosphäre die grösste Intensität, und man muss daher auf der getuschten Zeichnung um diese Punkte herum die Dunkelheit der Farbe merklich erhellen. Aber auch auf dem übrigen Theile der beschatteten Region darf die Farbe nicht zu dunkel gehalten werden, weil auch hier die Reflexe der Atmosphäre noch ein wenig merklich sind.

§. 239.

Es sei z. B. (BEFG, B′B″F″F′) ein cylindrischer Thurm von 12 bis 15 Meter Höhe, der von den mit SA parallelen Sonnenstrahlen erleuchtet werde. Die Schatten- und Lichtgrenze wird von den beiden Geraden (E, E′E″) und (G, E′E″) gebildet, welche die dunkelsten auf der Umfläche sein werden; die Erzeugende (B, B′B″) wird die hellste sein, weil die ihr entsprechende Berührungsebene den grössten Winkel mit SA bildet; von hier an nimmt das Licht gegen E und G hin stufenweise ab. Die Erzeugende (F, F′F″) wird, obgleich sie im Schatten liegt, die am wenigsten dunkle der Region EFG sein, weil die ihr entsprechende Berührungsebene der senkrechten Lage gegen den atmosphärischen Hauptstrahl RA am nächsten kommt. Die Helle wird daher von E gegen B und von E gegen F stufenweise zunehmen, aber in letzterer Region viel schwächer als in ersterer. Aehnliche Umstände finden in der Region BGF statt. Was nun aber hier von jedem Punkte der Basis des Cylinders gesagt worden, gilt, im Allgemeinen, für die ganze Länge einer und derselben Erzeugenden, weil die Berührungsebene in allen Punkten dieser Geraden dieselbe Neigung hat. Taf. 12. Fig. 11.

Da jedoch das Licht, welches auf den vordern Boden L′B′ fällt, nach dem Fusse des Thurmes reflectirt wird, so muss der untere Theil der Erzeugenden (B, B′B″) noch mehr erleuchtet sein als der obere, und dieser Einfluss des Bodens wird sich auch auf die in der Nähe von B liegenden Erzeugenden des Bogens bBg fühlbar machen und zwar bis zur Höhe von ungefähr einem Meter, mehr oder weniger, je nach der Beschaffenheit des Bodens. Dagegen wird der obere Theil der Erzeugenden (F, F′F″) etwas weniger dunkler sein als der untere, weil die Spitze des Thurms den Reflexen, welche von der unterhalb F″ befindlichen

Luftmasse von unten nach oben gesendet werden, mehr ausgesetzt ist, als der untere Theil desselben. Ueberdiess ist der atmosphärische Strahl für den Punkt F″ der, dem Sonnenstrahle entgegengesetzten Richtung näher, und daher von grösserer Intensität, als der für den Punkt F′.

§. 240.

Was den auf den Boden geworfenen Schatten betrifft, so wird er gegen den Fuss (F, F′) des Thurmes hin sehr dunkel sein; mit der Entfernung von diesem Punkte aber wird er nach und nach ein wenig heller werden, weil jeder Punkt M, N, ... des Bodens den Reflexen einer um so grössern Luftmasse ausgesetzt ist, je weiter er sich von dem Thurme entfernt; denn derjenige Theil der Atmosphäre, dessen Reflexe für den Punkt M von dem Thurme aufgehalten werden, ist in einem Kegel enthalten, welcher durch eine Gerade erzeugt wird, die, während sie beständig durch den Punkt M geht, über die Oberfläche des Thurmes hingleitet. Da diese Reflexe jedoch eine ziemlich schiefe Richtung haben, so können sie die Intensität des Schattens auf dem Boden nur schwach mindern.

Die vorangehenden Bemerkungen und alle in diesem Kapitel entwickelten theoretischen Regeln, weit entfernt, den Zeichner des Studiums der Natur entheben zu wollen, haben vielmehr den Zweck, dieses Studium fruchtbarer für ihn zu machen, indem sie ihm zeigen, nach welchen Grundsätzen er die von ihm beobachteten Lichteffecte zu beurtheilen und die zufälligen Ursachen, welche oft eine Abänderung von den allgemeinen Resultaten veranlassen, zu bemessen habe. Durch ein solches rationelles Studium wird er alsdann fähig werden, jene verschiedenen Effecte vorausbestimmen und sie wieder geben zu können, auch wenn er keine Modelle mehr vor Augen hat.

Zweiter Abschnitt.

Linear-Perspective.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Bemerkungen.

§. 241.

Ein Körper ist sichtbar für uns, wenn unsere Augen von den Lichttheilchen getroffen werden, die, im Fall er ein selbstleuchtender Körper ist, unmittelbar von ihm ausgehen, oder welche, wenn er ein erleuchteter und matter Körper ist, von seiner Oberfläche nach allen Richtungen reflectirt werden. In beiden Fällen zeigt die Erfahrung, dass jedes dieser Lichttheilchen sich beständig in gerader Linie fortbewegt, so lange es in einerlei Mittel bleibt, und auf kein Hinderniss stösst, wodurch es absorbirt oder zurückgeworfen wird. Man nennt diese Gerade einen Lichtstrahl, muss hierunter aber vielmehr die Reihe von Lichttheilchen verstehen, welche unaufhörlich von einem und demselben Punkte des erleuchteten Gegenstandes ausströmen und in derselben Geraden fortgehen. Ein Sehstrahl hingegen ist eine eingebildete Gerade, welche man sich von dem Auge des Beobachters nach einem Punkte des betrachteten Gegenstandes gezogen denkt. Es heisst hier ausdrücklich von dem Auge (nicht von den Augen) des Beobachters, weil man sich in der Geometrie auf einen einzigen Augpunkt beschränken muss; in den gewöhnlichen Fällen sind auch die von unseren beiden Sehorganen empfangenen und dem Gehirn mitgetheilten Eindrücke ganz dieselben und bringen daher auch in unserer Seele nur eine und dieselbe Empfindung hervor, so dass wir nur die Vorstellung von einem einzigen Objecte erhalten, den Fall ausgenommen, da wir dem Gegenstande allzu nahe sind, als dass ein deutliches Sehen statt finden könnte. *)

*) Die Weite des deutlichen Sehens beträgt für kleine Gegenstände gewöhnlich 20 bis 25 Centimeter; bringt man aber einen sehr kleinen Körper auf eine Weite von 3 oder 4 Centimetern vor die Augen, so sieht man ihn doppelt, weil alsdann die beiden Augenaxen sehr schief und entgegengesetzt gerichtet sind, so dass die beiden Eindrücke nicht mehr dieselben sein können. Ferner sieht man allerdings auf einer convexen Fläche (dem Schafte einer Säule z. B.), welche 2 oder 3 Meter entfernt ist, mit beiden Augen einige Punkte, welche man mit einem Auge nicht wahrnehmen würde, weil der scheinbare Umriss (§. 242) in beiden Fällen nicht derselbe bleibt. Gewöhnlich aber sind diese Verschiedenheiten kaum merkbar, und dann gehören sie zu den unvermeidlichen Ursachen, welche uns ein Gemälde auf einer ebenen Tafel von einem Gegenstande im Raume unterscheiden lassen.

§. 242.

Taf. 13. Fig. 1. Die erste Folge, welche sich aus diesen Principien ergibt, ist, dass man von einem festen Augpunkte O aus, nie die ganze Oberfläche eines isolirt gestellten Körpers AMBQ übersehen kann, selbst wenn dieselbe in allen ihren Theilen durch mehrere Lichtquellen erleuchtet wäre. Denn denkt man sich aus O alle Sehstrahlen oder Gesichtslinien OM, ON, OP... gezogen, welche Tangenten an dieser Oberfläche sind, so bilden sie zusammen einen Kegel, der den Körper in einer Linie MNPQRM berührt, jenseits welcher jeder Punkt der Oberfläche, wie D, unsichtbar sein muss, weil die Lichtstrahlen, welche von D ausgehen, nicht anders zu dem Auge O gelangen könnten, als indem sie den, als undurchsichtig vorausgesetzten Körper durchdrängen. Diese Linie MNPQR, welche sich gewöhnlich mit dem Augpunkte ändert, heisst der scheinbare Umriss des von O aus gesehenen Gegenstandes, und kann, für jeden besondern Fall, nach den Methoden des ersten Kapitels im fünften Abschnitte der Darstellenden Geometrie bestimmt werden.

§. 243.

Fig. 2. Man bemerke jedoch, dass wenn die äussere Umhüllung des Körpers keine stetige geometrische Fläche ist, wie z. B. wenn ein Cylinder durch zwei Kreise begrenzt wird, alsdann der umschriebene Kegel aus zwei den Cylinder berührenden Ebenen OPQ, OMS und zwei conischen Flächenstücken besteht, welche die Bögen MNP und QRS zu Grundlinien haben. In diesem Falle ist der scheinbare Umriss die gemischte Linie MNPQRSM. Ist der Körper ein Polyeder, so besteht der umschriebene Kegel aus mehreren durch den Punkt O und verschiedene Kanten so gelegte Ebenen, dass keine der letzteren den Polyeder schneidet. Die Wahl dieser Ebenen aber ist für jeden besondern Fall so leicht zu treffen, dass es unnöthig ist, hiebei länger zu verweilen. Nur das mag gesagt werden, dass man im Allgemeinen eine unbegrenzte Gerade, welche beständig durch O geht, sich so bewegen lassen muss, dass sie in jeder ihrer Lagen die äussere Umhüllung des Körpers streift, ohne sie je zu durchdringen: die Reihe der Punkte, welche der beweglichen Geraden und diesem Körper gemeinschaftlich sind, bildet alsdann den sichtbaren Umriss, oder die Grenze der für den Beobachter in O sichtbaren Theile.

§. 244.

Taf. 13. Fig. 3. Von Wichtigkeit ist es auch, dass man zwar die Richtung, in welcher der von einem bestimmten Punkte A des Gegenstandes ausgehende Lichtstrahl ins Auge gelangt, so wie den Sehwinkel AOB, unter welchem eine der Dimensionen dieses Gegenstandes erscheint, richtig angeben kann; dass man aber nicht, wenigstens nicht *a priori*, die Entfernung, in welcher der Gegenstand sich befindet, noch die absolute Grösse von AB zu beurtheilen vermag; denn die Gerade A′B′ würde im Auge das nämliche Bild erzeugen wie AB. Dieser Behauptung scheint die Erfahrung zu widersprechen, dass man bei gewöhnlichen Sehweiten über die Entfernung und Form der Körper ziemlich genaue Urtheile fällt; man weiss in der Regel wohl zu unterscheiden, welcher von zwei Körpern der vordere, und mithin welcher der kleinere ist, wenn auch beide unter demselben Gesichtswinkel erscheinen: aber hiebei wird unser Urtheil durch die Vergleichung mit anderen benachbarten Gegenständen geleitet, deren Grösse oder Entfernung uns durch unmittelbares Betasten oder durch wirkliche Messung bekannt sind. Bald bemerkt man, dass ein Körper einen andern zum Theil unsichtbar macht, oder dass er seinen Schatten auf ihn wirft, was zur richtigen Bestimmung ihrer gegenseitigen Lage hinreichend ist; bald bemerkt man eine dunkle oder eine glänzende Kante, was auf den Vorsprung einer ersten Grenzfläche vor einer zweiten deutet; ein anderes Mal vergleicht man die Richtung des Sehstrahles mit Mauern und Wänden, von denen man weiss, dass sie vertikal sind, oder mit dem Boden, dessen Lage

man als horizontal kennt, und schliesst hieraus, dass der betrachtete Punkt, z. B. der Fuss eines Tisches, genau an der Stelle sich befindet, wo jener Sehstrahl den Boden schneidet, und nicht näher, weil er sonst nicht unterstützt wäre. Für Entfernungen von nur einigen Decimetern hat man einen Anzeiger in der Muskelanstrengung, die man machen muss, um beide Augenaxen auf denselben Punkt des betrachteten Gegenstandes zu lenken; denn je nachdem diese Anstrengung mehr oder minder gross ist, schliesst man auf eine grössere oder geringere Nähe jenes Punktes. Sobald es sich aber um Entfernungen von mehreren Metern handelt, wird die Veränderung des Winkels jener beiden Axen ganz unmerklich, und kann also nimmer als Anzeiger der Entfernung dienen. Bei Gegenständen, die auf weitem Felde umher zerstreut sind, beurtheilt man die Entfernung nach der grössern oder geringern Intensität des Lichtes, welches sie zurückwerfen; oder man vergleicht auch wohl die Richtung des Sehstrahles mit gegebenen geraden Linien, z. B. mit Strassen, Baumreihen u. s. w.; und man zählt in gewisser Art alle zwischen-liegenden Gegenstände, um die Entfernung von dem, welcher insbesondere betrachtet wird, danach bemessen zu können. Man sieht hieraus, dass die Urtheile, welche man unter Anleitung des Gesichts allein über Entfernungen fällt, viel von gewissen beiläufigen Kenntnissen abhängen, die nur durch eine lange Gewohnheit erworben werden konnten, indem man häufig die mittelst der Gesichtsorgane empfangenen Eindrücke mit den Rapporten der übrigen Sinne zusammenstellte und verglich. Denn das Sehen muss gelernt werden; und ein Blindgeborener, der durch die Operation des Staarstiches den Gebrauch seiner Augen erhält, wird anfänglich sehr falsch über seine Entfernung von den ihn umgebenden Gegenständen urtheilen.

Zur Bestätigung des eben Gesagten darf man nur beobachten, wie auch der Sehendgeborene in ähnliche Irrthümer verfällt, wenn ihm die Anwendung der oben angeführten Vergleichungsmittel unmöglich gemacht ist. Die Fixsterne und die Planeten erscheinen ihm, obgleich ihre Entfernungen ungeheuer verschieden sind, alle auf einer und derselben Kugelfläche liegend, eben weil es an intermediären Punkten fehlt, nach denen er die Verschiedenheit jener Entfernungen beurtheilen könnte.

Aus dem nämlichen Grunde erscheint der Mond im Zenith kleiner als am Horizont, obgleich er bei letzterem Stande ungefähr 870 geogr. Meilen weiter von dem Beobachter entfernt ist. Dieser aber schliesst aus dem Dazwischenliegen so vieler Gegenstände, wie Häuser, Bäume, Berge etc. auf den ungeheuern Abstand des Mondes, und schätzt daher, wenn er ihn am Horizonte erblickt, die absoluten Dimensionen desselben fälschlich grösser, obgleich sie ihm in der That unter einem kleinern Gesichtswinkel erscheinen, als im Zenith. *) An dem Ufer des offenen Meeres schätzt man die Entfernungen sehr schlecht; und sieht man mittelst eines einfachen cylindrischen Rohres ohne Gläser, durch welches man nur einen Gegenstand auf Einmal wahrnehmen kann, in das Gefilde hinaus, so wird man bald dieses Haus, bald jenen Baum u. s. w. für viel näher halten, als wenn man diese Gegenstände mit blossem Auge betrachtete, und ihre Entfernung mit der der benachbarten Gegenstände vergleichen könnte. Bei jenen grossen perspectivischen Gemälden endlich, die man Panoramas nennt, glaubt man gegen 2—3000 Meter von Gegenständen entfernt zu sein, welche sich in einer Nähe von wenigen Toisen befinden. Diese Täuschung nun, der man sich unmöglich erwehren kann, rührt hauptsächlich daher, dass der Zuschauer aufs sorgfältigste isolirt und seinen Blicken alles verborgen wird, was in unmittelbarer Berührung mit dem Gemälde selbst ist; die Täuschung verschwindet augenblicklich

*) Man könnte einwerfen, die atmosphärische Strahlenbrechung, welche am Horizonte sehr stark ist, vergrössere in der That die Scheibe des Mondes; diese Ursache aber, deren Wirkung schon für den vertikalen Durchmesser sehr schwach ist, weil es sich dabei nur um den Unterschied zweier wenig von einander entfernten Brechungen handelt, verschwindet ganz oder würde vielmehr im entgegengesetzten Sinne auf den horizontalen Durchmesser wirken; und gleichwohl erscheint letzterer im Horizont noch merklich grösser als im Zenith.

für ihn, sobald er den Rahmen wahrnimmt, oder Gegenstände erblickt, die, zwischen ihm und dem Gemälde liegend, ihm die ersten Eindrücke seiner Augen berichtigen helfen.

§. 245.

Taf. 13. Fig. 3. Aus allen diesen Beobachtungen ergibt sich folgender allgemeine Grundsatz: Ein leuchtender oder erleuchteter Punkt bringt an jeder Stelle A, A', A'' etc. eines und desselben Sehstrahles den nämlichen Eindruck auf das Auge O hervor; und zwei Linien AB, A'B', welche zwischen denselben Sehstrahlen enthalten sind, erzeugen das nämliche Bild im Auge O, so dass es scheinen wird, als haben sie die nämliche Grösse und Lage, wenigstens wenn ganz abgesehen wird von den umliegenden Körpern und von der Abnahme der Lichtstärke, die durch grössere, zwischen dem Beobachter und den betrachteten Gegenständen liegende, Luftmassen bewirkt wird.

Will man daher die Perspective eines Gegenstandes ABCE erhalten, d. h. seine getreue Darstellung auf einer ebenen oder krummen Fläche VXY, welche man die Bildfläche oder Tafel (tableau) nennt, so muss man sich vorstellen, man habe von dem Augpunkte O aus nach allen Punkten des sichtbaren Umrisses dieses Gegenstandes, so wie nach andern bemerkenswerthen Punkten seines sichtbaren Theiles, z. B. nach Ecken und Spitzen, nach vorspringenden Kanten etc. gerade Linien gezogen; sucht man hierauf die Durchschnittspunkte dieser Sehstrahlen mit der Tafel, so bildet die Reihe aller dieser Punkte eine Figur A'B'C'E', welche gleichsam das Abbild (portrait) des Original-Gegenstandes ist. Denn die Lichtstrahlen, welche die verschiedenen Punkte A', B', C'... nach dem Auge O des Beobachters senden, bilden unter sich die nämlichen Winkel, wie die von A, B, C.. ausgegangenen Strahlen; die ersteren werden daher im Auge die nämlichen Bilder erzeugen, welche von den andern erzeugt worden wären; und obgleich die absoluten Entfernungen verschieden sind, so wird das in O sich befindliche Auge es doch nicht bemerken, besonders wenn man in den Punkten A', B', C'.. die nämlichen Farben und Lichtabstufungen anbringt, wie sie auf den ihnen entsprechenden Theilen des Original-Gegenstandes sich darstellen. Denn die letzteren Umstände tragen viel mit zu dem Urtheile bei, welches man, mit Hilfe der Augen, über die Gestalt und Entfernung der Körper fällt: da diess aber Gegenstand der Luftperspective ist, so kann hier nicht weiter davon die Rede sein.

§. 246.

Da also die Zeichnung einer Linear-Perspective darauf hinausläuft, die Durchschnittspunkte eines Systems von Geraden mit einer ebenen oder krummen Fläche zu finden, so ist klar, dass die Methoden der Darstellenden Geometrie zur Ausführung solcher Operationen stets hinreichen werden, und es ist auch das Beste, sich derselben zu bedienen, wenn der fragliche Gegenstand von etwas verwickelten krummen Flächen begrenzt wird, wie z. B. der Wulst, das Bildgestelle u. s. w. In den gewöhnlichen Fällen aber, wo die Bildfläche eine vertikale Ebene oder Tafel ist, und wo die Gegenstände nur geradlinige oder kreisförmige Umrisse und ebene oder cylindrische Seitenflächen darbieten, wendet man bequemere Verfahrungsarten an, welche keine zwei Projectionstafeln erfordern. Mit diesen besonderen Methoden soll hier, nach einigen vorausgeschickten allgemeinen Bemerkungen, der Anfang gemacht werden.

§. 247.

Gewöhnlich wird vorausgesetzt, die Bildfläche oder Tafel befinde sich zwischen dem Gegenstande und dem Gesichtspunkte, weil alsdann die Pyramide der nach den verschiedenen Punkten des Gegenstandes hingehenden

Sehstrahlen zwischen ihrer Spitze und Grundfläche von der Tafel geschnitten wird, und also eine Perspective erzeugt, deren allgemeine Dimensionen kleiner sind, als die des Gegenstandes selbst; ein Umstand, welcher für die Darstellung der uns umgebenden Körper, deren natürliche Dimensionen gewöhnlich die Grösse der Tafeln überragen, von grossem Vortheil ist. Uebrigens können alle die Methoden, von welchen im Folgenden die Rede sein wird, gleich gut auch auf eine Tafel angewendet werden, welche hinter dem Gegenstande aufgestellt ist, oder welche denselben schneidet; nur werden in diesem Falle die Dimensionen der vor der Tafel liegenden Theile des Gegenstandes in der Perspective im Allgemeinen sich grösser darstellen.

§. 248.

Wenn eine auf einer beliebigen Tafel ausgeführte perspectivische Zeichnung den gehörigen Effect hervorbringen soll, so ist es nothwendig, dass des Zuschauers Auge genau den Gesichtspunkt einnehme, den der Zeichner gewählt hat; dieser letztere aber darf besagten Punkt nicht ganz nach Willkür wählen.

Gewöhnlich ist es am schicklichsten, den Gesichtspunkt auf der Senkrechten anzunehmen, welche man auf der Mitte der Tafel errichtet hat, weil diess die natürlichste Stellung ist, welche der Zuschauer einnehmen kann, um die Perspective zu betrachten. Man kann jedoch den Gesichtspunkt auch tiefer nehmen, je nach der Höhe, in welcher die Tafel über dem Boden sich befinden soll, und nach der Beschaffenheit des darzustellenden Gegenstandes, wenn derselbe z. B. ein Monument wäre, das von unten aus gesehen werden sollte. Ein andermal kann der Gesichtspunkt mehr rechts oder links gerückt werden, wenn ein wichtiger Grund dafür spricht; wenn z. B. die Hauptscene sich nahe am Seitenrahmen befinden, oder wenn die auf der Tafel senkrechte Façade eines Gebäudes eine möglichst grosse Ausbreitung erhalten soll.

§. 249.

Was die Entfernung des Gesichtspunktes von der Tafel betrifft, so hängt dieselbe natürlich von der Art des darzustellenden Gegenstandes, so wie von der Beschaffenheit seiner einzelnen Theile ab. Damit jedoch ein recht deutliches Sehen stattfinden und der Beobachter die ganze Fläche der Tafel, ohne den Kopf zu wenden, überschauen könne, ist es für gewöhnlich am zweckmässigsten, die Entfernung innerhalb der **einfachen** und **dreifachen** Breite der Tafel zu nehmen, so dass alsdann der Gesichtswinkel zwischen 50° und 20° enthalten ist, vorausgesetzt, dass der Gesichtspunkt dem Mittelpunkte der Tafel entspreche. Soll aber die Scene eine beträchtliche Tiefe erhalten und entfernte Gegenstände darstellen, die man sichtbar machen will (bei einem Schlachtgemälde z. B.), so kann man in der Wahl jener Entfernung bis zur **halben** Breite der Tafel herabgehen, was alsdann einem Gesichtswinkel von 90° entspricht.

§. 250.

In allen diesen Fällen aber dürfen die Sehstrahlen die Tafel nicht unter einem Winkel treffen, der kleiner ist als 45°. Wir haben die Gewohnheit, uns den Gegenständen, welche wir betrachten wollen, beinahe völlig zuzuwenden, und diess ist sogar nothwendig, wenn auf der Netzhaut unseres Auges ein deutliches Bild entstehen und das Sehen uns nicht beschwerlich werden soll durch die Anstrengung, welche eine sehr schiefe Axenrichtung der Augen erforderte. Wenn daher unsere Blicke sehr schief auf eine perspectivische Zeichnung fallen, so wird dieselbe uns fehlerhaft erscheinen, obgleich sie ganz regelrecht gezeichnet sein kann, die Dimensionen der Fluchtlinien (d. h. derjenigen Geraden des originalen Gegenstandes, welche nicht parallel sind mit der Tafel) werden uns übermässig gross vorkommen, obgleich sie ganz genau den gehörigen Gesichtswinkeln entsprechen; alles darum, weil wir nicht gewohnt sind, die Körper auf solche

Weise zu betrachten, und weil unser Auge die Länge einer Geraden, welche fast parallel mit der Augenaxe ist, nicht gut zu beurtheilen vermag. Man muss daher eine Wahl vermeiden, die auf solche Resultate führen würde.

Eben daher kommt es auch, dass perspectivische Gemälde auf Zimmerdecken oder auf der innern Fläche einer Kuppel selten eine angenehme Wirkung hervorbringen. Denn weil wir nicht gewohnt sind, unseren Blicken eine fast vertikale Richtung zu geben, so täuschen wir uns leicht in Beurtheilung der Linien-Dimensionen aus den Gesichtswinkeln und stossen auf missfällige Verkürzungen; daher denn ein geschickter Maler sich oft von der geometrischen Genauigkeit entfernen und zu Modificationen bequemen wird, die unserm Auge gefälliger sind. Aus diesen Bemerkungen geht hervor, dass die beste Bildfläche für eine etwas grosse Scene eine cylindrische Zone von mässiger Höhe ist, weil die von einem Punkte der Axe ausgehenden Sehstrahlen eine solche Fläche überall unter Winkeln treffen, die von 90° nur wenig verschieden sind. Desshalb wählt man auch für Panoramas solche Bildflächen.

§. 251.

Manchmal jedoch führt man auch perspectivische Zeichnungen aus, für welche der Gesichtspunkt eine solche Lage hat, dass die Sehstrahlen sehr schief auf die Tafeln fallen; man nennt sie verzerrte Perspectiven *(perspectives curieuses)*. Denn ein Beobachter, welcher sich einer solchen Tafel gewohnterweise gerade gegenüberstellt, wird auf derselben nichts als unregelmässige oder unförmliche Umrisse erblicken, welche das dargestellte Bild unkenntlich machen; sobald man ihn aber so stellt, dass sein Auge den rechten Gesichtspunkt einnehmen muss, mittelst eines kleinen Loches, das in einer Scheidewand angebracht ist, welche ihm die umliegenden Körper verbirgt und ihn nur die Perspective sehen lässt, so wird er ganz anders urtheilen und oft mit angenehmer Ueberraschung einen anmuthigen Gegenstand gewahr werden. Später, im §. 526, wird noch weiter hievon die Rede sein.

Zweites Kapitel.

Methode der Fluchtpunkte.

§. 252.

Taf. 13. Fig. 3. Bei dieser Methode wird stets vorausgesetzt, die Bildfläche sei eine ebene Tafel VXY; ferner wird angenommen, sie sei vertikal und der Gesichtspunkt O, d. h. der Ort, den das Auge des Beobachters einnimmt, befinde sich vor derselben.

Ist nun ABM eine beliebig im Raume angenommene, unbegrenzte Gerade, und man zieht die verschiedenen Sehstrahlen OA, OB, OM, ... so darf man also nur die Durchschnittspunkte A′, B′, M′ ... dieser Strahlen mit der Tafel suchen, um die Perspective A′B′M′ der gegebenen Geraden zu erhalten. Da nun alle diese Strahlen in der durch den Punkt O und die Gerade AB bestimmten Ebene AOB liegen müssen, so ist also die gesuchte Perspective nichts anderes als der Durchschnitt der Ebene OAB mit der Ebene VXY, d. h. diese Perspective ist eine gerade Linie.

§. 253.

Um sie auf die bequemste Art zu construiren, suche man zuerst den Durchgang *(trace)* T der Geraden AB, d. h. den Punkt, in welchem sie die Tafel schneidet: dieser Punkt T gehört offenbar dem Durchschnitte der beiden Ebenen OAB und VXY und mithin der gesuchten Perspective an. Hierauf ziehe man durch das Auge O eine Parallele OF mit der gegebenen Linie AB: diese Parallele muss offenbar in der Ebene OAB der Sehstrahlen enthalten sein, und daher muss der Punkt F, in welchem sie die Tafel schneidet, und welcher der Fluchtpunkt von AB heisst, ebenfalls der gesuchten Perspective angehören, welche somit TF sein wird. Hieraus ergiebt sich als Grundlage für die gegenwärtige Methode folgende allgemeine Regel:

Um die Perspective einer unbegrenzten Geraden AB zu finden, suche man den **Durchgang** T dieser Geraden und ihren **Fluchtpunkt** F; hierauf verbinde man beide Punkte durch eine Gerade TF.

§. 254.

Die Benennung Fluchtpunkt *(point de fuite)*, welche dem Punkte F zukommt, in welchem der mit der gegebenen Geraden AB parallele Sehstrahl die Tafel schneidet, rechtfertigt sich dadurch, dass wenn man die Sehstrahlen OA, OB, OM, ... zieht, diese die Tafel in der Geraden TF und zwar in Punkten A′, B′, M′... schneiden, welche sich dem Punkte F um so mehr nähern, je weiter die Punkte A, B, M.. sich, in der Richtung AB, von der Tafel entfernen; die Gegenstände scheinen also ins Weite zu fliehen, je mehr ihre Perspective dem Punkte F sich nähert, und dieser ist in der That die Perspective des in unendlicher Entfernung auf ABM liegenden Punktes.

§. 255.

Der Punkt F heisst auch der Zusammenlaufpunkt *(point de concours)* der gegebenen Linie AB. Denn wenn man die Perspective einer andern Geraden CE sucht, welche parallel ist mit AB, so muss man, nach der Regel des §. 253, noch einmal dieselbe Parallele OF und den Durchgang R der Geraden CE anwenden; so dass man also als Perspective von CE die Gerade RF erhält, welche mit TF, der Perspective von AB, in demselben Punkte F der Tafel zusammenläuft. *) Hieraus ergiebt sich folgender allgemeine Satz:

Alle Geraden im Raume, welche einer und derselben Richtung parallel sind, haben zu Perspectiven gerade Linien, welche in einem Punkte zusammenlaufen, den man erhält, wenn man durch das Auge eine Parallele mit der gegebenen Richtung zieht.

§. 256.

Dieser Satz erleidet nur in dem Falle eine Ausnahme, wenn die gegebenen Parallelen zugleich mit der Tafel parallel sind, wie AE und BC; denn alsdann fällt ihr Fluchtpunkt unendlich weit hinaus, und die Perspectiven A′E′ und B′C′ sind unter sich parallel. Aber sie müssen auch den gegebenen Geraden parallel sein: denn aus der Elementar-Geometrie ist bekannt, dass eine Ebene OAE, welche durch eine mit der Ebene VXY parallele Gerade geht, letztere Ebene nur in einer mit AE parallelen Geraden A′E′ schneiden kann. Vertikale Linien haben also stets wieder vertikale Linien zu Perspectiven, wenigstens wenn die Tafel selbst eine vertikale Ebene ist, wie in diesem ganzen Kapitel vorausgesetzt wird.

*) Manche Schriftsteller nennen diesen Punkt F den Accidentalpunkt *(point accidental)*, auch Verschwindepunkt *(point évanouissant)*.

§. 257.

Die einfache Regel des §. 253, nach welcher die Perspective einer unbegrenzten Geraden gefunden werden kann, lässt sich nicht mehr anwenden, wenn die Gerade mit der Tafel parallel ist, oder auch nur wenn ihr Durchgang oder ihr Fluchtpunkt allzuweit entfernt sind. In diesen beiden Fällen darf man nur die Perspectiven zweier Punkte der gegebenen Geraden nach folgendem Verfahren suchen, und hierauf dieselben durch eine unbegrenzte Gerade verbinden.

§. 258.

Um die Perspective eines einzelnen Punktes zu erhalten, ziehe man durch diesen Punkt zwei beliebige Gerade (z. B. zwei Horizontalen, und zwar in der bequemsten Richtung); construire hierauf die Perspectiven dieser Hilfslinien, so ist ihr Durchschnittspunkt auf der Tafel die Perspective des gegebenen einzelnen Punktes.

§. 259.

Auf dieselbe Weise muss man verfahren, um die Perspective eines bestimmten Punktes A zu erhalten, der einer unbegrenzten Geraden ABM angehört, von welcher man die Perspective bereits gefunden hat; aber natürlich darf man hier durch diesen Punkt A nur eine einzige Hilfslinie ziehen.

§. 260.

Bisher wurde nur angegeben, wie die anzuwendenden Constructionen im Raume auszuführen wären; nun soll gezeigt werden, wie dieselben alle sich auf der Ebene der Tafel selbst ausführen lassen.

Taf. 13. Es sei VXY die vertikale Tafel, vor welcher sich der Gesichtspunkt O oder das Auge des Beobach-
Fig. 5. ters befinde. Fällt man von diesem Punkte auf die Tafel die Senkrechte OP, so ist diese der Hauptstrahl, und der Punkt P, welcher die Projection des Gesichtspunktes auf der Tafel ist, heisst der Hauptpunkt. Zieht man durch diesen Punkt P die Horizontale DPD′ in der Ebene VXY, so erhält man die Horizontlinie, welche nichts anderes ist, als der Durchschnitt der Tafel mit der durch das Auge O gelegten Horizontalebene. Es ist leicht einzusehen, dass in dieser Linie DD′ die Fluchtpunkte aller Horizontallinien liegen werden, weil die parallel mit diesen Linien gezogenen Sehstrahlen (§. 253) alle in der Horizontalebene ODD′ enthalten sein müssen.

§. 261.

Nimmt man auf der Horizontallinie die beiden Längen PD und PD′ jede gleich PO, so heissen die Punkte D und D′ die Distanzpunkte, weil jene Längen PD oder PD′ gleichsam die aufgeklappten Entfernungen des Auges von der Tafel darstellen. Ferner sind diese Punkte D und D′ stets die Fluchtpunkte (§. 254) der horizontalen Geraden, welche mit der Tafel einen Winkel von 45° bilden. Denn die Parallele, welche man mit einer solchen Geraden durch den Gesichtspunkt O zieht, muss offenbar in der Horizontalebene OPD liegen und muss die Tafel in DPD′ schneiden, so dass sie mit dieser Linie und mit OP ein rechtwinkliges Dreieck bildet, das gleichschenklig sein muss, da es einen Winkel von 45° enthält: die Basis dieses Dreiecks muss also PD oder PD′ sein, je nachdem die gegebene Gerade links oder rechts gerichtet ist.

§. 262.

Man bemerke, dass der Hauptpunkt P der Fluchtpunkt aller senkrecht auf der Tafel stehenden Geraden ist. Denn wenn man nach §. 253 durch das Auge O eine Parallele mit diesen Geraden zieht, so ist diese genau der Hauptstrahl, welcher die Tafel in P trifft.

§. 263.

Nun lege man durch die Basis XY der Tafel, d. h. durch die untere Seite des vertikalen Rechtecks, welches die Tafel begrenzt, eine horizontale Ebene GXYg, welche der geometrische Grundriss genannt wird, weil sie dazu dient, die Form und Lage des hinter der Tafel befindlichen gegebenen Gegenstandes darzustellen *). Es sei nun AB eine beliebige, in diesem Grundrisse liegende Gerade. Um ihre Perspective zu erhalten, müsste man (§. 253) AB bis an die Basis XY verlängern, wodurch man T als Durchgang auf der Tafel erhalten würde; hierauf müsste man sich den Sehstrahl OF parallel mit AB denken, der, als horizontal, die Tafel in der Horizontallinie D D′ in einem Punkte F schneiden würde, welcher der Fluchtpunkt von AB wäre; endlich müsste man die Gerade TF ziehen, welche sodann die Perspective von AB darstellte. Um nun alle diese Constructionen auf einer einzigen Ebene ausführen zu können, denke man sich die Horizontalebene OPD so lange um DD′ gedreht, in der Richtung O—O′, bis sie mit der Tafel zusammenfällt; alsdann wird der Gesichtspunkt O in den Punkt O′ der Vertikalen PZ auf der Tafel zu liegen kommen und der Sehstrahl OF wird also die Lage O′F erhalten. Denkt man sich zu gleicher Zeit die Grundrissebene GXYg so lange um XY gedreht, in der von dem Pfeile bezeichneten Richtung, bis sie mit der Tafel zusammenfällt, so wird hiedurch die Gerade TAB in die Lage Tab kommen. Nach dieser doppelten Aufklappung müssen die Geraden Tab O′F noch immer parallel sein; denn die Winkel BTY und OFD, welche wegen der Parallelen TB und OF gleich waren, haben bei der Umdrehung um TY und FD ihre Grösse nicht geändert; also sind die Winkel bTY und O′FD noch immer gleich und liegen in einerlei Ebene: mithin sind die Geraden Tb und O′F parallel. Fig. 5.

Hieraus folgt, dass man auch, ohne Hilfe des im Raume liegenden Gesichtspunktes O, den Fluchtpunkt F finden kann, indem man auf der Tafel die Gerade O′F parallel mit Tab zieht; diese letztere aber ist nichts anderes als die gegebene Lage der Geraden TAB, wenn die Grundrissebene in die Ebene der Tafel aufgeklappt wird.

§. 264.

Weil aber bei solcher Aufklappung der Raum G′XYg′, den die Grundrissebene auf der Tafel einnähme, mit dem der perspectivischen Darstellungen zusammenfiele, so denkt man sich, um diesen Uebelstand zu heben, die Tafel, parallel mit sich selbst, über den Grundriss hinaufgeschoben, so dass die Basis XY in eine beliebig höhere Lage, z. B. in G′g′ zu liegen kommt, wobei die Geraden Tab und O′F noch immer parallel bleiben. Die beiden Ebenen haben alsdann eine solche Lage gegen einander, wie Fig. 6 es zeigt, wo GXYg den Grundriss und V′X′Y′ die Tafel darstellt. Man muss sich aber stets erinnern, dass die wahre Lage der Tafel vor den auf dem Grundrisse gezeichneten Gegenständen, durch die Gerade XY angedeutet wird, welche auch die eigentliche Basis der Tafel ist. Was nun die graphischen Operationen betrifft, so hat man sie von jetzt an auf folgende Weise vorzunehmen:

*) Die Grundrissebene, welche von einigen Schriftstellern auch Objectivebene genannt wird, weil sie gewöhnlich den darzustellenden Gegenstand trägt, kann auch höher oder tiefer als die Basis XY angenommen werden; alsdann schneidet sie die Tafel in einer mit XY parallelen Geraden, welche einfach die Grundlinie *(ligne de terre)* genannt wird, deren Entfernung von XY aber angegeben werden muss.

§. 265.

Taf. 13. **Perspective einer** unbegrenzten **Geraden**, welche in der Grundrissebene liegt.
Fig. 6. Nachdem man auf dem Grundrisse die gegebene Gerade AB und die wahre Lage XY der Tafelbasis bezeichnet hat, bringe man letztere in die Lage X′Y′, und wähle nun auf der versetzten Tafel V′X′Y′ den Hauptpunkt P so, wie es den Umständen der Aufgabe am gemässesten ist (§. 248); ferner ziehe man die Horizontlinie und bestimme auf ihr die Distanzpunkte D und D′, wodurch alsdann auch die Lage des Gesichtspunktes vor der Tafel völlig bestimmt wird. Hierauf klappe man diesen Gesichtspunkt auf die Vertikale PZ′ der Tafel auf, indem man PO′ = PD nimmt, und ziehe O′F parallel mit der gegebenen Geraden AB, wodurch man den Fluchtpunkt F dieser Linie erhält. Endlich verlängere man AB bis zu ihrem Durchschnitte T mit der wahren Tafelbasis XY (und nicht mit X′Y′), und beziehe diesen Durchgang T auf den Punkt T′ in X′Y′, so ist T′F die Perspective der unbestimmt verlängerten Geraden AB (§. 253).

§. 266.

Perspective eines auf einer Geraden bezeichneten **Punktes.** Es sei A der bezeichnete Punkt auf der Geraden AB. Man ziehe durch diesen Punkt eine horizontale Hilfslinie, und suche deren Perspective, wie es in §. 265 für AB geschehen, so ist offenbar der Durchschnittspunkt der beiden Perspectiven für AB und die Horizontale die Perspective des gegebenen Punktes A. Hiebei aber kommt es darauf an, die Lage der Horizontalen so zu wählen, dass dadurch die Constructionen so einfach als möglich werden. Ueber diese vortheilhafte Wahl handeln die nächsten §§.

§. 267.

Erstes Mittel. Man ziehe durch A die Gerade AR senkrecht auf die Tafel. Sie trifft diese Ebene in R, welchen Durchgangspunkt man sofort in R′ auf X′Y′ *) beziehen muss. Der Fluchtpunkt von AR, nämlich der Punkt P (§. 262), ist unmittelbar gegeben: mithin ist R′P die Perspective von AR, welche durch ihren Durchschnitt mit T′ E die Perspective A′ des Punktes A bestimmt. Da aber hier dieser Durchschnitt, unter einem sehr schiefen Winkel geschieht, so kann die Lage des Punktes A′ nicht mit Genauigkeit bestimmt werden, und man wird daher besser daran thun, folgendes Verfahren anzuwenden.

§. 268.

Zweites Mittel. Man ziehe durch A die Hilfslinie AC unter einem Winkel von 45⁰ gegen die Tafel. Diese hat zum Fluchtpunkt den Distanzpunkt D (§. 261) und zum Durchgang den Punkt C, der in C′ versetzt werden muss. Mithin wird C′D die Perspective von AC und folglich der Punkt A′, in welchem sie die T′F schneidet, die Perspective des Punktes A sein. In der Anwendung braucht man AC nicht einmal zu ziehen: man trägt AR von R′ nach C′ und verbindet letztern Punkt mit D.

§. 269.

Drittes Mittel. Dieses neue Verfahren werde auf die Bestimmung des Punktes B der Geraden TAB angewendet, welche zur Perspective die unbestimmte Gerade T′F hat. Man beschreibe mit den Radien TB

*) Für eine solche Gerade ist es gleichgiltig, ob man AR nach XY oder nach X′Y′ verlängert; und da letzteres Verfahren das kürzere ist, so muss man es hier vorziehen.

und FO′ die beiden Kreisbögen BL und O′O″. Zieht man nun die Sehne BL, so ist L ihr Durchgang, den man auf L′ beziehen muss. Um nun den Fluchtpunkt dieser Sehne zu finden, müsste man durch den aufgeklappten Gesichtspunkt O′ eine Parallele mit ihr ziehen (§. 265); aber es ist klar, dass diese Parallele die Sehne O′O″ sein muss. Denn die gleichschenkligen Dreiecke BTL und O′FO″ haben gleiche Winkel an der Spitze, sind daher einander ähnlich und folglich ihre Grundlinien BL und O′O″ parallel. Mithin ist auch O″ der Fluchtpunkt der Sehne BL und also O″L′ ihre Perspective, welche durch ihren Durchschnitt mit T′F die Perspective B′ des Punktes B bestimmt. Man nennt diess die Methode mittelst der Bogensehne, und versteht unter dem Bogen hier denjenigen, den der gegebene Punkt B beschreiben würde, wenn man die gegebene Gerade BT in die Basis XY der Tafel, und der Punkt O′, wenn man den Sehstrahl O′F in die Horizontallinie umlegte.

Die Anwendung dieser sehr bequemen Regel erfordert weder die Zeichnung der Bögen noch ihrer Sehnen, sondern beschränkt sich auf folgende zwei Operationen: 1) Man trage die Länge TB von T′ nach L′, was man die gegebene Linie BT auf die Tafelbasis aufklappen nennt; 2) man trage die Länge O′F von F nach O″, was man den Fluchtstrahl O′F auf die Horizontallinie aufklappen nennt; endlich verbinde man den Punkt L′ mit O″ *).

§. 270.

Andere Methode für die Perspective einer Geraden AB. Die Methode des §. 265 verlangt, dass man zuerst den Durchgang und den Fluchtpunkt dieser Geraden suche; man könnte aber auch, ohne diese Punkte zu Hilfe zu nehmen, durch den Punkt A zwei horizontale Hilfslinien AR und AC ziehen, die eine senkrecht auf die Tafel, die andere unter einem Winkel von 45°; alsdann würden ihre Perspectiven R′P und C′D hinreichen, den Punkt A′ zu bestimmen. Durch das nämliche Verfahren, auf B angewendet, würde man auch B′ finden, und so erhielte man die verlangte Perspective A′B′ ohne Anwendung anderer Punkte als P und D, welche unmittelbar durch die Aufgabe gegeben sind. Diese Methode ist aber nur dann anzuwenden, wenn der Durchgang T und der Fluchtpunkt F zu weit entfernt liegen; denn 1) würde sie die Perspective eines Polyeders mit einer Menge dem Resultate fremder Linien überladen; 2) würde die

*) Man hat hier geflissentlich vermieden, den Sehstrahl OA (Fig. 5) anzuwenden, welcher durch sein Zusammentreffen mit der totalen Perspective TF der Geraden TA ebenfalls die Perspective A′ des gegebenen Punktes A geliefert hätte. Denn die Schriftsteller, welche sich dieses Mittels bedienen, müssen, um auf einer einzigen Ebene operiren zu können, den Hauptstrahl OP auf den obern Theil Pz der Vertikale aufklappen und den Grundriss auf die unter XY herabgehende Verlängerung der Tafel, wie Fig. 7 es darstellt. Hierauf verbinden sie die Aufklappungen O_2 und A_2 der Punkte O und A durch eine Gerade O_2A_2, welche die TF in demselben Punkte A′ schneiden muss wie in Fig. 5. Denn in letzterer Figur zeigen die ähnlichen Dreiecke ATA′ und OFA′, dass die vollständige Perspective TF in A′ so getheilt ist, dass die Theile sich verhalten **wie** die gegebene Gerade AT **zu** dem Fluchtstrahle OF. In Fig. 7 nun zeigen die ähnlichen Dreiecke A_2TA' und O_2FA' ebenfalls, dass TF im Punkte A′ in demselben Verhältnisse getheilt ist; mithin ist der in Fig. 7 erhaltene Punkt A′ identisch mit dem Punkte A′ in Fig. 5, und folglich liefert die Gerade O_2A_2 ebenfalls in A′ die Perspective des gegebenen Punktes A_2. Dieses Verfahren leidet aber an mehreren Unbequemlichkeiten. Fürs erste erfordert es mehr Raum auf der Tafel; fürs zweite sind die auf dem Grundrisse G_2XYg_2 gezeichneten Gegenstände verkehrt, d. h. die untersten Punkte sind die entferntesten hinter der Tafel; endlich schneiden die auf solche Art erhaltenen Geraden sich fast immer unter sehr spitzen Winkeln, wodurch die graphischen Operationen sehr mangelhaft werden. Um letzterm Fehler zu entgehen, rathen zwar die Schriftsteller eine abermalige Aufklappung des Fluchtstrahles FO_2 in FO″ und der Geraden TA_2 in TA″; alsdann wird die Linie O″A″ die TF wieder in demselben Punkte A′ schneiden, weil, der ähnlichen Dreiecke TA″A′ und FO″A′ wegen, sich verhält:

$$TA' : A'F = TA'' : FO'' = TA_2 : FO_2.$$

Aber diese auf einander folgenden Aufklappungen erschweren das Geschäft, und überdiess kommt die letzte Construction offenbar auf die directe Methode des §. 269 zurück, welche viel leichter zu beweisen ist.

Schiefe mehrerer dieser Linien öfters, bei der einzeln vorgenommenen Bestimmung der Punkte A′ und B′, einen sehr merklich fehlerhaften Einfluss auf die Richtung der Linie A′B′ ausüben. In der That, das Auge ist viel empfindlicher für einen Fehler in der Richtung, als für einen in der Länge einer Geraden, und wenn zwei Kanten eines Polyeders, die unserm natürlichen Gefühle nach in einer gewissen Richtung zusammenlaufen sollen, in der entgegengesetzten Richtung convergiren oder parallel sind, so berührt ein solcher Fehler auch ein weniger geübtes Auge auf eine sehr unangenehme Weise. Es ist daher vortheilhafter, jedesmal, wenn es angeht, den Durchgang T′ und den Fluchtpunkt F anzuwenden, welche auf eine sichere Weise die Richtung der gesuchten Perspective A′B′ selbst bestimmen.

§. 271.

Fig. 8. **Von den Horizontallinien,** welche ausserhalb des Grundrisses liegen. Eine solche Gerade wird bestimmt durch ihre Projection AB auf dem Grundrisse und ihre Höhe über demselben; und da sie ihrer Projection AB parallel sein muss, so erhält man, wenn man durch den auf die Vertikale der Tafel aufgeklappten Augpunkt O′ mit AB eine Parallele O′F zieht, den Fluchtpunkt F der gegebenen Geraden (§. 263). Hierauf verlängere man AB bis T, welcher Punkt nur die Projection des Durchgangs der Geraden ist; dieser Durchgang selbst aber muss offenbar auf der Vertikalen T, in der Höhe h liegen. Nimmt man daher auf der Tafel die Vertikale T′T″ = h, so erhält man T″F als die Perspective der gegebenen in AB projicirten Geraden.

§. 272.

Um ferner die Perspective eines einzelnen Punktes dieser Geraden zu finden, z. B. desjenigen, der in A oder in B projicirt ist, darf man nur auf der Tafel die Grundlinie X″Y″ in der Höhe h über der Basis X′Y′ ziehen, und auf dieser Grundlinie alle jene Operationen wiederholen, welche vorher auf XY in Beziehung auf die Punkte A und B des Grundrisses ausgeführt wurden. Denn alles, was in den §§. 265, 266, 270 über diese Ebene gesagt worden, bleibt wahr für jede andere Horizontalebene, wenn man nur die Grundlinie gehörig ändert. Man denke sich z. B. durch den in A projicirten Punkt der Geraden eine Horizontale unter 45° gegen die Tafel gezogen, welche sich in AC projicirt, und die Tafel in (C, C″) trifft. Da nun ihr Fluchtpunkt noch immer D ist (§. 261), so ist also C″D ihre Perspective; diese aber schneidet T″F im Punkte A″, und mithin ist dieser die Perspective des in A projicirten Punktes. Eben so denke man sich durch den in B projicirten Punkt der gegebenen Geraden die horizontale, in BL projicirte Sehne gezogen, deren Durchgang hier (L, L″) ist, während ihr Fluchtpunkt fortwährend O″ bleibt (§. 269), diese Sehne hat also zur Perspective die Gerade L″O″, welche T″F in B″ schneidet, welcher Punkt somit die Perspective des in B projicirten Punktes ist.

§. 273.

Fig. 8. Diese Constructionen vereinfachen sich sehr, wenn man die Perspective A′B′ der im Grundrisse liegenden Geraden AB schon construirt hat, wie es z. B. der Fall ist, bei den einander entsprechenden Seiten der obern und untern Grundfläche eines senkrechten Prisma; denn weil alsdann die unteren Punkte A′, B′ schon auf der Tafel bekannt sind, so darf man nur die Vertikalen A′A″ und B′B″ errichten, welche, indem sie T″F schneiden, die Perspectiven A″, B″ der oberen Ecken bestimmen. Diess gründet sich darauf, dass die vertikalen Kanten des Prisma parallel mit der Tafel sind und folglich auch in der Perspective vertikal bleiben müssen (§. 256), daher sie denn auf der Tafel durch die Geraden A′A″ und B′B″ dargestellt werden.

§. 274.

Man sieht hier, dass diese Kanten, welche die nämliche absolute Höhe haben, in der Perspective nicht einerlei Grösse behalten; sie werden kleiner, je weiter sie sich rückwärts von der Tafel entfernen, und die beiden Geraden T′F und T″F bilden einen Abnahme-Maasstab, der dazu dienen kann, um für alle Vertikalen von der Höhe T′T″ = h, ihre Höhe in der Perspective zu finden, nach Verhältniss der Frontebene, in welcher sie liegen. Front- oder Stirnebene aber heisst jede mit der Tafel parallele Ebene.

Es sei z. B. eine Vertikale von der Höhe h gegeben, die auf dem Grundrisse in M projicirt sei. Nachdem man nun die Perspective M′ des Punktes M durch eines der vorhergehenden Mittel construirt hat, ziehe man die Horizontale M′ N′, welche auf der Tafel den Grundschnitt der Frontebene darstellt (§. 256), in welcher die Vertikale M liegt. Denkt man sich nun diese letztere Gerade parallel mit sich selbst nach N versetzt, so ist sie daselbst zwischen den beiden in AB projicirten Geraden enthalten, deren Perspectiven T′F und T″F sind; mithin ist N′N″ die Perspective der in N projicirten Vertikalen h, und diess ist auch die Grösse, welche man der Perspective M′M″ der in M projicirten Vertikalen h geben muss. Diese Folgerung gründet sich darauf, dass, weil die beiden gleich langen Vertikalen in einerlei Frontebene liegen, auch ihre Perspectiven N′N″ und M′M″ gleich sein müssen, wie solches im folgenden §. allgemein bewiesen wird.

§. 275.

Wenn zwei Gerade AB und CD von gleicher Länge in derselben **Frontebene** LMN liegen, so sind ihre Perspectiven A′B′ und C′D′ unter sich gleich, was auch die Richtung der gegebenen Linien sei. Taf. 13. Fig. 4.

Da die Ebene LMN der Tafel VXY parallel ist, so schneidet letztere Ebene die von den Gesichtsstrahlen gebildeten Dreiecke OAB und OCD in den Geraden A′B′ und C′D′, welche beziehlich den Grundlinien jener Dreiecke parallel sein werden. Es verhält sich also

$$AB : A'B' = OA : OA'$$
$$= OP : OP'$$

wo OP und OP′ die vom Auge auf die beiden Ebenen gefällten Perpendikel sind. Da aber auch

$$CD : C'D' = OP : OP'$$

so ist

$$AB : A'B' = CD : C'D',$$

und weil hier AB = CD, so ist also auch A′B′ = C′D′.

Sind AB und CD ungleich, so lässt sich aus vorstehenden Proportionen der noch allgemeinere Satz ziehen, dass die Längen der Perspectiven in demselben Verhältnisse stehen, wie die Längen der gegebenen Geraden.

Eine Reihe ganz gleicher Pfeiler also, welcher einer und derselben Frontebene entsprechen, müssen auf der Tafel gleiche Höhen und gleiche Breiten erhalten, obgleich sie ungleiche Entfernung vom Augpunkte haben. Aber mit ihrer Entfernung von der Tafel nehmen auch ihre Dimensionen ab; und die obigen Proportionen zeigen, dass, wenn eine Gerade mit der Tafel parallel ist, ihre perspectivische Grösse sich zur wirklichen verhält, wie die Entfernung des Gesichtspunktes von der Tafel zu eben dieser, — aber um den Abstand der Geraden von der Tafel vermehrten Entfernung.

§. 276.

Allgemein, jedes Vieleck, das in einer Frontebene liegt, hat zur Perspective ein anderes dem ersten

ähnliches Vieleck. Denn die erhaltene Perspective ist nichts anderes, als der Schnitt in die Pyramide der Sehstrahlen durch eine mit ihrer Grundfläche parallele Ebene. Ferner haben alle Dimensionen dieser Perspective zu den Dimensionen des gegebenen Vielecks das im vorigen §. angegebene Verhältniss.

Man bemerke endlich, dass wenn ein Punkt eine mit der Tafel parallele Gerade in zwei Theile theilt, welche in dem Verhältniss m : n stehen, alsdann die Perspective dieses Punktes die Perspective der Geraden in dem nämlichen Verhältnisse theilen wird.

§. 277.

Taf. 13. **Gerade, welche nicht parallel sind mit dem Horizont,** schiefe Gerade.
Fig. 9. Eine solche Gerade sei durch ihre Projection AB auf dem Grundrisse und durch ihre Projection A′B′ auf der Tafel gegeben. Um nun ihre Perspective zu finden, verlängere man AB bis T auf der Grundlinie und errichte die Vertikale TT′, welche durch ihren Durchschnitt mit A′B′ den Durchgang (Grundschnitt) T′ der gegebenen Geraden bestimmt. Der mit dieser Geraden parallel gezogene Sehstrahl hat zur vertikalen Projection die mit A′B′ parallele Gerade PF′; auf der Horizontebene, welche hier um die Grundlinie DPF aufgeklappt ist, wird eben jener Strahl in O′F, welche parallel mit AB ist, projicirt. Errichtet man daher die Vertikale FF′, so schneidet diese die Gerade PF′ in einem Punkt F′, welcher der Fluchtpunkt der Geraden (AB, A′B′) ist, und es ist mithin T′F′ die Perspective dieser Geraden. Dieses hier blos zur Uebung für den Leser angeführte Verfahren wird aber nie angewendet, weil nach demselben die Projection des Gegenstandes auf die Tafel selbst gezeichnet werden müsste, und also diese Projection mit der Perspective sich vermischen würde.

§. 278.

Fig. 9. Eine schiefe Gerade werde daher nur durch ihre Projection MN auf dem Grundrisse, in Verbindung mit ihrem Neigungswinkel ω gegen den Horizont und der Höhe h eines ihrer Punkte, z. B. dessen, der in M projicirt ist, bestimmt. Der mit dieser Geraden parallele Sehstrahl wird also horizontal in der mit MN parallelen Geraden O′F projicirt; macht man daher $FO'' = FO'$, und zeichnet den Winkel $FO''F' = \omega$, so ist die Linie O″F′ die Aufklappung dieses Sehstrahls auf der Tafel, und der Punkt F′, in welchem diese Aufklappung die in F errichtete Vertikale schneidet, ist der Durchgang d. h. der Fluchtpunkt der gegebenen Geraden.

Um nun die Perspective des in M projicirten Punktes zu erhalten, suche man zuerst die der Projection M mittelst der beiden Linien TM und RM, deren Perspectiven tF und R′P sich in m schneiden. Nun darf man nur noch in m eine Vertikale mM″ errichten, deren perspectivische Höhe gleich h sei. Man nehme daher auf der Tafel $R'R'' = h$, so stellt R″P eine mit R′P parallele Gerade vor, welche die unbestimmte aus m errichtete Vertikale in einem Punkte M″ schneidet, der sich in der nämlichen Höhe über der Horizontalebene befindet wie R″. Es ist also M″ die Perspective des in M projicirten Punktes der gegebenen Geraden, deren Perspective mithin M″F′ ist.

§. 279.

Bemerkung. Statt der Neigung der gegebenen Geraden gegen den Horizont konnten auch die Höhen der zwei in M und N projicirten Punkte gegeben sein. Indem man alsdann in Beziehung auf letztere das nämliche Verfahren anwendete, wie auf M, so erhielte man zwei Punkte M″ und N″, welche zur Bestimmung der gesuchten Perspective M″N″ hinreichten, ohne dass man den Fluchtpunkt F′ hätte anwenden müssen. So können alle Aufgaben, welche schiefe Linien betreffen, auf die Verbindung horizontaler und vertikaler Linien zurückgeführt werden, und es ist mittelst dieser sehr elementaren Methode leicht die Perspective irgend

eines Polyeders zu zeichnen, wenn seine Projection auf dem Grundrisse und die Höhen seiner verschiedenen Eckpunkte gegeben sind.

Hiemit sind nun die allgemeinen Sätze, auf welchen die Methode der Fluchtpunkte beruht, an einzelnen Linien und Punkten erläutert worden. Um den Leser recht vertraut damit zu machen, sollen dieselben nun auf einige sehr einfache, geradlinig begrenzte Körper angewendet werden. Vorher aber sind noch einige Ausdrücke zu erklären, welche zu Vermeidung der Weitläufigkeit im Text bei verwickelteren Aufgaben dienen sollen.

§. 280.

Hauptebene wird diejenige Vertikalebene genannt, welche durch den Gesichtspunkt geht und senkrecht auf der Tafel steht; hier also die Ebene OPZ, welche den Hauptstrahl OP enthält, und manchmal, in Verbindung mit dem Grundrisse und der Tafel, dazu dienen wird, die Lage der Gegenstände mittelst numerischer Angaben — analog den 3 Coordinaten eines Punktes im Raume — zu bestimmen. Taf. 13, Fig. 5.

§. 281.

Fliehebene heisst jede mit der Tafel nicht parallele Vertikalebene. Die Fliehebene einer gegebenen Geraden ist also nichts anderes als die Ebene, durch welche die Gerade orthogonal auf den Grundriss projicirt wird, vorausgesetzt, dass sie nicht parallel mit der Tafel sei; denn in letzterm Falle wäre die projicirende Ebene eine Frontebene.

Fliehlinie heisst im Allgemeinen eine mit der Tafel nicht parallele Gerade; man wendet aber diese Benennung hauptsächlich auf horizontale Linien an, welche der Tafel nicht parallel sind, und deren Fluchtpunkte daher immer in der Horizontlinie (§. 260) liegen.

§. 282.

Die Fluchtebene irgend einer Ebene π endlich nennt man diejenige Ebene π', welche parallel mit π durch den Gesichtspunkt gelegt wird; der Durchschnitt dieser Ebene π' mit der Tafel heisst die Fluchtlinie der Ebene π, weil dieser Durchschnitt die verschiedenen Fluchtpunkte aller in π liegenden oder nur mit π parallelen Linien enthalten muss, indem offenbar alle mit diesen Linien parallel gezogenen Sehstrahlen in der Ebene π' enthalten sein müssen. Man bedient sich übrigens dieser Fluchtlinien selten (die Horizontlinie DPD' ausgenommen, welche die Fluchtlinie der Horizontlinien ist), weil sie weniger elementare Constructionen erfordern, von denen jedoch im §. 361 ein Beispiel vorkommen wird.

Perspective verschiedener Pfeiler.

§. 283.

Es sei ABCE das Quadrat, welches, auf dem Grundrisse, dem ersten Pfeiler zur Grundfläche dient. Dieser Körper hat die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds und endigt oben mit einem Kapitäl, dessen Haupttheil ebenfalls ein Parallelepipedum ist, das sich in dem Quadrat $\alpha\beta\gamma\varepsilon$ projicirt, und mit dem obersten Quadrat des Pfeilers durch vier Schrägflächen verbunden ist, welche zusammen einen viereckigen Pyramidenstumpf bilden, wie Fig. 2 es zeigt. Es sei XY die Basis der vertikalen Tafel, d. h. ihr Durchschnitt mit der Grundrissebene. Man denke sich die Tafel, parallel mit sich selbst, bis nach X'Y' (§. 264) gerückt, und um eben diese Gerade auf den Grundriss aufgeklappt; hierauf bezeichne man den Hauptpunkt P und die Taf. 14, Fig. 1.

Horizontlinie, auf welcher man eine Länge PD gleich der Entfernung des Auges von der Tafel nimmt,*) alsdann ist D einer der Distanzpunkte, und er würde zum wahren Gesichtspunkte im Raume werden, wenn man die Gerade DP um den Punkt D drehte, bis sie senkrecht auf der Tafel stände. Es ist hier unnöthig diesen Gesichtspunkt in O′ auf die Vertikale PZ zu tragen, weil alle vorkommenden Geraden, mit der Tafel Winkel von 90⁰ oder 45⁰ bilden, wesshalb dann ihre Fluchtpunkte P und D unmittelbar bekannt sind (§. 261 und 262).

§. 284.

Da die Seiten AE und BC ihren Fluchtpunkt in P und ihre Durchgänge in T und R haben, welche letztere Punkte nach T′ und R′ versetzt werden müssen, so sind die Geraden T′P und R′P ihre totalen Perspectiven (§. 253). Da ferner die Diagonale AC die Tafel in G trifft und ihren Fluchtpunkt in D hat (§. 261), so ist also G′D ihre Perspective; und da diese Linie die Geraden T′P und R′P in A′ und C′ schneidet, so sind letztere Punkte die Perspectiven der beiden Ecken A und C.

Was die Ecken B und E betrifft, so könnte man ihre Perspectiven erhalten mittelst der Diagonale BE, deren Fluchtpunkt der andere Distanzpunkt ist; man kann aber diesen Punkt auch umgehen, der ohnehin, in vorliegendem Falle, eine allzuschiefe Gerade liefern würde. Da nämlich die beiden Seiten AB und EC parallel mit der Tafel sind, so müssen sie auch in der Perspective ihrer ursprünglichen Richtung parallel bleiben; man darf daher nur die Horizontalen A′B′ und C′E′ ziehen, durch welche sofort die Perspective A′B′C′E′ des Quadrats ABCE vollendet wird.

§. 285.

Die vertikalen Kanten des Pfeilers, welche in A, B, C, E projicirt sind, erhalten zu Perspectiven die in A′, B′, C′, E′ errichteten Vertikalen. Um aber ihre an Grösse abnehmenden Längen zu finden, bemerke man, dass die Diagonale AC der oberen Pfeilerbasis die Tafel in einem Punkte der Vertikalen G schneidet, und dass dieser Punkt in einer Höhe G′G″ liegen muss, welche der gegebenen Pfeilerhöhe h gleich ist. Mithin ist G″D die Perspective dieser oberen Diagonale, und ihr Durchschnitt mit den in A′ und C′ errichteten Vertikalen bestimmt die Ecken A″ und C″. Zieht man hierauf durch letztere Punkte die Horizontalen A″B″ und C″E″, so schneiden diese die anderen Vertikalen in den Ecken B″ und C″, und die auf diese Weise bestimmten Seiten A″E″ und B″C″ müssen in dem Punkte P zusammenlaufen, weil sie die Perspectiven zweier senkrecht auf der Tafel stehenden Geraden sind.

§. 286.

Man betrachte nun das Kapitäl und zwar fürs Erste das kleine rechtwinklige Parallelepiped, dessen Projection das Quadrat $\alpha\beta\gamma\varepsilon$ ist. Man könnte, um seine Perspective zu erhalten, auf eine ähnliche Weise verfahren wie beim Pfeiler selbst, mit dem einzigen Unterschiede, dass man statt X′Y′ zwei Grundlinien annehmen müsste in der Höhe der Grundflächen des Kapitäls: um aber hier noch eine andere Methode kennen

*) Diese Entfernung kann kürzer scheinen, als sie es nach den im §. 249 angegebenen Grenzen sein sollte. Man bemerke aber, dass der Rahmen der Figurentafel, auf welcher oft mehrere von einander unabhängige Gegenstände dargestellt sind, nicht genau der Rahmen der Tafel für die Perspective ist; letzterer brauchte nicht mehr Grösse zu haben, als nöthig ist, um das auf einen einzigen Gegenstand bezügliche Resultat zu umfassen. Ferner wird die Distanz PD oft auch kleiner genommen, um gewisse Einzelnheiten, deren genaue Betrachtung in geometrischer Hinsicht von Wichtigkeit ist, deutlicher herauszuheben.

zu lernen, bemerke man, dass die beiden Diagonalen jener Grundflächen, welche in G $\alpha\gamma$ projicirt sind, die Tafel in der Vertikalen G und zwar in zwei Punkten G_2 und G_3 schneiden, deren Höhen über G'' von den Dimensionen des Kapitäls abhängen, und entweder durch numerische Bestimmungen oder durch den in Fig. 2 dargestellten Aufriss in Fig. 2 gegeben sein können. Die Perspectiven dieser Diagonalen haben also die Linien G_2D und G_3D zu Perspectiven. Sucht man hierauf die Perspectiven α', γ' der Ecken α, γ so, als lägen letztere im Grundrisse, und errichtet aus α' und γ' Vertikalen, so werden diese von den Diagonalen G_2D und G_3D in den Punkten α'' und α''', γ'' und γ''' geschnitten, welche offenbar vier Ecken des Kapitäls sind. Verbindet man hierauf die Punkte α'' und γ'' mit dem Hauptpunkte P, so erhält man leicht die Perspective $\alpha''\beta''\gamma''\varepsilon''$ der untern Fläche des Kapitäls; durch die Eckpunkte α''' und γ''' aber wird auch die obere Fläche $\alpha'''\beta'''\gamma'''\varepsilon'''$ bestimmt. Die correspondirenden Ecken dieser Grundflächen müssen in einer und derselben Vertikalen liegen. Endlich verbinde man die unteren Ecken des Kapitäls mit den oberen Ecken des Pfeilers durch die Geraden $A''\alpha''$, $B''\beta''$, $C''\gamma''$, $E''\varepsilon''$, welche die schiefen Kanten darstellen, in welchen sich die vier Schrägflächen schneiden.

§. 287.

Die Unterscheidung der sichtbaren von den unsichtbaren Kanten ist durch die angegebene Lage des Gesichtspunktes vor der vertikalen Ebene XY so leicht, dass es wohl keiner weitern Erklärung bedarf. Man erinnere sich nur, dass nach den in der darstellenden Geometrie (§. 15) festgestellten Regeln, die **Hauptlinien**, wenn sie sichtbar sind, mit vollem Striche, und wenn sie unsichtbar sind, mit runden Punkten angegeben werden müssen; die **Hilfslinien** werden immer gestrichelt.

§. 288.

Zweiter Pfeiler. Die Seitenflächen dieses Pfeilers, dessen Basis das Quadrat abce im Grundrisse ist, liegen in der Verlängerung der Seitenflächen des ersten; mithin müssen auch die Seiten ae und bc ihre Perspectiven in den unbestimmten Geraden $T'P$ und $R'P$ haben; und weil ferner die Diagonale ac die Tafel in g schneidet, so hat sie zur Perspective die Linie $g'D$, welche die beiden vorhergehenden in den Punkten a' und c' schneidet, mittelst deren es leicht ist, die Perspective $a'b'c'e'$ des Quadrats abce zu vollenden. Taf. 14. Fig. 1.

Die Diagonale ac der obern Grundfläche dieses Pfeilers schneidet die Tafel XY in der Vertikalen g, und zwar in einer Höhe $g'g'' = G'G''$, weil beide Pfeiler als gleich gross vorausgesetzt werden. Mithin ist $g''D$ die Perspective dieser Diagonale; sie schneidet zwei der in a', b', c', e' errichteten Vertikalen in den Punkten a'' und c'', mittelst deren es leicht ist die Perspective der obern Grundfläche $a''b''c''e''$ zu vollenden, und um so leichter, da die Seiten $a''e''$ und $b''c''$ die Verlängerungen der schon gezeichneten Seiten $A''E''$ und $B''C''$ sein müssen.

§. 289.

Was das Kapitäl dieses Pfeilers betrifft, so sind zwei seiner Ecken unmittelbar durch den Durchschnitt der Diagonale g_2D mit den Verlängerungen der Linien $\alpha''\varepsilon''$ und $\beta''\gamma''$ gegeben, was zur Zeichnung der untern Grundfläche dieses Kapitäls hinreicht; hieraus aber erhält man auch die obere Grundfläche durch Verbindung von Vertikalen mit den Verlängerungen der Seiten des ersten Kapitäls.

§. 290.

Bei einer so einfachen Aufgabe, wie die vorliegende, könnte man des Grundrisses auch ganz entbehren.

Es ist hinreichend, wenn in Zahlen gegeben sind: 1) die Dimensionen der Pfeiler; 2) die Distanzen TA und Ta dieser Pfeiler von der Tafel; 3) die Distanz T′Z der Seitenfläche des Pfeilers von der Vertikalen PZ der Tafel. Denn die Punkte G′ und g′, deren man nöthig hat, erhält man offenbar, wenn man

$$T'G' = TG = TA, \text{ und } T'g' = Tg = Ta$$

nimmt.

§. 291.

Bei einem schief gesehenen Pfeiler müsste man so verfahren, wie es für den Sockel ABCE der Fig. 3 geschehen wird, der auch ein rechtwinkliges Parallelepiped ist und von dem Pfeiler sich nur durch eine geringere Höhe unterscheidet. Die Künstler nennen diess eine accidentelle Ansicht, wo keine der Seiten und Diagonalen mit der Tafel parallel oder senkrecht auf ihr ist. Unter Eckansicht versteht man diejenige Lage, wo eine der Diagonalen senkrecht auf der Tafel steht; Fig. 1 endlich stellt eine Vorderansicht dar.

Perspective eines Obelisken.

§. 292.

Taf. 14. Fig. 3. Dieser Obelisk besteht aus einer mit der Grundfläche abce parallel abgestumpften regulären Pyramide, welche auf einem Sockel ABCE ruht. In Beziehung auf die Tafel und den Gesichtspunkt bleiben die Bestimmungen dieselben wie in der vorigen Aufgabe.

Die Seiten AE und BC des Sockels, welche im Grundrisse liegen, schneiden die Tafel in den Punkten T und R, welche man nach T′ und R′ auf die neue Basis dieser Tafel versetzen muss, die aus der Lage XY in die Lage X′Y′ gebracht wurde. Klappt man hierauf den Gesichtspunkt auf die Vertikale auf, indem man PO′ = PD nimmt und zieht O′F parallel mit AE, so ist (§. 263) F der Fluchtpunkt der Seiten AE und BC, und T′F und R′F sind die Perspectiven dieser Seiten.

Die Seiten AB und CE sind zu sehr gegen XY geneigt, als dass es räthlich wäre ihren Fluchtpunkt anzuwenden. Zieht man daher die Diagonale EB, welche die Tafel in G schneidet, und mit ihr die Parallele O′f, so ist f der Fluchtpunkt dieser Diagonale (§. 263), und mithin G′f ihre Perspective, welche die Geraden T′F und R′F in den Punkten B′ und E′ schneidet, die somit die Perspectiven der Ecken B und E sein werden.

§. 293.

Die Ecke A findet man durch die Methode der Bogensehne (§. 269); d. h. man trägt die Länge AT in T′L′ und den Fluchtstrahl FO′ in FO″, und zieht hierauf die Gerade O″L′, welche die Perspective der Sehne AL ist und folglich den Punkt A′ als Perspective von A bestimmt. Nimmt man hierauf R′M′ = RC, so bestimmt die Gerade O″M′ den Punkt C′ als Perspective der Ecke C, und somit ergibt sich A′B′C′E als die vollständige Perspective des Quadrats ABCE.

§. 294.

Was die obere Grundfläche des Sockels betrifft, so bemerke man, dass die in AE und BC projicirten Seiten die Tafel in zwei Punkten schneiden, welche in T und R projicirt sind, in der That aber in T″ und R″ liegen, in einer Höhe T′T″, welche derjenigen gleich ist, die man dem Sockel geben will; folglich sind die

Perspectiven dieser beiden Seiten die Geraden T″F und R″F; diese aber schneiden die Vertikalen A′A″, B′B″, C′C″, E′E″ in den vier Ecken der oberen Grundfläche A″B″C″E″, welche somit besimmt ist.

§. 295.

Die untere Grundfläche abce der Pyramide liegt in der Horizontalebene, deren Grundlinie T″R″ ist. Die Seiten ae und bc haben ihre Durchgänge auf der Tafel in den Punkten t″ und r″, die man aus den Punkten t und r erhält; mithin sind die Perspectiven dieser Seiten die Geraden t″F und r″F, welche in Verbindung mit der Diagonale B″E″f die beiden Ecken b″ und e″ als Perspectiven von b und e bestimmen. Um die Perspectiven der andern Ecken a und c zu erhalten, könnte man wie in §. 293 verfahren, indem man die beiden Längen at und cr auf die Grundlinie T″R″ aufklappte, und ihre Endpunkte mit O″ verbände; um aber Verwirrung in der Figur zu vermeiden, wurden hier die Ecken a″ und c″ mittelst der Diagonale A″C″ des obern Quadrats des Sockels bestimmt, welches bereits construirt ist.

§. 296.

Die obere Grundfläche $\alpha\beta\gamma\varepsilon$ des Pyramidenrumpfs liegt in einer Horizontalebene, deren Grundlinie xy eine Höhe Zy hat, welche derjenigen gleich ist, die der Obelisk, vom Boden an gerechnet, erhalten soll. Man beziehe daher die Durchgänge θ und ϱ in θ' und ϱ' auf dieser neuen Grundlinie, alsdann erhält man θ'F und ϱ'F als die Perspectiven der in $\alpha\varepsilon$ und $\beta\gamma$ projicirten Seiten. Die Diagonale $\varepsilon\beta$ aber, welche die Tafel in (G, G″) schneidet, hat zur Perspective die Gerade G″f, welche die eben gefundenen Perspectiven in β' und ε' schneidet; diese sind also die Perspectiven der in β und ε projicirten Ecken.

Die Perspectiven der beiden andern Ecken α und γ erhält man wie in §. 293. Man klappt nämlich die Distanzen $\alpha\theta$ und $\gamma\varrho$ in $\theta'\lambda'$ und $\varrho'\mu'$ auf, und zieht die Geraden λ' O″ und μ' O″, durch welche die Perspectiven α' und γ' jener Ecken bestimmt werden. Endlich verbinde man die vier Ecken dieser obern Grundfläche $\alpha'\beta'\gamma'\varepsilon'$ mit den correspondirenden Ecken der untern Grundfläche a″b″c″e″, so erhält man die vollständige Perspective des Obelisken, in welcher die sichtbaren Kanten so leicht zu unterscheiden sind, dass keine weitere Erkläurng darüber nöthig ist.

Bemerkung. Statt eines einfachen Sockels hätte man dem Obelisken auch ein Fussgestelle, wie das in Fig. 4 oder in Fig. 5 im Aufrisse dargestellte geben können, dessen Gesimstheile horizontale Cylinder sind, die auf den vier Seiten sich wiederholen. Der Leser wird aufgefordert, die vorliegende Aufgabe auch mit Benützung der hier gegebenen Stücke perspectivisch auszuführen, wobei er aber nur diejenigen Linien mit Tusch ausziehen darf, welche sichtbar sind.

Drittes Kapitel.

Verschiedene Aufgaben über die geraden Linien.

Von den horizontalen, mit der Tafel nicht parallelen Geraden.

§. 297.

Taf. 15. Fig. 1. Es ist die Perspective A'B' einer Geraden gegeben, von welcher man weiss, dass sie horizontal ist und eine Höhe h über dem Grundrisse hat; man soll 1) den Durchgang und den Fluchtpunkt dieser Geraden suchen, 2) durch einen auf der Tafel gegebenen Punkt eine Parallele mit ihr oder eine Senkrechte auf sie ziehen.

Man nehme auf der Vertikalen der Tafel die Höhe ZH = h, so ist die Horizontale HT' die Grundlinie der Tafel in Beziehung auf diejenige Ebene, in welcher die gesuchte Gerade liegt. Verlängert man daher A'B' bis zum Durchschnitt T' mit HT', so ist T' der gesuchte Durchgang, d. h. der Punkt, in welchem die gesuchte Gerade die Tafel schneidet. Da nun ferner diese Gerade horizontal ist, so muss ihr Fluchtpunkt in der Horizontallinie DD' liegen: er muss aber auch in der Perspective A'B' liegen; folglich ist er in E.

§. 298.

Will man die wahre Lage der gesuchten Geraden finden, so darf man nur den Augpunkt in O' aufklappen, indem man PO' = PD' nimmt, und hierauf die Gerade O'E ziehen, welche, als der Fluchtstrahl, mit der gesuchten Geraden parallel sein muss (§. 263). Hat man also T' in T projicirt, so ziehe man TAB parallel mit O'E, so ist TAB die Projection der gesuchten Geraden, deren Lage nun vollständig bestimmt ist, da man weiss, dass sie in der Horizontalebene T'H liegt.

Um die wahre Lage des Punktes A' zu finden, ziehe man A'P, welche eine auf der Tafel senkrecht stehende Gerade darstellt, deren Durchgang R ist. Diese Senkrechte projicirt sich aber auf dem Grundrisse in RA, welche Gerade, in Verbindung mit TB, den gesuchten Punkt A bestimmt.

§. 299.

Man bemerke hier, dass die gegebene Perspective A'B' einer Geraden allein noch nicht hinreicht, die Lage dieser letztern vollkommen zu bestimmen; sie zeigt blos an, dass die Gerade in der durch A'B' und den Gesichtspunkt gelegten Ebene liege. Ist aber noch eine zweite Ebene gegeben, welche die gesuchte Linie ebenfalls enthält, wie es z. B. in §. 297 der Fall ist, so ist die Linie vollkommen bestimmt, weil sie der Durchschnitt beider Ebenen ist, der bekanntlich nur eine einzige Gerade sein kann. Ueberhaupt, die Perspective eines Gegenstandes hat für die Bestimmung desselben nur den Werth einer einzigen seiner Projectionen; hat man aber zwei Perspectiven des nämlichen Gegenstandes, deren jede auf einen andern Gesichtspunkt bezogen ist, und welche beide entweder auf derselben Tafel oder auf von einander abgesonderten Tafeln enthalten sind, so ist der Gegenstand nichts anderes als der Durchschnitt der beiden Pyramiden, welche zu Grundflächen jene Perspectiven und zu Spitzen die beiden gegebenen Augpunkte haben; so dass also in diesem Falle Lage und Form des Gegenstandes vollkommen bestimmt ist, aber freilich auf eine weniger bequeme Weise als durch das System zweier orthogonalen Projectionen, aus welchen viel leichter die Masse der absoluten Dimensionen zu erhalten sind.

§. 300.

Um aus dem auf der Tafel gegebenen Punkte M', eine perspectivische Parallele mit A'B' zu ziehen, darf man nur M' mit dem Fluchtpunkte E verbinden; denn die beiden Linien M'E und A'E stellen die Perspective zweier Geraden dar, welche unter sich parallel sind, weil sie denselben Fluchtpunkt E haben.

§. 301.

Will man vom Punkte A' eine perspectivische Senkrechte auf A'B' errichten, so ziehe man O'f geometrisch senkrecht auf O'E, und verbinde den Fluchtpunkt f mit A'. Denkt man sich nämlich das Dreieck EO'f durch Drehung um Ef, in die Horizontebene erhoben, so schliessen die Seiten O'E und O'f noch immer einen rechten Winkel im Raume ein; und weil die Geraden A'E und A'f mit diesen Seiten parallel sind (§. 300), so ist also der Winkel EA'f ein perspectivischer Rechter.

Sollte dieser perspectivische Winkel irgend eine andere Grösse ω haben, so müsste man die Gerade O'f so ziehen, dass sie mit O'E einen Winkel bildete, der geometrisch gleich ω wäre.

§. 302.

Den von zwei Horizontalen gebildeten perspectivischen Winkel EA'f in zwei gleiche Theile zu theilen. Die Fluchtpunkte der beiden Seiten dieses Winkels müssen in der Horizontlinie, in E und f, liegen; verbindet man diese mit dem Gesichtspunkte O', so erhält man einen zweiten Winkel EO'f, der, in die Horizontebene erhoben, mit dem gegebenen Winkel parallele Schenkel hätte; theilt man daher durch die Gerade O'φ den Winkel EO'f geometrisch in zwei gleiche Theile, so wird die Linie A'φ, welche eine Parallele mit O'φ darstellt, den Winkel EA'f ebenfalls in zwei perspectivisch gleiche Theile EA'φ und φA'f theilen.

§. 303.

Es ist eine Perspective T'P gegeben, welche nach dem Hauptpunkte P flieht und deren Durchgang T' ist; man soll 1) auf dieser Geraden eine Tiefe T'A' von 1 Meter abschneiden; 2) von einem gegebenen Punkte A' aus eine Länge A'B' von 3 Metern finden; 3) die wahre Entfernung der beiden gegebenen Punkte A' und B' suchen; 4) das gegebene Stück A'B' in drei perspectivisch gleiche Theile theilen. Taf. 15. Fig. 2.

Da die gegebene Perspective zum Fluchtpunkt den Hauptpunkt P hat, so stellt sie eine Gerade TB dar, welche senkrecht auf der Tafel steht und in der Höhe der Grundlinie T'H liegt. Nimmt man nun auf letzterer eine Länge T'R' gleich einem Meter, oder vielmehr gleich einem Modul *), und verbindet R' mit dem Distanzpunkte D, so bestimmt die Linie R'D die Tiefe der gesuchten Linie T'A'. Denn die Gerade R'D ist die Perspective einer Linie von 45°, wie der RA auf dem Grundrisse; diese letztere aber schneidet TB in

*) Da eine Perspective nicht immer in der natürlichen Grösse ausgeführt wird, so heisse Modul diejenige Länge, welche die absolute Länge eines Meters für die in der Tafel selbst liegenden Linien darstellen soll. Man bemerke jedoch, dass trotz dieser ersten Reduction, welche willkürlich aber unveränderlich ist für ein und dieselbe Tafel, die andern Linien, welche ebenfalls einem Meter gleich sind, aber nicht in der Tafel liegen, eine je nach ihrer Lage mehr oder minder beträchtliche Abnahme der Länge erleiden; diese Abnahme aber soll nach den in diesem Kapitel entwickelten Regeln bestimmt werden.

einer Entfernung TA = TR = 1 Meter; mithin ist T′A′ die Perspective eines Stücks TA, welches die Länge eines Meters hat, und man sagt nun T′A′ sei perspectivisch einem Meter gleich.

§. 304.

Ist der Punkt A′ gegeben, und man will eine Länge A′B′ abschneiden, welche perspectivisch gleich drei Metern sei, so ziehe man DA′R′, nehme R′S′ geometrisch gleich drei Metern oder drei Moduln und ziehe S′D, welche Gerade sodann die gesuchte Länge A′B′ bestimmen wird. Denn R′D und S′D sind die Perspectiven zweier parallelen Geraden, welche eine Neigung von 45° gegen die Tafel haben und auf dem Grundrisse in RA und SB projicirt sind. Nun aber ist

TA = TR, TB = TS, also AB = RS = 3 Meter;

folglich ist A′B′ die Perspective des Stücks AB, und also perspectivisch gleich drei Metern; oder anders ausgedrückt: A′B′ und R′S′ sind zwei perspectivisch gleiche Linien, und da die zweite in der Tafel selbst liegt und eine absolute Länge von drei Metern hat, so sagt man, die erste habe eine perspectivische Länge von drei Metern.

§. 305.

Umgekehrt, wenn ein bestimmtes Stück A′B′ einer Perspective in seiner wahren Grösse gefunden werden soll, so ziehe man die Linien DA′R′, DB′S′, alsdann zeigt das Stück R′S′, welches von der durch den Durchgang T′ der gegebenen Geraden gezogenen Grundlinie abgeschnitten wird, die wahre Grösse von A′B′ an. Denn A′B′ und R′S′ sind die Perspectiven der beiden gleichen Geraden AB und RS (§. 304), deren letztere ihre Grösse beibehält, weil sie in der Tafel selbst liegt.

§. 306.

Um das gegebene Stück A′B′ in drei perspectivisch gleiche Theile zu theilen, darf man nur die Endpunkte A′ und B′ mit einem beliebigen Punkte f der Horizontlinie durch die Geraden fA′a, fB′b verbinden, und hierauf den Abschnitt ab geometrisch in drei gleiche Theile theilen; alsdann wird durch die Verbindungslinien fa, fe, fg, fb das Stück A′B′ auf die verlangte Art getheilt. Denn diese Verbindungslinien sind die Perspectiven unter sich paralleler Linien, die gleich weit von einander entfernt sind, weil sie auf der Tafel die gleichen Stücke ae, eg, gb abschneiden; mithin theilen diese Parallelen auch AB in drei gleiche Theile, und die Perspectiven dieser Theile sind: A′E′, E′G′, G′B′.

§. 307.

Taf. 15. Fig. 3. Es ist eine Perspective T′F gegeben, welche nach einem beliebigen Punkte F der Horizontlinie flieht und deren Durchgang auf der Tafel T′ ist; man soll 1) auf dieser Geraden eine Länge abschneiden, die von der Tafel an gerechnet, einem Meter gleich ist; 2) von einem gegebenen Punkte A′ aus eine Länge A′B′ von drei Metern finden; 3) die wahre Entfernung der beiden gegebenen Punkte A′ und B′ suchen; 4) das gegebene Stück A′B′ in n gleiche Theile theilen.

Nachdem man den Gesichtspunkt in O′ aufgeklappt und den Fluchtstrahl O′F der gegebenen perspectivischen Geraden gezogen, klappe man diesen letzteren in FO″ auf, nehme hierauf T′R′ = 1 Meter und ziehe R′O″, so erhält man T′A′ als die gesuchte Länge. Denn aus §. 298 ist bekannt, das die wahre Linie T′F sich auf dem Grundrisse in einer mit O′F parallelen Geraden TB projicirt; nimmt man nun

TA = 1 Meter und beschreibt mit dieser Linie als Halbmesser einen Bogen, so ist die Sehne AR desselben mit dem Sehstrahl O′O″ parallel (§. 269); folglich hat diese Sehne, deren Durchgang R′ ist, ihren Fluchtpunkt in O″ und ihre Perspective ist daher die Linie R′O″, durch welche somit ein Stück T′A′ abgeschnitten wird, das die Perspective von der Länge T′A = 1 Meter ist.

Man kann auch sagen, die Figur A′T′R′ sei die Perspective eines gleichschenkligen Dreiecks ATR, dessen eine Seite TR in der Perspective ihre wahre Länge behält, weil sie in der Tafel liegt, daher denn T′A′ und T′R′ zwei perspectivisch gleiche Linien sind.

§. 308.

Will man von einem gegebenen Punkte A′ eine perspectivische Länge A′B′ von 3 Metern abschneiden, so verbinde man den in O″ aufgeklappten Gesichtspunkt mit A′ durch die Gerade O″A′R′, nehme die geometrische Länge R′S′ von 3 Metern und ziehe S′O″, so erhält man A′B′ als die gesuchte Länge. Denn wenn AB das gesuchte Stück der in ihrer wahren Lage und Grösse gegebenen Geraden TAB darstellt, welche bekanntlich mit O′F parallel sein muss, und man klappt diese Linie TAB um ihren Durchgang (T, T′) auf die Tafel auf, so beschreiben die Punkte A und B Kreisbögen, deren Sehnen AR und BS mit dem Sehstrahl O′O″ parallel sind (§. 269); O″ ist daher der Fluchtpunkt dieser Sehnen. Die erste AR hat daher zur Perspective O″A′ und durchdringt die Tafel in R′ auf der Horizontalen T′H; die zweite Sehne BS, deren Endpunkt B 3 Meter von A entfernt liegen soll, wird daher die Tafel im Punkt S′ schneiden, so dass R′S′ = 3 Meter; ihre Perspective ist also S′O″, und diese bestimmt auf T′F′ das Stück A′B′ als die Perspective einer gegebenen Länge AB von 3 Metern.

§. 309.

Umgekehrt, wenn man die wahre Entfernung der beiden perspectivisch bestimmten Punkte A′ und B, finden will, so verbinde man sie mit dem Punkte O″ durch die Geraden O″A′R, O″B′S; diese bestimmen alsdann R′S′ als die wahre geometrische Grösse von A′B′; denn letztere Gerade ist die Perspective einer Linie AB, welche sich in RS oder vielmehr in R′S′ aufklappen würde.

§. 310.

Soll endlich das gegebene Stück A′B′ perspectivisch in drei gleiche Theile getheilt werden, so verbinde man die Endpunkte A′ und B′ mit einem beliebigen Punkte f der Horizontlinie, und theile das hiedurch abgeschnittene Stück ab in drei gleiche Theile, so wird durch die Geraden fe, fg das gegebene Stück A′B auf die verlangte Art getheilt, wie solches in §. 306 bewiesen worden ist.

§. 311.

Man soll auf der Perspective T′F die auf einander folgenden Theile B′C′, C′E′,... so bestimmen, dass sie alle dem gegebenen Abschnitte A′B′ perspectivisch gleich seien. Man könnte offenbar diese Aufgabe durch ähnliche Constructionen lösen, wie in §. 308, indem man auf die Grundlinie T′H der Fig. 3 Abschnitte auftrüge, die alle gleich R′S′ wären; folgendes Verfahren ist aber bequemer, besonders wenn in den Theilpunkten Senkrechte errichtet werden müssen, wie es z. B. bei der Façade eines Gebäudes vorkommt, wo Fenster, Thüren, Pfeiler u. s. w. darzustellen sind. Taf. 15. Fig. 4.

Nachdem man in A′ und B′ zwei Vertikalen von beliebiger Länge errichtet hat, die aber alle in einer Geraden A″F sich enden, deren Fluchtpunkt ebenfalls F ist, verbinde man diesen Punkt mit der Mitte M von

$A'A''$ durch eine Linie MF, welche auch die $B'B''$ in ihrer Mitte schneiden wird; hierauf ziehe man die Diagonale $A''M'$, so bestimmt diese den Punkt C'. Nun errichte man ferner eine dritte Vertikale $C'C''$ und ziehe die $B''M''$, durch welche der Punkt E' bestimmt wird; eben so bestimme man durch die Vertikale $E'E''$ und die Diagonale $C''M'''$ den Punkt G', und so fort. Auf diese Art erhält man die Abschnitte $B'C'$, $C'E'$, $E'G'$, ... welche alle perspectivisch gleich $A'B'$ sind. Denn die Figur $A'A''C''C'$ ist offenbar die Perspective eines Rechtecks, dessen Diagonale $A''C'$ ist und das M' zum Mittelpunkte hat, weil in diesem Punkte die Diagonale von der parallel mit den Grundlinien durch die Mitte M der Höhe gezogenen Geraden MF geschnitten wird; mithin theilt also die durch den Mittelpunkt M' gehende Vertikale $B''B'$ die Grundlinie des Rechtecks in zwei gleiche Theile, und es sind also die Abschnitte $A'B'$ und $B'C'$ die Perspectiven zweier geometrischer Theile von gleicher Länge.

§. 312.

Wollte man im Gegentheile die perspectivische Mitte des gegebenen Abschnitts $A'B'$ finden, so müsste man die Diagonale $A''B'$ ziehen, welche die MF im Mittelpunkte des Rechtecks $A'A''B''B'$ schnitte; alsdann würde die durch diesen Mittelpunkt gezogene Vertikale den Abschnitt $A'B'$ in zwei gleiche Theile theilen.

§. 313.

Man bemerke ferner, dass man alle diese Constructionen auch auf den mit der Grundlinie XY gezogenen Parallelen $A'a$, $B'b$, ... hätte ausführen können, wie Fig. 4 es zur Genüge zeigt.

Gerade, welche parallel mit der Tafel sind.

§. 314.

Taf. 15. Fig. 5. Es sei die Perspective $A'B'$ einer in einer bekannten Frontebene liegenden Vertikalen gegeben; man soll 1) ihren Fusspunkt auf dem Grundrisse, 2) die wahre Länge des Stücks $A'B'$ finden; 3) soll man eine Länge $A'M'$ abschneiden, welche perspectivisch einem Meter gleich ist, 4) $A'B'$ in drei gleiche Theile theilen.

Wenn die gegebene Frontebene sich 1 Meter hinter der Tafel befindet, so suche man auf PY eine Tiefe YQ, welche perspectivisch gleich einem Meter ist (§. 303), indem man YL = 1 Meter nimmt, und LD' zieht. Alsdann ist die mit XY parallel gezogene Gerade QR die Perspective des Grundschnitts der Frontebene auf dem Grundrisse; und folglich ist ihr Durchschnitt R mit $A'B'$ die Perspective des Fusspunkts der gegebenen Vertikalen.

§. 315.

Um die wahre Grösse des Abschnitts $A'B'$ zu erhalten, verbinde man seine Endpunkte und den Fusspunkt R mit irgend einem Punkte F der Horizontlinie durch die Geraden FR, FA', FB', so schneiden die beiden letzteren auf der aus r in der Tafel errichteten Vertikalen ein Stück ab ab, welches die wahre Grösse von $A'B'$ angibt. Denn die Linien Fa und Fb stellen zwei horizontale Parallelen dar; mithin ist die Figur $A'B'ba$ ein Rechteck, dessen in der Tafel selbst liegende Seite ab die wahre Länge derjenigen angibt, welche $A'B'$ zur Perspective hat.

§. 316.

Wenn man ferner auf $A'B'$ eine perspectivische Länge von 1 Meter finden soll, so nehme man auf

der Vertikalen rb ein Stück am = 1 Meter, alsdann bestimmt die Gerade mF das gesuchte Stück A'B': denn A'M' und am sind die Perspectiven zweier gleicher Parallelen, weil sie zwischen den Parallelen Fa und Fm liegen.

§. 317.

Um endlich A'B' in drei perspectivisch gleiche Theile zu theilen, darf man nur die Linie A'B' selbst in drei Theile theilen, deren absolute Längen gleich sind, weil alle Theile einer mit der Tafel parallelen Geraden in der Perspective ihr ursprüngliches Verhältniss behalten (§. 276).

§. 318.

Es ist die Perspective A'B' einer in einer bekannten Frontebene liegenden Geraden gegeben, man soll 1) den Fusspunkt dieser Geraden auf dem Grundrisse, 2) die wahre Grösse des Stücks A'B' finden; 3) soll man eine Länge A'M', die perspectivisch einem Meter gleich ist, abschneiden, 4) A'B' in drei perspectivisch gleiche Theile theilen. Taf. 15. Fig. 6.

Befindet sich die Frontebene, in welcher die gegebene Gerade liegt, 1 Meter z. B. hinter der Tafel, so suche man wie in §. 303, eine Tiefe XQ, welche perspectivisch einem Meter gleich ist, indem man XL = 1 Meter nimmt und LD zieht. Alsdann ist die mit der Tafelbasis XY parallele Gerade QR offenbar die Perspective des Grundschnittes der Frontebene auf dem Grundrisse und mithin R, wo A'B' die QR schneidet, der Fusspunkt der gegebenen Geraden.

§. 319.

Um die wahre Grösse von A'B' zu erhalten, klappe man die gegebene (nicht perspectivisch genommene) Gerade um ihren Fusspunkt in den Grundschnitt QR ihrer Frontebene auf. Aus §. 275 ist bekannt, dass hiebei alle Theile dieser Geraden die nämliche perspectivische Grösse behalten, so dass also A'B' gleich a'b' sein wird. Um nun die wahre Grösse dieser letztern zu erhalten, verbinde man ihre Endpunkte mit irgend einem Punkte F der Horizontlinie; alsdann werden die Geraden Fa', Fb', welche zwei Parallelen darstellen, auf der Tafelbasis XY ein Stück ab abschneiden, welches die wahre Grösse von a'b' und mithin auch von A'B' angibt. Man darf jetzt also nur noch die absolute Länge von ab in Metern, oder in Theilen des angenommenen Moduls angeben.

§. 320.

Will man auf A'B' eine Länge angeben, welche perspectivisch gleich einem Meter sei, so folgt aus dem Vorhergehenden, dass, nachdem man A' in a' aufgeklappt, Fa' gezogen und am = 1 Meter genommen hat, man nun noch mF ziehen muss, um die verkürzte Länge a'm' zu finden, welche in der bekannten Frontebene ein Meter darstellt. Endlich muss a'm' in A'M' zurückführen.

Bemerkung. Statt der Aufklappung Ra'b', die hier geflissentlich angewendet wurde, als ein Mittel, dessen man sich in manchen Fällen bedienen muss, wäre es kürzer gewesen, irgend einen Punkt F' der Horizontlinie mit R, A', B' zu verbinden, und hierauf durch den Punkt, in welchem F'R die XY schneidet, eine Parallele mit A'B' zu ziehen, auf welcher man alsdann eben so verfahren würde, wie in Fig. 5 auf der Linie rb.

§. 321.

Um endlich A′B′ in drei perspectivisch gleiche Theile zu theilen, darf man nur A′B′ selbst in drei Theile theilen, deren absolute Längen einander gleich sind; denn aus §. 276 ist bekannt, dass alle Theile einer mit der Tafel parallelen Geraden in der Perspective ihr ursprüngliches Verhältniss beibehalten.

Gerade Linien von beliebiger Richtung.

§. 322.

Taf. 15. Fig. 9. Es ist die Fliehebene R′P gegeben; man soll in dieser Ebene durch den Punkt R′ eine Gerade ziehen, welche mit dem Horizont den Neigungswinkel ω bilde.

R′P ist hier die Perspective des horizontalen Grundschnittes der Vertikalebene (§. 279), welche die gesuchte Gerade enthält; oder vielmehr die Perspective der Horizontalprojection dieser Geraden. Und da hier R′P durch den Hauptpunkt geht, so ist also diese Fliehebene senkrecht auf der Tafel (§. 262). Hieraus folgt, dass der mit der gesuchten Geraden parallel gezogene Sehstrahl seinen Durchgang in der Vertikalen PZ hat und also mit PZ und dem Hauptstrahle (§. 260) ein rechtwinkliges Dreieck bildet, dessen Winkel an der Grundlinie gleich ω ist. Klappt man nun dieses Dreieck um PZ auf die Tafel auf, so kommt der Augpunkt offenbar in den Distanzpunkt D zu liegen; und zieht man daher DF′ so, dass der Winkel PDF′ gleich ω wird, so ist DF′ die Aufklappung des Sehstrahles und F′ der Fluchtpunkt der gesuchten Geraden. Mithin ist R′F′ die Perspective dieser Geraden, und T′ in der aus T errichteten Vertikalen ist ihr Durchgang durch die Tafel.

§. 323.

Es ist die Perspective A′B′ einer in der Fliehebene TP liegenden Geraden gegeben; man soll 1) die Durchschnitte dieser Geraden und ihren Fluchtpunkt finden, 2) eine Länge A′B′ abschneiden, welche perspectivisch einem Meter gleich ist, 3) das gegebene Stück A′B′ in n gleiche Theile theilen.

Da die gegebene Gerade, deren Perspective A′B′ ist, den Grundriss nur in der Linie TP schneiden kann, so ist also R′ ihr horizontaler Grundschnitt; ihr vertikaler ist in T′ auf der Vertikallinie TT′, welche der Durchschnitt der Tafel mit der Fliehebene ist, in welcher die gegebene Gerade liegt. Was den Fluchtpunkt betrifft, so wäre er gegeben durch einen mit A′B′ parallel gezogenen Sehstrahl; dieser Strahl nun würde die Tafel in der nämlichen Vertikalen treffen, wie der mit dem Grundschnitte TP parallel gezogene Sehstrahl, der die Tafel in P schneidet; mithin ist PZ die Vertikale, welche den gesuchten Fluchtpunkt enthält, und da er auch in der verlängerten A′B′ liegen muss, so ist er also im Durchschnitt dieser beiden Geraden.

§. 324.

Um nun ferner von dem gegebenen Punkte aus eine Länge A′M′ abzuschneiden, welche perspectivisch einem Meter gleich sei, denke man sich die gegebene Gerade von A′B′ um den Punkt R′ auf ihre Projection R′P aufgeklappt. Bei dieser Bewegung beschreiben die Punkte A′ und M′ (deren letzterer unbekannt ist) zwei Kreisbögen, deren Sehnen parallel sind, und es handelt sich nun darum, den Fluchtpunkt dieser Sehnen zu finden. Denkt man sich nun zwei Sehstrahlen, den einen mit A′B′, den andern mit R′P parallel, so werden dieselben die Tafel in den Punkten F′ und P schneiden, und werden, wenn man sie um PZ aufklappt, in DF′ und DP zu liegen kommen, so dass also nun F′L die Aufklappung einer Sehne darstellt, welche, im

Raume, mit den beiden vorigen Sehnen parallel ist. Zieht man daher DF'' parallel mit F'L, so ist F'' der gesuchte Fluchtpunkt. Es stellt also A'F'' die Sehne des vom Punkte A' beschriebenen Bogens dar, durch welche der Punkt A'' als Aufklappung des Punktes A' bestimmt wird. Nun suche man eine Länge A''M'', welche perspectivisch einem Meter gleich sei (indem man DA''G, GH = 1 Meter, und hierauf DH zieht, wie in §. 304) und führe den Punkt M'' wieder in seine erste Lage zurück durch einen Kreisbogen, dessen durch F''M'' dargestellte Sehne den gesuchten Punkt M' bestimmen wird. Die Perspectiven A'M' und A''M'' stellen in der That gleiche Längen dar, weil die eine die Aufklappung der andern ist.

§. 325.

Um endlich einen gegebenen Abschnitt A'B' in n perspectivisch gleiche Theile zu theilen, könnte man, wie oben, diese Gerade auf R'P aufklappen und somit die Aufgabe auf die des §. 306 zurückführen. Es ist aber hinreichend A'B' durch zwei Vertikalen auf ab zu projiciren, um auf die Projection ab die Methode jenes §. 306 anzuwenden; — die durch die Theilpunkte dieser letzteren Geraden gezogenen Geraden theilen alsdann auch A'B' auf die verlangte Art. Denn es ist bekannt, dass eine Gerade und ihre Horizontalprojection durch beliebige Vertikalen in gleichem Verhältnisse getheilt werden, und ferner, dass Vertikallinien auch in der Perspective vertikal bleiben.

§. 326.

Es ist eine Fliehebene gegeben, deren horizontaler Grundschnitt eine Perspective R'F hat, welche die Tafel nicht in P trifft; man soll in dieser Ebene durch den Punkt R' eine Gerade ziehen, welche mit dem Horizont den Winkel ω bilde. Taf. 15. Fig. 10.

Man denke sich zwei Sehstrahlen, den einen parallel mit der Horizontalen R'F, der also die Tafel in F schneiden muss; den andern parallel mit der gesuchten Geraden, der die Tafel in der Vertikalen FF', in dem noch unbekannten Punkte F', dem Fluchtpunkte der gesuchten Geraden schneiden wird. Diese beiden Strahlen schliessen einen Winkel ein, der gleich ω ist, und derjenige von ihnen, welcher durch F geht, ist offenbar die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, das PF und die Distanz PD des Auges von der Tafel zu Katheten hat. Legt man nun, nachdem man dieses Dreieck FPO' construirt hat, die Hypotenuse FO' auf die Horizontlinie in FO'' und zieht die Gerade O''F'' so, dass sie mit der Horizontlinie einen Winkel ω bildet, so ist diese Gerade die Aufklappung des mit der gesuchten Geraden parallelen Sehstrahls und der Fluchtpunkt dieser Geraden ist in F', weil dieser Punkt unbeweglich auf der Vertikalen FF' bleibt, wenn man den Winkel F'O''F in die mit der Fliehebene R'F parallele Fluchtebene (§. 282) zurückführt. Hieraus folgt, dass R'F' die Perspective der gesuchten Geraden ist; sie durchschneidet die Tafel in dem Punkte T' auf der in T errichteten Vertikalen.

§. 327.

Es ist die Perspective A'B' einer in der Fliehebene TF liegenden Geraden gegeben; man soll 1) die Grundschnitte dieser Geraden und ihren Fluchtpunkt finden, 2) eine Länge A'M' von ihr abschneiden, welche perspectivisch einem Meter gleich sei, 3) das gegebene Stück A'B' in n gleiche Theile theilen.

Da der horizontale Grundschnitt in TF liegen muss, so ist er also der Durchschnitt R' dieser Geraden mit A'B'; der vertikale Grundschnitt aber liegt in T', weil die Vertikale TT' der Durchschnitt der Tafel mit der Fliehebene TF ist, welche die gegebene Gerade enthält. Was den Fluchtpunkt betrifft, so ist er gegeben

durch einen mit A'B' parallel gezogenen Sehstrahl; dieser Strahl nun muss die Tafel in der nämlichen Vertikale schneiden, wie der mit TF parallele Sehstrahl; und da dieser letztere die Tafel offenbar in F trifft, so ist also FF' die Vertikale, in welcher der gesuchte Fluchtpunkt liegen muss; er liegt also im Durchschnitte F' dieser Vertikale mit der gegebenen Perspective A'B'.

§. 328.

Um nun von dem gegebenen Punkte A' aus eine Länge abzuschneiden, welche perspectivisch einem Meter gleich sei, denke man sich die gegebene Gerade von A'B', um den Punkt R', in ihre Projection R'F aufgeklappt. Bei dieser Bewegung beschreiben der gegebene Punkt A' und der noch unbekannte Punkt M' zwei Kreisbögen, deren Sehnen parallel sind. Um nun den Fluchtpunkt dieser Sehnen zu finden, denke man sich zwei Sehstrahlen, den einen mit A'B', den andern mit R'F parallel; diese beiden Strahlen treffen die Tafel offenbar in den Punkten F und F', und bilden daher mit der Vertikalen FF' ein rechtwinkliges Dreieck, das, um letztere Gerade auf die Tafel aufgeklappt, sich als FO''F' darstellt; um es zu construiren, nehme man die Grundlinie FO'' gleich der Hypotenuse FO' eines andern rechtwinkligen Dreiecks, welches FP und die Distanz PO' = PD des Auges von der Tafel zu Katheten hat. Zieht man hierauf den Kreisbogen F'L und seine Sehne, so ist diese, wenn man sie sammt den Sehstrahlen O''F und O''F' in ihre ursprüngliche Lage zurückführt, den Sehnen der von A' und M' beschriebenen Kreisbögen parallel; und zieht man daher O''F'' parallel mit F'L, so ist der Punkt F'' der allen jenen Sehnen gemeinschaftliche Fluchtpunkt.

Hieraus ergibt sich A'F'' als Perspective der Sehne des von A' beschriebenen Bogens, und A'' als Aufklappung dieses Punktes; man suche nun ferner eine Länge A''M'', welche perspectivisch einem Meter gleich sei (indem man, wie in §. 308, die Linien O''A''G, GH = 1 Meter und O''H zieht) und erhebe den Punkt M'' wieder in seine vorige Lage durch einen Kreisbogen, dessen Sehne zur Perspective die Linie F''M'' haben muss, welche sofort auch den gesuchten Punkt M' bestimmt. Die beiden Abschnitte A''M'' und A'M' sind aber in der That die Perspectiven zweier gleichen Geraden, weil die eine die Aufklappung der andern ist.

§. 329.

Um endlich einen gegebenen Abschnitt A'B' in n perspectivisch gleiche Theile zu theilen, könnte man, wie vorhin, diese Gerade auf ihre Projection R'F aufklappen, und so die Aufgabe auf die des §. 310 zurückführen. Es ist aber kürzer A'B' durch zwei Vertikalen auf ab zu projiciren und nun auf die Gerade ab die Methode des §. 310 anzuwenden; denn die aus den Theilpunkten der letztgenannten Linie errichteten Vertikalen theilen A'B' auf die verlangte Art u. s. w. (§. 325).

Von den perspectivischen Maasstäben.

§. 330.

Taf. 15. Fig. 8. Wenn man in irgend einem Punkte A der Tafelbasis AX eine Vertikale AZ errichtet, und sich eine Senkrechte auf die Tafel denkt, deren Perspective die Linie AY'P ist, so hat man ein System von drei Coordinaten-Axen, welches zur Bestimmung der Lage irgend eines Punktes m im Raume, und zur unmittelbaren Auffindung seiner Perspective dienen kann. Dieser Punkt wäre bestimmt, wenn z. B. in Centimetern gegeben wäre:

1) Seine Entfernung z = 7 von der Grundrissebene XAY', auf der Vertikalen AZ genommen,

2) seine Entfernung y = 2 von der Tafel ZAX, auf AY' genommen.

3) seine Entfernung $x = 3$ von der Fliehebene $Z'AY'$ auf AX genommen.

Theilt man nun die beiden Geraden AZ und AX in Centimeter und verbindet die Theilpunkte der letztgenannten Geraden mit dem Hauptpunkte P und dem Distanzpunkte D, so stellt die erste Gruppe dieser Transversalen senkrecht auf der Tafel stehende, und die zweite solche Gerade dar, welche unter 45^0 gegen die Tafel geneigt sind, und daher die ersten in gleiche Theile theilen, deren jeder einem Centimeter gleich ist (§. 305). Die verschiedenen Horizontalen, wie BL, sind also die Grundschnitte der 1, 2, 3, . . . Centimeter von der Tafel entfernten Frontebenen. Nimmt man folglich den Punkt M, welcher im Durchschnitte der Frontebene $y = 2$ mit der Fliehebene $x = 3$ liegt, so hat man schon die Projection des eben gegebenen Punktes, und man darf daher auf derselben nur noch eine Vertikale MM' von 7 Centimeter Höhe errichten. Zu diesem Zwecke verbinde man den Punkt P mit dem auf AZ bemerkten Theilpunkte 7, so stellt die Vertikale BC eine Höhe von 7 Centimetern dar (§. 316), und man darf daher nur noch $MM' = BC$ nehmen, um die gesuchte Perspective zu erhalten.

§. 331.

Man hätte auch der Eintheilung von AZ entbehren und $MM' = BL$ nehmen können; denn die letztere Länge ist perspectivisch gleich AR, d. h. gleich 7 Centimetern, und nach dem Lehrsatze des §. 275 müssen MM' und BL, da sie zwei gleiche, in einerlei Frontebene liegende, Linien darstellen, einander wirklich gleich sein.

§. 332.

Die so getheilte Linie AX heisst der Front-Maasstab, AY'P der Flieh-Maasstab und AZ endlich ist der Höhenmaasstab. Man sieht zugleich, dass die Anwendung dieser Maasstäbe die Projection des gegebenen Gegenstandes auf dem Grundrisse unnöthig macht; man braucht nur in Zahlen die Entfernungen jedes merkwürdigen Punktes von den 3 Ebenen ZAX, ZAY' und XAY' zu wissen; diese Entfernungen aber sind leicht zu messen, besonders wenn es sich von regelmässigen Körpern handelt, wie sie in der Architektur z. B. vorkommen.

§. 333.

Wollte man die Frontebene angeben, welche z. B. 13 Centimeter hinter der Tafel liegt, so wäre es unbequem hiefür den 13ten Theilpunkt von AX anzuwenden; man verfährt daher auf folgende Art. Zieht man die Horizontale 6K, so stellt die Distanz RK schon 6 Centimeter dar; es muss also die Gerade DK, welche eine Neigung von 45^0 gegen die Tafel hat, die AX in einem Punkte schneiden, dessen Entfernung von R gleich RK und dessen Entfernung von A also gleich 13 Centimetern ist. Die Gerade DK liefert also auf AY' den 13ten Theilpunkt, und die Horizontale 13 G bezeichnet die gesuchte Frontebene. Wenn man nun ferner DG zöge, so würde diese den Maasstab AY' im 20sten Theilpunkte schneiden u. s. w.

§. 334.

Methode der Quadrate. Wenn die Tafel viele kleine, unregelmässig vertheilte Gegenstände darstellen soll, wie z. B. das Innere eines Zimmers, so theilt man den Grundriss in Quadrate, z. B. in Quadratcentimeter, deren Seiten zur Basis der Tafel parallel und senkrecht sind; in diese Quadrate nun vertheilt man die fraglichen Gegenstände nach der vorgeschriebenen Ordnung. Hierauf zeichnet man die Perspective dieser Quadrate mittelst ihrer in D zusammenlaufenden Diagonalen, wie es schon in den §§. 330 Taf. 15. Fig. 8.

und 333 gemacht wurde; auf diese Art wird die Tafel in perspectivische Quadrate getheilt, unter welche man näherungsweise die Gegenstände ebenso vertheilt, wie es auf dem Grundrisse geschah. Dieses Verfahren ist zu einfach, als dass es noch einer weitern Auseinandersetzung bedürfte; es dient den Malern öfters bei Skizzirung ihrer Zeichnungen oder auch wohl, wenn sie ein grösseres Gemälde auf einen kleinern Maasstab bringen wollen.

Von der figürlichen oder reducirten Distanz.

§. 335.

Taf. 15. Fig. 7. Es geschieht ziemlich oft, dass die Distanzpunkte D, D′ über die Tafel hinausfallen und zu weit entfernt liegen, als dass man sich ihrer bedienen könnte. In diesem Falle kann man das in folgendem Beispiele erläuterte Verfahren anwenden. Wenn auf der Perspective TP, die nach dem Hauptpunkte P flieht, eine Länge TA von 3 Metern abgeschnitten werden sollte, so müsste man, nach §. 303, TG = 3 Meter nehmen und DAG ziehen, wodurch man den gesuchten Punkt A erhielte. Nimmt man nun aber eine Distanz Pd halb so gross als PD und ebenso Tg halb so gross als TG, so wird die Linie dg wieder durch denselben Punkt A gehen. Denn wegen der ähnlichen Dreiecke APD und ATG theilt die Gerade DG die TP in zwei Theile PA und AT, welche sich zu einander verhalten, wie PD und TG; aus einem ähnlichen Grunde theilt auch die Gerade dg die TP in zwei Theile, die sich wie Pd und Tg zu einander verhalten; da aber offenbar das Verhältniss von Pd zu Tg dem von PD zu TG gleich ist, so wird also TP von den Geraden DG und dg in einem und demselben Punkte geschnitten. — Hätte man Pd′ gleich einem Drittheile von Pd genommen, so hätte man Tg′ gleich einem Drittheile von TG nehmen müssen und alsdann hätte d′g die TP wieder in A geschnitten.

Die Längen Pd, Pd′, . . . nennt man figürliche oder reducirte Distanzen.

§. 336.

Fig. 11. Noch ein anderes Beispiel dieser Distanzreduction! Es sei die Perspective AB einer horizontalen Geraden gegeben; man soll im Punkte A einen Winkel anlegen, der perspectivisch gleich ω sei. Nach der Methode §. 301 müsste man den Durchschnittspunkt der Geraden AB und PD anwenden; da aber dieser Fluchtpunkt zu weit entfernt ist, so verbinde man den Punkt A mit dem Hauptpunkte P, und errichte die Vertikale $Po = \frac{1}{2} PD$; ferner nehme man $Pa = \frac{1}{2} PA$ und ziehe ab geometrisch parallel mit AB. Um nun die Aufgabe in Beziehung auf die Gerade ab und den in o aufgeklappten Augpunkt zu lösen, muss man (§. 301) ob ziehen, den Winkel $bog = \omega$ machen, und ag ziehen, so wird der Winkel bag dem Winkel bog perspectivisch gleich sein. Ist dieses geschehen, so darf man nur noch AG geometrisch parallel mit ag ziehen, um BAG als den verlangten Winkel zu erhalten. Denn wenn irgend ein Gegenstand und ein Augpunkt als unbeweglich fest im Raume gegeben sind, und man nimmt an, die Tafel nähere sich parallel mit ihr selbst, so ist klar, dass diese bewegliche Tafel die Pyramide der Sehstrahlen fortwährend in einem Polygon schneiden muss, das dem ursprünglichen Polygon stets ähnlich und parallel ist. Auch muss, in jedem der Durchschnitte, die zu A homologe Ecke auf dem Sehstrahle bleiben, welcher durch A geht. Dieser Strahl nun ist in AP projicirt; mithin musste der Punkt a auf letzterer Geraden genommen werden, und zwar in ihrer Mitte, weil man die Distanz des Auges von der Tafel auf $Po = \frac{1}{2} PD$ reducirt hat. BAG und bag sind also die Perspectiven des fraglichen Winkels auf zwei parallelen Tafeln, und es müssen folglich auch ihre Schenkel geometrisch parallel sein.

§. 337.

Sollte der gegebene Winkel BAG in zwei perspectivisch gleiche Tafeln getheilt werden, so dürfte man nur ab und ag geometrisch parallel mit AB und AG ziehen, hierauf den Winkel bog in zwei absolut gleiche Theile theilen, und die ar ziehen, so wäre letztere Gerade die Halbirungslinie des Hilfswinkels bag (§. 302), und folglich würde die mit ar geometrisch parallel gezogene AR den Winkel BAG in zwei perspectivisch gleiche Theile theilen.

§. 338.

Ein Mittel zur Vermeidung allzuweit entfernter Fluchtpunkte. Wollte man durch den Punkt M eine perspectivische Parallele mit AB ziehen, so müsste man, nach der Methode des §. 300, M mit dem Punkte F verbinden, in welchem AB die Horizontlinie PD schneidet. Da aber dieser Fluchtpunkt zu weit Taf. 15.
entfernt ist, so ziehe man zwei beliebige, geometrisch parallele Gerade MA und NB, welche PD schneiden; Fig. 12.
hat man hierauf Ag = BG genommen, so ziehe man Eg und mit ihr geometrisch parallel die Mn; endlich trage man die vierte Proportionale gn auf GN, so erhält man einen Punkt N, durch welchen aus M die gesuchte perspectivische Parallele mit AB gezogen werden muss. Denn weil

$$AE : EM = BG : GN,$$

so muss die Gerade MN bei ihrer Verlängerung den Durchschnittspunkt F der beiden Geraden AB und PD treffen.

§. 339.

Man könnte auch die beliebige schneidende Linie MA ziehen, und die Punkte M und A mit irgend einem Fig. 13.
Punkte s der Horizontlinie PD verbinden. Zieht man nun am geometrisch parallel mit AM und af geometrisch parallel mit AB, so darf man nur noch mf und mit ihr geometrisch parallel die MN ziehen, um in letzterer die gesuchte Gerade zu erhalten. Denn MN und AB müssen sich in einem auf PD liegenden Punkte F schneiden, weil das Dreieck AMF als ein mit der Grundfläche der in samf projicirten Pyramide parallelen Schnitt betrachtet werden kann.

§. 340.

Die Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt M eine Gerade zu ziehen, welche dem unbekannten Fig. 14.
Duchschnittspunkte F zweier gegebenen Geraden AB und PD zulaufe, lässt noch eine Auflösung zu, welche hier um so merkwürdiger ist, weil sie durch die Sätze von der Perspective paralleler Geraden bewiesen werden kann. Man ziehe beliebig die zwei schneidenden Linien MA und ME, und verbinde ihre Endpunkte durch die Geraden HA und GE, welche sich in S schneiden. Durch diesen letzten Punkt ziehe man eine dritte schneidende Linie SBK ebenfalls beliebig, so bestimmt diese ein zweites Viereck BEGK, dessen Diagonalen sich in N schneiden. Nun ist MN die gesuchte Linie und man könnte noch einen dritten Punkt derselben construiren, wenn man durch den Punkt S eine neue schneidende Linie zöge.

Um diese Construction zu rechtfertigen, bemerke man, dass die beiden Vierecke AEGH und BEGK betrachtet werden können als die Perspectiven zweier Parallelogramme, wie aegh und begk, die man so gewählt hat, dass keine ihrer Seiten mit der Tafel parallel ist; denn alsdann müssen die Seiten ah, eg und bk in der Perspective in einen einzigen Punkt S zusammenlaufen, während ab und hk in einem andern Punkte F auf der Tafel convergiren. Nun ist die Gerade mn, welche die Mittelpunkte dieser Parallelogramme verbindet,

mit ab und hk parallel; folglich muss auch ihre Perspective MN, welche durch die Durchschnittspunkte M und N der Diagonalen auf der Tafel bestimmt wird, nach eben jenem Punkte F hinlaufen.

§. 341.

Taf. 15. Fig. 15. Wenn der gegebene Punkt M ausserhalb der beiden gegebenen Geraden PD und AB liegt, so ist die Auflösung nicht ganz so einfach. Nachdem man die beiden schneidenden Linien MAG und MBE beliebig, und auch die Diagonalen des Vierecks ABEG gezogen hat, welche letzteren sich im Punkte C schneiden, verbinde man diesen Punkt mit M; alsdann kann die Linie MC als die Perspective der Geraden betrachtet werden, welche das durch ABEG dargestellte Parallelogramm in zwei perspectivisch gleiche Parallelogramme AKHG und BKHE theilt; denn sie geht durch den Mittelpunkt des ganzen Parallelogramms, und ist parallel mit den Seiten GA und EB, da sie, in der Perspective auf der Tafel, mit letzteren in einem und demselben Punkte M zusammen läuft. Man ziehe nun die Diagonalen GK und HB der partiellen Parallelogramme; diese müssen im Raume parallel mit einander sein und also in der Perspective in einem gewissen Punkte N zusammenlaufen. Eben so werden auch die Diagonalen HA und EK, welche im Raume parallel sind, auf der Tafel in einem Punkte L zusammenlaufen. Die vier Punkte L, M, N, F aber müssen in gerader Linie liegen; denn sie sind die Fluchtpunkte von vier Systemen paralleler Linien, die alle in der Ebene des durch ABEG dargestellten Parallelogramms liegen, und bekanntlich müssen solche Fluchtpunkte alle in dem Durchschnitte der Tafel und der parallel mit jenem Parallelogramme durchs Auge gelegten Ebene liegen. Es folgt hieraus, dass die beiden gefundenen Punkte L und N mehr als hinreichend sind, um durch den gegebenen Punkt M eine auf den Punkt F zulaufende Gerade ziehen zu können.

Umgekehrte Probleme der Perspective.

§. 342.

Die Aufgabe, aus der auf einer ebenen Tafel gegebenen Perspective die Form und Lage des dargestellten Gegenstandes zu finden, wäre eigentlich eine durchaus unbestimmte, selbst wenn die Lage des Gesichtspunktes, für welchen jene Perspective construirt worden ist, bekannt wäre. Denn eine perspectivische Gerade bestimmt zwar, in Verbindung mit dem Gesichtspunkte, eine Ebene, in welcher sich die wirkliche Gerade befinden muss; aber man kann dieser jede beliebige Richtung in jener Ebene geben und sie in beliebige Entfernung setzen. Es gibt jedoch gewisse Gegenstände, welche durch ihre Formen und durch den Gebrauch, für welchen sie bestimmt sind, nicht mehr so viel Ungewissheit über ihre Richtung lassen. Wenn man z. B. auf einer Tafel die Perspective eines Tisches, eines Fensters, eines Pfeilers u. dgl. sieht, so weiss man wohl, dass die Umrisse dieser Gegenstände horizontale und vertikale Geraden darstellen sollen und dass die Basis des letzten die Perspective eines Quadrates ist. Was freilich die absoluten Dimensionen des dargestellten Gegenstandes betrifft, so bleiben sie noch immer unbestimmt, weil, wenn man den Gegenstand weiter von der Tafel entfernte und zugleich so vergrösserte, dass er zwischen denselben Sehstrahlen enthalten bliebe, wie zuvor, diess an seiner Perspective im Geringsten nichts ändern würde. Wenn man nun aber in der Frontebene des Pfeilers noch einen andern Gegenstand erblickte, dessen absolute Höhe aus seinem Gebrauche oder aus seiner natürlichen Beschaffenheit nahezu bekannt wäre, wie z. B. einen Stuhl, ein Pferd, einen Menschen, so könnte man vergleichungsweise die Höhe des Pfeilers schätzen; denn die perspectivischen Längen zweier beliebigen in einer und derselben Frontebene liegenden Geraden sind ihren

wirklichen Längen proportionirt (§. 276). — Nach diesen allgemeinen Bemerkungen folgen hier einige Fälle zum Auflösen, in welchen die Aufgabe bestimmt ist.

§. 343.

Man soll die Horizontlinie einer gegebenen Perspective finden, in welcher zwei Horizontallinien vorkommen, welche parallel sein müssen. Solche Linien werden z. B. von dem Sturze und der Lehne eines Fensters, von den obern und untern Enden zweier als gleich hoch bekannten Pfosten etc. gebildet. Verlängert man nun dieselben bis zu ihrem Durchschnittspunkte auf der Tafel, und zieht durch diesen Punkt eine Horizontale, so ist diese die gesuchte Horizontlinie.

§. 344.

Man soll den Hauptpunkt einer gegebenen Perspective finden, auf welcher zwei Gerade vorkommen, die man als senkrecht auf der Tafel erkennt. Ist der dargestellte Gegenstand z. B. ein Gebäude oder ein rechtwinkliges Bassin, dessen eine Seite parallel mit der Basis der Tafel ist, so sind die beiden anstossenden Seiten senkrecht auf eben dieser Ebene. Verlängert man also dieselben bis zu ihrem Durchschnittspunkte auf der Tafel, so ist dieser der gesuchte Hauptpunkt, und man erhält nun die Horizontlinie wie im vorigen §.

§. 345.

Es ist die Perspective eines quadratischen Pfeilers gegeben, man soll den Hauptpunkt und den Distanzpunkt suchen.

Ist der Pfeiler von vorn gesehen, wie A′B′B″A″E″E′ in Fig. 1 der Tafel 15, wo die Gleichheit der beiden, zu einer Seitenfläche gehörigen Kanten A′A″ und B′B″ diese Stellung hinlänglich anzeigt, so erhält man den Hauptpunkt P, wenn man A′E′ und A″E″ bis zu ihrem Durchschnitte verlängert. Es wurden hier geflissentlich die unsichtbaren Kanten wie B′C′ und B″C″ nicht angewendet, weil diese auf einem der Wirklichkeit gemäss dargestellten, colorirten Gemälde sich nicht vorfinden. Um nun auch den Distanzpunkt D zu finden, verbinde man B′ mit P und ziehe E′C′ geometrisch parallel mit A′B′, wodurch man die unsichtbare Ecke C′ erhält; verbindet man diese hierauf mit A′, so schneidet die Diagonale A′C′ die durch den Punkt P gezogene Horizontlinie in einem Punkte D, welcher sofort die Distanz PD bestimmt, in welcher das Auge des Beobachters sich vor der Tafel befindet. Taf. 14.

§. 346.

Der gegebene Pfeiler ABB′A′G′G werde nicht von vorn gesehen. Verlängert man die Seiten AG und A′G′, AB und A′B′, so erhält man die Fluchtpunkte F, F′ und die Horizontlinie FF′; man kann nun auch die Basis ABEG vollenden und die Diagonale AE ziehen, deren Fluchtpunkt F″ sein wird. Beschreibt man nun über FF′, als Durchmesser, einen Halbkreis FOF′ und betrachtet diesen als in der Horizontallinie liegend, so kann der gesuchte Augpunkt O nirgends anders als in dem Umfange dieses Halbkreises liegen, weil die beiden Sehstrahlen OF und OF′, indem sie den Linien AB und AG in der Wirklichkeit parallel sind, einen rechten Winkel einschliessen müssen; dieser rechte Winkel FOF′ muss aber durch den Sehstrahl OF″, welcher der Diagonale AE parallel ist, in zwei Hälften getheilt werden, weil AE den Winkel BAG des gegebenen Quadrats ebenfalls in zwei Hälften theilt. Verbindet man daher die Mitte J des entgegengesetzten Halbkreises Taf. 16. Fig. 1.

mit F'', so bestimmt die Gerade JF''O die Lage O des Augpunktes, woraus sich sofort auch der Hauptpunkt P und der Distanzpunkt D ergeben.

§. 347.

Es ist alles wie in der vorigen Aufgabe gegeben; man soll die Lage und die absoluten Dimensionen des Pfeilers finden, vorausgesetzt, dass der Grundschnitt XY des Grundrisses gegeben sei, in welchem die Pfeiler-Basis ABY liegt.

Ohne diese letztere gegebene Gerade wäre die Aufgabe unbestimmt (§. 299); sobald man aber weiss, dass die untere Basis des Pfeilers in der Horizontalebene XY liegt, so folgt, dass die Tafel von der Seite AB in X und von der Seite A'B' in X' geschnitten wird. Mithin ist also XX' die wahre Grösse der durch AA' dargestellten Kante. Zieht man hierauf PAT und DAL, so stellt die Gerade TA die kürzeste Entfernung der Kante AA' von der Tafel dar, und die wahre Grösse dieser Entfernung ist TL (§. 303). Um endlich die absolute Länge von AB zu erhalten, kann man das Verfahren des §. 305 anwenden, so dass man auf dem Grundrisse das Quadrat, das dem Pfeiler als Basis dient, genau in der Lage erhält, in welcher es sich in Beziehung auf die Tafel befindet.

§. 348.

Taf. 16. Fig. 2. Es ist die Perspective ABEG eines horizontalen Rechtecks, z. B. die Basis eines Gebäudes, gegeben; man soll den Gesichtspunkt dieser Perspective finden.

Verlängert man die Seiten AG und BE, AB und GE, so erhält man ihre Fluchtpunkte F und F', so wie die Horizontlinie FF', und nun kann man auch den Fluchtpunkt F'' der Diagonale AE finden. Es folgt nun hieraus, wie im vorigen §, dass die über dem Durchmesser FF' beschriebene Kreislinie, die man, als in der Horizontalebene liegend, annimmt, den gesuchten Augpunkt O enthalten muss, weil die Sehstrahlen OF und OF' einen rechten Winkel einschliessen müssen (§. 346). Da aber hier die Diagonale AE den rechten Winkel GAB in zwei ungleiche Theile theilt, deren Verhältniss zu einander unbekannt ist, so bleibt also die Richtung des mit dieser Diagonale parallelen Sehstrahls OF'' unbestimmt und der Augpunkt kann in O', O'', ... liegen, ohne dass die Figur ABEG aufhörte, ein horizontales Rechteck darzustellen. Die Aufgabe ist also unbestimmt bei dem, was bis jetzt gegeben ist.

§. 349.

Wenn man aber wüsste, dass die beiden Seiten AB und AG in dem Verhältnisse von m : n ständen, was man oft aus der Anzahl der Säulen, der Pfeiler oder der Fenster beider Façaden erkennen kann, so wäre die Aufgabe bestimmt und liesse nur eine einzige Auflösung zu. Denn wenn man über FF' ein Rechteck Fbeg construirt, in welchem

$$Fb : be = m : n,$$

so bildet die Diagonale Fe mit den anliegenden Seiten die nämlichen Winkel wie die durch AE dargestellte Diagonale mit denen des gegebenen Rechtecks. Wenn man daher den Punkt J, in welchem Fe die Kreislinie schneidet, mit F'' verbindet, so erhält man den Sehstrahl JF''O, welcher den gesuchten Augpunkt bestimmt; denn der Winkel F''OF' ist geometrisch gleich JFF', da er den nämlichen Kreisbogen zum Maase hat.

Perspective des Innern einer Gallerie.

Es ist im §. 290 gesagt worden, dass man öfters den Grundriss des darzustellenden Gegenstandes entbehren und ihn durch einige numerische Angaben ersetzen könne: es folgen hierüber nun zwei Beispiele, in welchen sich zugleich Gelegenheit findet, mehrere der vorhergehenden Aufgaben über die Theilung perspectivischer Linien anzuwenden.

§. 350.

Es sei eine Gallerie gegeben, deren Grundriss ein Rechteck ist von 8 Fuss Breite und 14 Fuss Länge; diese Zahlen werden hier desswegen so klein genommen, um gewisse Details der Figur genauer hervorzuheben. Die Höhe der Gallerie betrage 12 Fuss, und der Boden sei gepflastert mit quadratischen Platten, deren Diagonalen 2 Fuss lang und den Seiten des Rechtecks parallel seien. Hat man nun auf der Tafel den Hauptpunkt P und die Distanzpunkte D, D′ bestimmt, so zeichne man ein Rechteck ABB′A′, dessen Seiten gleich 8 und 12 **Moduln** seien, und welches den Vertikalschnitt darstellt, den die Tafel mit dem Anfange der Gallerie bildet. Verbindet man hierauf die vier Eckpunkte mit dem Punkte P, so erhält man (§. 262) die noch unbestimmten Perspectiven AP, BP, A′P, B′P der vier Längenkanten der Gallerie. Nun aber muss man ihre, im Verhältniss zu einer Tiefe von 14 Fuss, verkürzten Längen suchen, wodurch man auf die schon im §. 303 gelöste Aufgabe zurückgewiesen wird. Taf. 16. Fig. 3.

§. 351.

Auf einer perspectivischen Geraden BP, welche nach dem Hauptpunkte flieht, soll eine Distanz BC abgeschnitten werden, welche perspectivisch einer gegebenen Länge, hier 14 Moduln, gleich sei.

Um diese Aufgabe direct zu lösen, müsste man auf der Tafelbasis eine Länge BX = 14 Moduln annehmen, hierauf die Gerade XD ziehen, welche offenbar die Hypotenuse eines durch CBX dargestellten gleichschenkligen Dreiecks wäre, und in welcher man also BC = BX hätte. Da aber der Punkt X zu weit entfernt ist, so kann man hier die **reducirte Distanz** (§. 335) anwenden, indem man die Augendistanz $Pd = \frac{1}{2} PD$, und demgemäss $Bx = \frac{1}{2} BX = 7$ Moduln nimmt; alsdann wird die Gerade xd ebenfalls den Punkt C bestimmen.

Hierauf ziehe man die Horizontale CE und die Vertikalen CC′ und EE′, welche durch ihre Durchschnitte mit den Geraden B′P und A′P den Hintergrund ECC′E′ der Gallerie bestimmen.

§. 352.

Man kann auch der Versetzung des Auges entgehen, wenn man bedenkt, dass die Diagonale DCX die Gerade AP in einer Distanz AG = 6 Meter schneiden muss, weil letztere Gerade gleich AX ist. Den Punkt G aber findet man, wenn man den Punkt 2 mit D′ verbindet, weil alsdann das Dreieck GA2 gleichschenklig ist. Oder wenn man nur den einzigen Distanzpunkt D anwenden will, so ziehe man die Gerade D6, welche die BP in dem Punkte H schneidet, der durch eine Horizontale auf G bezogen, die Linie GCD bestimmen wird.

§. 353.

Da das Pflaster dieser Gallerie aus Quadraten besteht, deren Seiten eine Neigung von 45° gegen die Tafel haben, so darf man nur (§. 261) D mit den Punkten 2, 4, 6, 8 der Basis XY verbinden. Da die

Theilpunkte jenseits A, welche durch 10, 11, 12 . . . bezeichnet werden müssten, in eine unbequeme Entfernung fallen, so kann man, wie im vorigen §., dieselben dadurch entbehrlich machen, dass man die Punkte L, M, H, . . . durch Horizontalen auf AP bezieht, und die hierdurch erhaltenen Punkte K, N, G, . . . durch die Geraden KD, ND, GD, . . . mit D verbindet.

Um die anderen Seiten der Quadrate zu erhalten, dürfte man nur den zweiten Distanzpunkt D′ mit den Theilpunkten 6, 4, 2, . . . verbinden; sollte aber irgend ein Umstand die Anwendung dieses Punktes D′ unmöglich machen, so würde man durch die Verbindung jener Theilpunkte mit den schon bestimmten Punkten K, N, G, . . . das nämliche Resultat erzielen.

§. 354.

Im Hintergrunde der Gallerie befindet sich eine Thüre, welche 4 Fuss breit und 7 Fuss hoch sein mag. Es bleiben daher auf jeder Seite derselben 2 Fuss bis an die Seitenwände übrig. Um also die Stelle der Thürpfosten zu bestimmen, könnte man die auf der Tafel perspectivisch senkrechten Geraden 2P und 6P ziehen. Da aber die Thüre sich in einer mit der Tafel parallelen Ebene befindet, so bleiben ihre Dimensionen in der Perspective den wirklichen proportionirt (§. 276); man darf daher nur CE in vier gleiche Theile theilen und in den gehörigen Theilpunkten Vertikalen errichten, deren Höhe gleich $^7/_8$ CE. Man kann diese Höhe auch dadurch bestimmen, dass man auf BB′ eine Länge BQ von 7 Moduln trägt und hierauf QP zieht, wodurch man die perspectivische Höhe Cq der Thüre erhält.

§. 355.

Angenommen es befinde sich in jeder Seitenwand ein Fenster, 5 Fuss vom Eingang entfernt, 4 Fuss breit, 7 Fuss hoch und 3 Fuss über dem Boden. Man verbinde den Punkt D mit den Theilpunkten 5 und 9 der Basis XY, so erhält man die Punkte U und V, deren perspectivische Entfernungen von B beziehungsweise 5 und 9 Moduln sein werden (§. 351). Die in U und V errichteten Vertikalen begrenze man durch die Geraden RP und R′P, welche man in den Höhen von 3 und von 10 Fuss perspectivisch senkrecht auf die Tafel gezogen hat.

Beträgt die Tiefe des Fensterausschnittes 1 Fuss, so trage man diese Länge auf die Horizontalen RS und RS′, und ziehe die Geraden SP und S′P, wodurch der ganze Umriss des Fensterausschnittes, der hier ein rechtwinkliges Parallelepiped ist, bestimmt wird. Endlich trage man die für die Seitenwand recht erhaltenen Resultate symmetrisch auf die linke.

Aeussere Ansicht einer Kapelle.

§. 356.

Taf. 14. Fig. 4. Der geometrische Grundriss dieser Kapelle ist hier wieder durch numerische Angaben ersetzt. XY sei die Tafelbasis, P der Hauptpunkt, D der Distanzpunkt, PO′ = PD der auf die Vertikale PZ der Tafel aufgeklappte Hauptstrahl. Es wird angenommen, die Grundebene der Kapelle sei ein Rechteck, dessen Seiten eine Neigung von 30° und 60° gegen die Tafel haben; die nächste Ecke H sei 1 Meter hinter der Tafel und 7 Meter von der Hauptebene PZ entfernt. Man nehme nun auf der Basis XY eine Länge ZM = 7 Moduln, und ziehe MP, so stellt diese die auf der Tafel senkrecht stehende Gerade dar, auf welcher der Punkt A liegt. Um diesen aber zu erhalten, nehme man MN = 1 Modul und ziehe ND; denn weil das durch MAN dargestellte Dreieck rechtwinklig und gleichschenklig ist, so ist MA perspectivisch gleich MN. Zieht man

hierauf durch den in O′ aufgeklappten Gesichtspunkt die Geraden O′F und O′ψ so, dass sie mit der Horizontlinie Winkel von 30° und 60° bilden, so erhält man F und φ als die Fluchtpunkte der Seiten des Rechtecks, (§. 263) und folglich AF und Aφ als die noch unbestimmten Perspectiven dieser Seiten.

§. 357.

Nun muss auf der Geraden Aφ eine Länge AE gesucht werden, welche perspectivisch 7 Metern, d. h. der Länge einer Seite von der Kapelle gleich ist. Zu diesem Zwecke verlängere man, nach §. 308, die Gerade Aφ bis zu ihrem Durchgange T; hierauf denke man sich die wirkliche Linie TAφ, welche geometrisch parallel mit O′φ ist, um T gedreht, bis sie in XY zu liegen kommt, so werden bei dieser Bewegung die durch A und E dargestellten Punkte Kreisbögen beschreiben, deren Sehnen parallel sind, und deren Fluchtpunkt in ω, dem Endpunkte des mit φO′ beschriebenen Bogens liegt. Zieht man daher die Gerade ωAS, so ist diese die Perspective der einen dieser Sehnen, und nimmt man SX gleich 7 Moduln, so erhält man Xω als Perspective der zweiten Sehne, so dass also nun AE eine perspectivische Länge von 7 Moduln darstellt (§. 269).

§. 358.

Um auf AF die Grundlinie der Vorderwand der Kapelle zu finden, welche zu 3 Metern angenommen wird, beschreibe man mit dem Fluchtstrahl FO′, welcher der Geraden AF parallel ist, den Bogen O′O″, ziehe hierauf die Linie O″AH, nehme HK = 3 Moduln, so wird durch die Gerade KO″ die gesuchte Länge AB bestimmt, weil diese perspectivisch gleich HK ist (§. 308). Nun ist das Rechteck ABCE, welches die Basis der Kapelle darstellt, leicht zu vollenden.

§. 359.

Man errichte jetzt die Vertikale TT′ gleich der Mauerhöhe der Kapelle, so wird durch die Gerade T′φ in Verbindung mit der Vertikalen AA′ und EE′ die Seitenwand AA′E′E bestimmt. Zieht man hierauf die Gerade A′F und die Vertikale BB′, so erhält man auch die Vorderwand AA′B′B. Um das Dach zu erhalten, errichte man in der Mitte von TR die Vertikale YY′ gleich der Höhe der ganzen Kapelle; alsdann bestimmen die Geraden YLVφ und Y′φ in Verbindung mit den aus L und V errichteten Vertikalen die Firstlinie L′V′ und den Giebel A′L′B′.

Ebenso verfährt man bei Construction der Eingangspforte, deren Höhe durch die Vertikale GG′ bestimmt ist, und deren Pfeiler man erhält, wenn man den Punkt φ mit den Punkten verbindet, welche das Stück TR in dem zwischen der Thüröffnung und der Wandbreite AB bestehenden Verhältnisse theilen.

§. 360.

Die Seitenwand der Kapelle hat zwei Fenster, welche sich von 2 bis 5 Metern über den Boden erheben. Man mache daher Tθ und Tθ′ gleich diesen Höhen, und ziehe hierauf die Geraden θφ, θ′φ. Da nun die Breite der Fensteröffnung 1 Meter beträgt und das zweite vom Hintergrunde der Kapelle um 2 Meter entfernt ist, so nehme man Xϐ = 2, und ϐα = 1 Meter, so bestimmen die Geraden ϐω und αω auf AE die gesuchte Fensterbreite (§. 308). Auf gleiche Weise verfährt man bei Construction des andern Fensters, welches 1 Meter von dem ersten entfernt ist.

Es wurde hier die Darstellung gewisser Einzelnheiten, z. B. des Dachvorsprungs über die Seiten- und Giebelmauer etc. weggelassen, weil die Construction desselben durchaus nichts Neues bieten würde.

Sind einmal die Hauptumrisse gehörig bestimmt, so ist es ein Leichtes für den Zeichner, die Darstellung solcher Einzelnheiten, so wie der Gesimse und anderer Ornamente zu vollenden.

Perspective eines geneigten Würfels.

§. 361.

Taf. 17. Als Beispiel von dem Gebrauche, den man von solchen Fluchtpunkten und Fluchtlinien (§. 282) machen kann, welche sich auf nicht horizontale Linien und Ebenen beziehen, diene hier die perspectivische Darstellung eines beliebig geneigten, aber durch folgende Bedingungen gegebenen Würfels: 1) die Höhe einer Ecke A des Würfels ist gegeben durch die Bezeichnung der Grundlinie XY, in welcher die vertikale Tafel von der durch jene Ecke gelegte Horizontalebene geschnitten wird; diese Horizontalebene dient zugleich als Grundriss der Figur; 2) gegeben ist ferner die Horizontalprojection AB einer der Würfelkanten und 3) auf dem Grundrisse der Grundschnitt ARQ und der Neigungswinkel ω der Ebene, welche die obere Grundfläche, von der AB eine Seite ist, enthält. Mittelst dieser gegebenen Seite wäre es leicht die vollständige Projection des fraglichen Würfels zu construiren; es werden aber hier nur diejenigen Seiten desselben in ihrer Projection dargestellt werden, die zur Perspective des Körpers nöthig sind.

§. 362.

Man lege die Profilebene VU senkrecht auf den Grundschnitt AR, und zeichne in derselben den Winkel $S''R''U = \omega$. Hier ist nun offenbar $S''R''$ die Projection der ganzen obern Grundfläche des Würfels. Dreht man daher diese Fläche um $R''AR$, so wird der Punkt (B, B'') sich in b aufklappen, und Ab wird die wahre Grösse der durch ihre Projection AB gegebenen Kante sein. Nun errichte man auf Ab die Senkrechte Ae und mache sie gleich Ab; hierauf führe man die Ebene bAe in ihre ursprüngliche Lage in der Ebene $S''R''A$ zurück, so ist leicht einzusehen, dass die in Ae aufgeklappte Kante sich in AE projicirt, und man kann also nun das Parallelogramm ABCE vollenden, welches die Projection des Quadrats ist, das die obere Grundfläche des Würfels bildet. Eine von den auf dieser Grundfläche senkrecht stehenden Kanten, z. B. die, welche der Ecke (E, E'') entspricht, muss in $EF, E''F''$ projicirt werden, welche Richtungen beziehlich senkrecht sind auf den Grundschnitten AR'', $R''S''$; nimmt man daher $E''F'' = Ab$, so bestimmt der Punkt F'' die Ecke F, und man könnte nun das Parallelogramm AEF und auch die Projectionen der übrigen Seitenflächen des Würfels construiren; aber dieselben sind nicht erforderlich zur Perspective dieses Körpers.

§. 363.

Nun muss aber vorerst noch der Durchschnitt RS' gesucht werden, den die vertikale, als Projectionsebene betrachtete Tafel XY mit der Ebene $S''R''A$ erzeugt, welche letztere die obere Grundfläche des Würfels enthält. Aus §. 52 der Darstellenden Geometrie ist bekannt, dass man zu diesem Zwecke den Grundschnitt $S''R''$ auf dem Profile bis zu seinem Durchschnitte V'' mit der auf der Axe VU errichteten Senkrechten VV'' verlängern muss. Führt man hierauf die aufgeklappte Gerade VV'' in die vertikale Richtung VV' zurück und verbindet die Punkte V' und R, so erhält man den vertikalen Grundschnitt RS' der fraglichen Ebene, deren horizontaler Grundschnitt RQ ist.

§. 364.

Man klappe nun die vertikale Tafel XY, nachdem man sie parallel mit sich selbst in die Lage $X'Y'$ versetzt hat, auf den Grundriss auf. P sei der Hauptpunkt und D der Distanzpunkt, wobei also hier voraus-

gesetzt wird, der Augpunkt sei unterhalb des Grundrisses. Diese Anordnung wurde getroffen, um die Resultate der Perspective um so besser unterscheiden zu können. Trägt man nun auf die Vertikale PZ der Tafel den Abschnitt ZO = PD, so erhält man O als die Horizontalprojection des Augpunktes, der in P auf der Tafel bereits vertikal projicirt ist.

§. 365.

Man suche nun die Fluchtlinie (§. 282) der Seitenfläche ABCE, d. h. den Durchschnitt der Tafel XY mit einer Ebene π, welche jener Seitenfläche parallel ist, und durch den Gesichtspunkt (O, P) geht. Dieser Durchschnitt muss offenbar parallel mit dem Grundschnitte RS′ sein; um nun einen Punkt desselben zu finden, schneide man die Ebene π und die Horizontebene durch eine senkrecht auf ARQ stehende Vertikalebene OK; dadurch wird ein Winkel entstehen, der gleich ω sein muss, dessen Spitze im Gesichtspunkte (O, P) ist, und dessen beide Schenkel die Tafel XY in der Vertikalen T schneiden. Klappt man daher diesen Winkel um jene Vertikale in die Tafel auf, so wird die Spitze (O, P) desselben in O″ zu liegen kommen; und zieht man die Gerade O″T″ so, dass sie einen Winkel ω mit O″D bildet, so wird sie die Vertikale T′T″ in einem Punkte T″ schneiden, der bei der Zurückführung des Winkels in die Vertikalebene OT unbeweglich bleibt. Der Punkt T″ gehört also dem Durchschnitte der Tafel mit der Ebene π an, und zieht man daher durch T″ mit dem Grundschnitte V′RS′ parallel die Gerade T″ε', so ist diese der gesuchte Durchschnitt. Man hat also jetzt die Fluchtlinie der Seitenfläche ABCE, und alle Gerade, welche in dieser Ebene liegen oder ihr parallel sind, haben ihre Fluchtpunkte in der Linie β'T″ε'.

§. 366.

Wenn man hierauf aus dem Augpunkte Parallelen mit den durch AB und AE dargestellten Linien zieht, so werden dieselben sich in Oβ und Oε projiciren und die Tafel XY in den Vertikalen β und ε schneiden; da aber, wie vorhin gesagt worden, diese Durchschnittspunkte auch in der Fluchtlinie β'T″ε' liegen müssen, so sind dieselben β' und ε', und die Perspectiven aller mit AB oder AE parallelen Geraden werden also in dem einen oder andern dieser Punkte zusammenlaufen. Ebenso erhält man, wenn man Oγ parallel mit AC zieht, aus γ den Fluchtpunkt γ' der Diagonale AC, der später seine Anwendung findet.

§. 367.

Man suche ferner die Fluchtpunkte derjenigen Würfelkanten, welche, wie EF, senkrecht auf der Grundfläche ABCE sind. Die parallel mit diesen Kanten durch den Gesichtspunkt gezogene Gerade ist offenbar in der schon oben angewendeten Vertikalebene OT enthalten, und schneidet die Tafel XY in der Vertikalen T. Da ferner diese Parallele senkrecht auf der durch π bezeichneten Ebene (§. 365) stehen muss, so ist sie auch senkrecht auf dem in O″T″ aufgeklappten Schenkel des Winkels ω; zieht man daher O″φ' unter einem Rechten auf O″T″, so erhält man den Punkt φ' als Fluchtpunkt der Kante EF und aller derer, welche ihr parallel sind.

Man bemerke, dass der in O″φ' aufgeklappte Gesichtsstrahl seine Projection in Pφ' hat, und dass also letztere Gerade senkrecht auf dem Grundschnitte ε'T″β' sein muss, was ebenfalls als Mittel zur Auffindung des Punktes φ' hätte benützt werden können.

§. 368.

Verbindet man die Fluchtpunkte ε' und φ' der beiden Seiten AE und EF, so erhält man die Fluchtlinie $\varepsilon'\varphi'$ der Seitenfläche AEF; und eben so ist $\beta'\varphi'$ die Fluchtlinie der dritten Seitenfläche CEF, welche

mit AEC das körperliche Dreieck E ergänzt. Zieht man endlich $O\psi$ parallel mit AF, so erhält man aus ψ den Fluchtpunkt ψ' der in AF projicirten Diagonale.

§. 369.

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun leicht die Perspective der verschiedenen Würfelkanten zu construiren. Denn da die Kante AB in der Ebene QRS′ liegt, so schneidet sie die Tafel XY in dem Punkte (M, M′). Da aber die Tafel aus XY in die Lage X′Y′ versetzt worden ist, so muss man unter letzterer Grundlinie eine Länge $mm' = MM'$ nehmen, um m′ als den Durchgang der Kante AB auf der Tafel zu erhalten; und da β' der Fluchtpunkt eben dieser Geraden ist, so erhält man also $m'\beta'$ als die noch unbestimmte Perspective von AB.

Auf ähnliche Weise könnte man den Durchgang der Kante AE, und hierauf ihre unbestimmte Perspective suchen, welche durch ihr Zusammentreffen mit der vorigen, die Ecke A′ bestimmen würde. Um aber die Methoden zu wechseln, ziehe man die Sehstrahlen OA und OB, welche die Tafel XY in den in A_2 und B_2 projicirten Punkten schneiden müssen; alsdann erhält man aus den in letzteren Punkten errichteten Vertikalen, in Verbindung mit der Geraden $m'\beta'$, unmittelbar die Perspectiven A′ und B′ zweier Ecken des Würfels.

Hierauf ziehe man die Geraden $A'\varepsilon'$ und $B'\varepsilon'$, deren letztere die Diagonale $A'\gamma'$ in der Ecke C′ trifft, und verbindet man diese mit β', so erhält man die Linie $\beta' C' E'$, durch welche die Perspective A′B′C′E′ der oberen Grundfläche des Würfels vollendet wird. Man kann auch die beiden Sehstrahlen OC und OE anwenden, welche die Tafel in den in C_2 und E_2 projicirten Punkten schneiden, aus denen man sofort durch Vertikalen die Ecken C′ und E′ erhält.

§. 370.

Die auf der Seitenfläche A′B′C′E′ senkrechten Kanten haben ihren Fluchtpunkt in φ' (§. 367); mithin sind ihre unbestimmten Perspectiven die Linien $A'\varphi'$, $B'\varphi'$, $C'\varphi'$, $E'\varphi'$. Die letztere bestimmt, in Verbindung mit $A'\psi'$, welche die Perspective der Diagonale AF ist (§. 368), die Ecke F′ der untern Grundfläche. Zieht man hierauf $F'\beta'$ und $F'\varepsilon'$, so schneiden diese Geraden die Linien $C'\varphi'$ und $A'\varphi'$ in den beiden Ecken F′ und G′, welche überdiess auf einer durch γ' gehenden Diagonale liegen müssen. Endlich ziehe man noch $J'\varepsilon'$ und $G'\beta'$, welche sich in einem auf $B'\varphi'$ liegenden Punkte H′ schneiden müssen. So erhält man

A′ B′ C′ E′ F′ G′ H′ J′

als vollständige Perspective des Würfels. Aus der Lage des Augpunktes O in Beziehung auf die Tafel XY, und aus der Neigung der Ebene S″R″R, welche die obere Grundfläche des Würfels enthält, lässt sich leicht unterscheiden, welches die Kanten sind, die man, als unsichtbar, punktiren muss.

§. 371.

Es wurden in dieser Aufgabe die gegebenen Stücke geflissentlich in möglichster Allgemeinheit genommen; in anderen Fällen ist die Aufsuchung der Fluchtlinien und Fluchtpunkte viel leichter. Sollte z. B. die Perspective eines rechtwinkligen Parallelepipeds construirt werden, das gegen den Horizont geneigt ist, dessen Grundfläche aber eine mit der Grundlinie (*ligne de terre*) XY parallele Kante hätte, und man bezeichnet durch A diese erste Kante, durch B und C aber die beiden anderen, welche rechtwinklig mit ihr zusammenstossen, so sieht man leicht ein, dass die Seitenfläche, welche B und C enthält, zur Fluchtlinie die Vertikale der Tafel hat (§. 282), während die Seitenflächen, welche A und B, A und C enthalten, zu Fluchtlinien zwei
Taf. 17. mit XY parallele Geraden haben. Um nun einen Punkt von jeder zu finden, denke man sich durch den Augpunkt zwei Parallelen mit B und C, so werden diese die Tafel in der Vertikalen PZ schneiden und ein recht-

winkliges Dreieck bilden, dessen Hypotenuse in PZ liegt. Klappt man nun dieses Dreieck um die Hypotenuse auf, so fällt seine Spitze, d. h. der Augpunkt in den Distanzpunkt D; und zieht man hierauf zwei Gerade $D\varphi''$ und $D\varphi'''$, welche mit PD Winkel ω'', ω''' bilden, gleich denen gegebenen, unter welchen sich die Kanten B und C gegen den Horizont neigen, so ist klar, dass die Punkte φ'' und φ''' die Fluchtpunkte von B und C und die durch sie mit XY parallel gezogenen Geraden, die Fluchtlinien der beiden Seitenflächen (A, B), (A, C) sind.

Ist man einmal so weit gekommen, so vollendet man leicht diè Perspective des Parallelogramms, indem man die Punkte, in welchen die Tafel von B und C geschnitten wird, so wie die Längen der drei zusammenstossenden Kanten A, B und C beliebig nimmt. Eine Gelegenheit zur Anwendung dieser graphischen Operationen kann man in der perspectivischen Darstellung einer Ruine finden, wo ein halb umgestürzter Pfeiler vorkommt.

Viertes Kapitel.

Krumme Linien.

§. 372.

Um die Methode der Fluchtpunkte auf die Perspective einer beliebigen Curve LMNQ anzuwenden, denke man sich durch einen Punkt L dieser Linie zwei beliebige Gerade, z. B. zwei *Horizontalen* gezogen, die man in der bequemsten Richtung gewählt hat. Bestimmt man nun die Perspectiven dieser Hilfslinien nach einer der Verfahrungsarten des vorigen Kapitels, so ist natürlich der Durchschnittspunkt L′ beider Perspectiven die Perspective des betrachteten Punktes L. Wiederholt man diese Operation für andere, einander ziemlich nahe liegende Punkte M, N, Q..., so erhält man auf der Tafel einzelne Punkte M′, N′, Q′..., welche, durch einen stetigen Strich vereinigt, die Perspective L′M′N′Q′ der gegebenen Curve liefern. Taf. 18. Fig. 3.

Es ist von Vortheil, zu Hilfslinien einige der Tangenten an LMNQ, wie z. B. MT zu wählen, weil die Perspective M′T′ einer solchen Geraden nicht allein den Punkt M′, sondern auch *die Tangente der gesuchten Curve* L′M′N′Q′ liefert, was sehr zu einer genauen Zeichnung verhilft. Diese Behauptung zu rechtfertigen dient folgender Lehrsatz:

§. 373.

Die Perspective M′T′ der Tangente MT an irgend einer Curve LMNQ ist zugleich Tangente an der Perspective L′M′N′Q′ eben jener Curve.

Die Perspective L′M′N′Q′ ist der Durchschnitt der Tafel VXY und des Kegels OLMNQ, der von den nach den einzelnen Punkten der gegebenen Curve hingezogenen Sehstrahlen gebildet wird. Mithin hat die Linie L′M′N′Q′ zur Tangente den Durchschnitt der Ebene VXY mit der längs des Sehstrahles OM′M gelegten Berührungsebene. Da nun diese Berührungsebene offenbar die Ebene OMT der nach MT gezogenen Sehstrahlen ist, so ist ihr Durchschnitt mit der Tafel nichts anderes als die Perspective M′T′ von MT: folglich ist diese Perspective M′T′ Tangente an der Curve L′M′Q′.

Perspective eines horizontalen Kreises.

§. 374.

Taf. 18. Fig. 1. Als erstes Beispiel diene ein horizontaler Kreis, dessen Ebene der Grundriss der Figur sei. Die Tafelbasis, d. h. der Durchschnitt jener Ebene mit der vertikalen Tafel, sei XY. Man versetze die Tafel parallel mit ihr selbst in die Lage X′Y′, klappe sie um letztere Gerade in den Grundriss auf, und bemerke daselbst den Hauptpunkt P und die beiden Distanzpunkte D und D′. Hierauf beschreibe man um und in den gegebenen Kreis zwei Quadrate ABEF, GHIK, deren Seiten beziehungsweise parallel und senkrecht auf der Tafel seien. Um nun die Perspectiven der fünf Geraden AF, GK, MQ, HI, BE zu finden, muss man ihren Fluchtpunkt P mit ihren Durchgängen auf X′Y′ verbinden (§. 267, Anmerkung); hiedurch erhält man die Geraden Pa, Pg, PZ′, Ph, Pb, deren Durchschnitt mit T′D′, d. h. mit der Perspective der Diagonale TE, die die fünf Punkte A′, G′, C′, I′, E′ liefert, von welchen zwei bereits die Perspectiven der Punkte G und I des gegebenen Kreises darstellen. Statt nun auch die andere Diagonale R′D anzuwenden, darf man nur durch die fünf erhaltenen Punkte Parallelen mit X′Y′ ziehen, durch welche man die neuen Punkte M′, H′, L′ und N′, K′, Q′ erhält, so dass man nun im Ganzen acht Punkte der gesuchten Perspective und vier Tangenten hat; denn nach dem Lehrsatze des §. 373 muss die Curve auf der Tafel die Geraden A′B′, B′E′, E′F′, F′A′ berühren. Diese gefundenen Stücke reichen gewöhnlich hin, um die Curve mit aller nur wünschenswerthen Genauigkeit auszuführen. Wollte man nichts desto weniger noch andere Punkte finden, so dürfte man nur, wie leicht einzusehen, durch jeden auf dem gegebenen Kreise angenommenen Punkt zwei Gerade ziehen, deren eine senkrecht und die andere unter einem Winkel von 45° auf der Tafel stände.

§. 375.

Die Perspective G′M′H′N′ ist eine Ellipse, weil sie durch den Schnitt der Tafel mit dem Kegel der Sehstrahlen erzeugt wird, der den Kreis GMHN zur Basis hat. Ein ähnliches Resultat wird sich immer ergeben, wenn der perspectivisch darzustellende Gegenstand ein Kreis ist, den Fall ausgenommen, wenn der Kreis durch die Tafel geschnitten wird, weil es alsdann möglich wäre, dass letztere Ebene nicht mehr alle Erzeugende eines und desselben Kegelmantels schnitte, und daher entweder eine Parabel oder eine Hyperbel als Perspective des gegebenen Kreises lieferte. Diese Lage der Tafel kommt aber bei gewöhnlichen Zeichnungen nicht vor, weil immer vorausgesetzt wird, der darzustellende Gegenstand befinde sich ganz hinter der Tafel.

§. 376.

Der Punkt C′, die Perspective des Kreismittelpunktes C, ist nicht auch zugleich der Mittelpunkt der Ellipse G′M′HN′..., weil die Sehne L′C′N′ zweien Tangenten entspricht, welche nicht parallel sind; aber die Gerade M′Q′ ist eine Axe dieser Curve, weil die Tangenten ihrer Endpunkte parallel und senkrecht auf M′Q′ sind, so dass also der Mittelpunkt der Ellipse in der Mitte ω' dieses Durchmessers liegen wird.

Die zweite Axe $\alpha'\omega'\beta'$ ist also ihrer Richtung nach bekannt und um ihre Grösse zu erhalten, darf man nur durch die Projection O des Augpunktes auf dem Grundriss die beiden Tangenten $O\alpha$, $O\beta$ ziehen und hierauf in γ und δ zwei Vertikalen $\gamma'\alpha'$ und $\delta'\beta'$ errichten, durch welche die Endpunkte α' und β' bestimmt werden (die Projection O erhält man, indem man ZO = PD nimmt). Diese Construction gründet sich darauf, dass die Tangenten $O\alpha$ und $O\beta$ zwei vertikale Ebenen darstellen, welche den Kegel der

Sehstrahlen berühren, woraus dann folgt, dass sie die Tafel in zwei Vertikalen $\gamma'\alpha'$, $\delta'\beta'$ schneiden, welche Tangenten an der Ellipse sein müssen; und da diese Tangenten mit der Axe M′Q′ parallel sind, so müssen sie also durch die Endpunkte der zweiten Axe gehen. Man hätte übrigens die beiden Punkte α' und β' auch durch die Verbindung jener Vertikalen mit einer andern durch α oder β gezogenen Geraden finden können.

§. 377.

Die Constructionen des §. 374 lassen sich auf dieselbe Weise auch auf den Fall anwenden, wenn der horizontale Kreis schief gesehen wird, wie es Fig. 2 darstellt; alsdann ist aber M′Q′ nicht eine Axe der Ellipse, sondern nur ein Durchmesser, in dessen Mitte wieder der Mittelpunkt dieser Curve liegt.

§. 378.

Es mag bei dieser Gelegenheit bemerkt werden, dass man leicht die Perspective eines Kreises finden kann, auch ohne seinen Grundriss zu zeichnen. Man darf nur auf X′Y′ die Lage der Geraden ab bestimmen, welche seinem Durchmesser gleich ist, hierauf die Mitte Z′, so wie das Siebentel ag oder bh derselben bezeichnen und endlich aT′ gleich der Distanz MZ nehmen, in welcher der Kreis hinter der Tafel sich befinden soll. Diese gegebenen Stücke liefern fünf gerade Linien Pa, Pg, PZ′, Ph, Pb und die Diagonale T′D′, welche, wie man gesehen hat, hinreichen, um die Ellipse als Perspective des Kreises zu zeichnen, mittelst der ein- und umschriebenen Quadrate. Taf. 18. Fig. 2.

Diese praktischen Regeln gründen sich darauf, dass man hat

$$T'a = T\alpha = A\alpha = MZ;$$

ferner

$$ag = L\beta = CL - C\beta.$$

Da aber letztere Gerade der Cosinus eines Winkels von 45° ist in einem Kreise, dessen Halbmesser R heissen mag, so ist bekanntlich

$$C\beta = R\sqrt{1/2} = R\sqrt{\frac{24^1/_2}{49}} = {}^5/_7\,R$$

wenigstens näherungsweise und hinreichend genau für die Art von graphischen Operationen, um welche es hier sich handelt; man hat also auch

$$ag = R - {}^5/_7\,R = {}^2/_7\,R = {}^1/_7\,ab.$$

§. 379.

Die vorhergehende Methode ist nur annähernd; folgende ist streng richtig und besonders bei Bogengewölben anwendbar. Fig. 2.

Man ziehe im Grundrisse die Diagonale AN des Halbquadrats und die Senkrechte SV, so ist offenbar

$$AS \times AN = R^2,\ AN^2 = AB^2 + BN^2 = 5\,R^2,$$

folglich

$$AS \times AN = {}^1/_5\,AN^2, \text{ oder } AS = {}^1/_5\,AN, \text{ woraus } AV = {}^1/_5\,AB.$$

Hat man daher auf der Tafel das perspectivische Quadrat A′B′E′F′ gezeichnet, so darf man nur A′N′ ziehen, av = $^1/_5$ ab nehmen und hierauf die Gerade vS′P zeichnen, wodurch man den auf der Diagonale A′N′ liegenden Punkt S′ der Ellipse erhält. Eben jene Gerade vS′P liefert in Verbindung mit N′F′ einen zweiten dem Punkte R auf dem Grundrisse entsprechenden Punkt. Auf gleiche Weise findet man die Perspective der beiden Punkte W und U, indem man bw = $^1/_5$ ab nimmt, und hierauf die Geraden Pw, L′B′ und L′E′ zieht.

Hiedurch erhält man also vier Punkte von der Perspective des Kreises, und somit hat man, in Verbindung mit den nach §. 384 erhaltenen vier Punkten L', M', N', O', acht Punkte und vier Tangenten, welche zur Zeichnung der Ellipse auch ohne Grundriss hinreichen.

§. 380.

Man soll den perspectivischen Kreis L'G'M'H'N' in perspectivisch gleiche Theile theilen. Man braucht hier auch keinen Grundriss anzuwenden, sondern man beschreibt über L'N' als Durchmesser einen Halbkreis, theilt diesen in absolut gleiche Theile und fällt aus den Theilpunkten Ordinaten auf L'N'; verbindet man hierauf die Fusspunkte dieser Ordinaten mit P, so bezeichnen die Durchschnitte der hiedurch entstehenden convergirenden Linien mit der Ellipse die gesuchten Theilpunkte dieser Curve. Denn jene Linien theilen ab und L'N' in proportionirte Theile; sie sind also die Perspectiven derjenigen Ordinaten, deren Fusspunkte auf dem Durchmesser LN gleichen Bögen des Grundrisskreises entsprechen würden.

Diese Aufgabe kann dazu dienen, um die Kannelirung einer Seite zu bestimmen, oder auch um die Säulen, welche eine sphärische Kuppel tragen sollen, regelmässig zu stellen.

§. 381.

Taf. 18. Fig. 10. Man soll die Perspective eines regelmässigen Sechsecks finden, dessen eine Seite mit der Tafel parallel ist.

Man kann bei Construction dieser Perspective des Grundrisses entbehren, wenn man nur die Grösse a der ersten Seite und ihre Entfernung aδ von der Tafel kennt. Denn zieht man Pa und Pb, und hierauf δD, so wird (§. 303) durch letztere eine Tiefe A'a = aδ bestimmt, und man erhält somit A'B' als die Perspective der gegebenen Seite. Da nun ferner die Diagonale BH mit BG einen Winkel von 30^0 bildet, so klappe man den Augpunkt in O' auf, und ziehe die Gerade O'F so, dass sie einen Winkel PO'F = 30' bildet; alsdann erhält man F als den Fluchtpunkt dieser Diagonale, deren Perspective also B'F sein wird. Letztere Linie schneidet A'P im Punkte H', so dass man nun das perspectivische Rechteck A'B'G'H' leicht vollenden kann; und die Diagonale A'G' liefert den Mittelpunkt C', durch welchen man eine unbestimmte Horizontale zieht, welche in Verbindung mit G'F und A'F die beiden letzten Ecken E' und K' des Sechsecks bestimmt.

Da der Punkt J die Mitte des mit der Tafel parallelen Halbmessers bezeichnet, so muss C'J' geometrisch gleich I'E' sein. Ferner müssen die Seiten K'H' und B'E' in einem Fluchtpunkte F' zusammenlaufen, dessen Entfernung PF' = PF ist.

Wenn man keinen Transporteur hätte, um den Winkel PO'F = 30^0 abzutragen, so könnte man ein gleichseitiges Dreieck $\alpha\beta\gamma$ construiren, und O'F geometrisch parallel mit der Seite $\beta\gamma$ ziehen.

§. 382.

Man soll die Perspective eines regelmässigen Achtecks zeichnen, dessen eine Seite mit der Tafel parallel ist.

Fig. 12. Es sei ab die Grösse dieser Seite und bδ ihre Entfernung von der Tafel. Zieht man nun Pa, Pb Dδ, so wird hiedurch die Perspective A'B' der ersten Seite bestimmt. Um nun ferner die Seite xy des umschriebenen Quadrats zu erhalten, das hier als Hilfsmittel dient, beschreibe man über ab einen Halbkreis und nehme die Distanzen bY und aX gleich der Sehne by'', welche einen Viertelskreis abschneidet, so erhält man die wahre Länge XY der Seite jenes Quadrats. Nun bestimmen die Geraden PX und PY, in Verbindung mit der verlängerten A'B' zwei Ecken x' und y' des perspectivischen Quadrats, und zieht man noch die

Diagonale Dx', so erhält man die Ecke z' und die Seite z'u'. Letztere Seite bestimmt die Ecken H' und K' des Achtecks, und die Geraden DK', DH', DA', DB' liefern die vier übrigen Ecken L', M', G' und E'. — Die vier Punkte M', J', E' müssen, wie auch die Punkte L', S' und G' auf einer mit XY parallelen Geraden liegen, was als Probe für die Richtigkeit der Construction dienen kann.

§. 383.

Es ist oben (§. 375) gesagt worden, dass die Perspective eines Kreises immer eine Ellipse sei; diese Behauptung schliesst den Fall nicht aus, wo beide Axen der Ellipse gleich sind und sie also ein Kreis wird. Offenbar geschieht dieses, wenn der gegebene Kreis sich in einer mit der Tafel parallelen Ebene befindet, weil alsdann der Sehstrahlenkegel von einer mit seiner Grundfläche parallelen Ebene geschnitten wird. Aber es gibt, während Tafel und Gesichtspunkt unverändert bleiben, für den Kreis noch eine zweite Lage, in welcher seine Perspective wieder ein Kreis ist.

Es sei OAB ein Kegel, dessen Grundfläche der als horizontal betrachtete Kreis ist. Fällt man nun auf die Ebene dieses Kreises eine Senkrechte OZ und zieht den Durchmesser CZ, so wird hiedurch eine Ebene OZC bestimmt, welche, indem sie den Kegel schneidet, die zwei besonderen Seiten OA und OB liefert, und die Hauptebene des Kegels heisst, weil sie alle senkrecht auf ihr stehenden Sehnen der Umfläche in zwei gleiche Theile theilt. Schneidet man nun den Kegel durch eine Ebene VXY, welche senkrecht auf der Hauptebene und so geneigt ist, dass ihr vertikaler Grundschnitt VX einen Winkel OA'B' = OBA bildet, so ist der so erhaltene Schnitt A'MB' ein Kreis. Taf. 18. Fig. 4.

Um diess zu beweisen, lege man durch irgend einen Punkt M dieser Curve eine mit der Grundfläche parallele Ebene. Diese Ebene schneidet den Kegel in einem Kreise GMH, und den gegebenen Schnitt in einer Geraden MQ, welche offenbar senkrecht auf der Hauptebene OAB steht, und es ist also MQ eine den beiden Curven gemeinschaftliche und senkrecht auf den beiden Durchmessern GH und A'B' stehende Ordinate. Man hat also im Kreise GMH:

$$(1) \qquad MQ^2 = GQ \times QH.$$

Da aber die beiden Dreiecke A'GQ und B'HQ nach der oben angenommenen Bedingung, dass Winkel OA'B = OBA ähnlich sind, so hat man die Proportion,

$$GQ : B'Q = A'Q : HQ.$$

Aus dieser und der Gleichung (1) aber folgt:

$$(2) \qquad MQ^2 = A'Q \times B'Q.$$

Hieraus sieht man, dass jede Ordinate des Schnittes A'MB' mittlere Proportionale ist zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers A'B', auf welchem sie senkrecht ist; der Schnitt ist also ein Kreis. Er ist bekannt unter dem Namen des antiparallelen Schnittes, weil, wenn man das Dreieck OB'A' umdreht, seine Grundlinie A'B' parallel mit AB wird.

§. 384.

Es sei nun ein Kreis AEB gegeben, dessen Ebene als horizontal angenommen wird, und ein Punkt O im Raume; man soll eine Tafel von solcher Lage suchen, dass die Perspective jenes Kreises wieder ein Kreis sei. Man fälle die Vertikale OZ, und verbinde ihren Fusspunkt Z mit dem Mittelpunkte C durch den Durchmesser CZ, so bestimmt dieser die beiden Seiten OA und OB, welche den Hauptschnitt des Kegels bilden. Auf diesen Seiten nehme man Oa = OA, Ob = OB und ziehe die Gerade ab. Endlich lege man eine Ebene VXY so, dass sie senkrecht auf der Hauptebene Fig. 5.

OAB stehe und ihr Grundschnitt VX mit a b parallel sei, so ist VXY offenbar die gesuchte Tafel, auf welcher die Perspective von AEB sich als ein anderer Kreis A'B' projicirt; denn sie erfüllt ganz die im §. 383 aufgestellten Bedingungen.

Ist umgekehrt der Kreis AEB und die Lage VXY der Tafel gegeben, so kann man leicht die Lage O des Augpunktes finden, für welchen die Perspective von AEB wieder ein Kreis ist. Man lege durch den Mittelpunkt C eine Vertikalebene CZO, welche senkrecht auf dem horizontalen Grundschnitte XY der gegebenen Tafel steht. Hierauf ziehe man in dieser Vertikalebene eine erste Gerade AA' von beliebiger Richtung, hierauf eine zweite Gerade BB', unter dem Winkel ABB' = AA'X, so bestimmen diese beiden Geraden AA', BB' durch ihr Zusammentreffen in O den gesuchten Augpunkt. Man sieht aber, dass diese Aufgabe unendlich viele Auflösungen zulässt, weil die Richtung der Geraden AA' willkürlich genommen werden darf.

§. 385.

Auf den Lehrsatz des §. 383 gründet sich jene besondere Art der Perspective, welche bei Weltkarten angewendet wird, und unter dem Namen der stereographischen Projection bekannt ist. Die Aufgabe ist nämlich, eine Tafel und einen Gesichtspunkt zu finden von solcher Lage, dass alle Kreise einer und derselben Kugel sich perspectivisch wieder als Kreise darstellen. Hiedurch wird natürlich eine sehr bequeme Zeichnung erzielt. Man erreicht aber diesen Zweck, wenn man das Auge des Beobachters in irgend einen Punkt O der Kugeloberfläche versetzt und als Tafel eine Ebene XY annimmt, welche senkrecht auf dem nach O gezogenen Halbmesser JO steht.

Taf. 18. Fig. 6. Es sei AB irgend ein Kreis der Kugel, welcher sich auf die Sehne AB projiciren wird, wenn man die Ebene der Figur so wählt, dass sie den Halbmesser OJ und den durch den Mittelpunkt C des gegebenen Kreises gehenden Halbmesser JC enthält; denn bekanntlich ist letzterer Halbmesser senkrecht auf der Ebene des Kreises. Unter solcher Voraussetzung ist die Ebene der Figur genau die Hauptebene (§. 383) des von den Sehstrahlen gebildeten Kegels OAB. Die Tafel XY ist also senkrecht auf dieser Hauptebene, weil der in letzterer liegende Strahl OJ senkrecht auf XY ist. Ferner schneidet diese Tafel von dem Dreieck OAB ein anderes Dreieck OA'B' ab, das ersterem ähnlich ist, weil die Winkel OAB und OB'A' beide den halben Bogen OYB zu ihrem Maase haben. Die Tafel XY erfüllt also vollkommen die beiden Bedingungen des antiparallelen Schnittes (§. 383) und schneidet mithin den Kegel OAB in einem Kreise A'B', welcher die Perspective des gegebenen Kreises AB ist.

Die Tafel XY hat auch für jeden andern Kreis MN dieselbe Eigenschaft, weil sie immer wieder senkrecht auf dem Hauptschnitte des Kegels OMN steht, welcher durch die Ebene OJC' bestimmt wird, und weil das Dreieck OM'N' dem Dreieck OMN ebenfalls ähnlich ist. Auf der Tafel XY stellen also alle Kreise der Kugel sich perspectivisch wieder in Kreisen dar, und es ist leicht für jeden von ihnen drei Punkte und den Halbmesser zu finden, wenn es sich um jene Kreise handelt, die in der Geographie Meridiane und Parallelkreise heissen.

§. 386.

Fig. 8 u. 9. Man betrachte die untere Halbkugel, welche unterhalb der durch die Pollinie (Pp, P') gehenden Horizontalebene XY liegt. Letztere Ebene diene als Tafel und der Augpunkt sei in (O, O'). Will man nun die Perspective desjenigen Meridians finden, welcher mit dem Horizonte einen Winkel von 30° macht und vertikal in P'M' projicirt ist, so bemerke man, dass diese Perspective durch die beiden Punkte P und p gehen muss.

Zieht man hierauf den Sehstrahl (O'M'OM), welcher durch den untersten Punkt dieses Meridians geht, so schneidet er die Tafel im Punkte m', dessen horizontale Projection m ein dritter Punkt der gesuchten Perspective Pmp ist, die nun leicht construirt werden kann, da man weiss, dass sie ein Kreis ist. — Die vertikale Projection wurde hier aber nur des leichtern Verständnisses wegen angewendet; denn die Aufgabe lässt sich durch eine einfache Aufklappung mittelst der Fig. 9 ganz allein lösen. Nachdem man nämlich den Sehstrahl sich gedacht hat, welcher durch den untersten Punkt des fraglichen Meridians geht, klappe man die Vertikalebene dieses Strahls um den horizontalen Durchmesser EOe des Aequators auf; hiebei kommt der Augpunkt offenbar in P zu liegen und der unterste Punkt des Meridians wird sich auf den horizontalen Kreis Epe in einer Distanz eL von 30° aufklappen. Somit ist also PL die Aufklappung des Sehstrahls, und da er die Umdrehungsaxe Ee in dem Punkte m schneidet, welcher bei Zurückführung der Ebene in ihre erste Lage unbeweglich bleibt, so ist dieser Punkt m also der Durchschnitt der Tafel und des Sehstrahls, und gehört mithin der gesuchten Perspective an, die nun durch die drei Punkte P, m, p bestimmt ist.

Eben so müsste man für einen Meridian, der mit dem Horizont einen Winkel von 50° machen sollte, die Gerade P — 50 ziehen, welche den Punkt n der Perspective Pnp bestimmte.

Es sei nun ferner die Perspective eines Parallelkreises zu construiren, dessen Abstand vom Aequator 30° betrage, und welcher daher durch die Punkte G und L gehen muss, die auch seiner Perspective angehören werden. Man denke sich den Sehstrahl, welcher durch den untersten Punkt dieses kleinern Kreises geht, und klappe die Vertikalebene Op dieses Strahles um die Pollinie POp in die Tafel auf, so kommt offenbar der Augpunkt in E und der Punkt H in L zu liegen: EL ist also die Aufklappung des Sehstrahls. Da aber diese Aufklappung die Umdrehungsaxe Pp in h schneidet, welcher Punkt bei der Zurückführung des Sehstrahls in seine erste Lagen unbeweglich bleibt, so ist also h der Durchschnitt dieses Sehstrahls mit der Tafel, und gehört der gesuchten Perspective an, welche ein Kreisbogen und durch die drei Punkte G, h, L hinlänglich bestimmt ist.

Durch dieses Verfahren erhält man die Perspective derjenigen Theile der Meridiane und Parallelkreise, welche auf der untern Halbkugel liegen. Was die oberen Hälften dieser Kreise betrifft, welche als die Verlängerungen der Bögen Pmp, GhL sich darstellen müssten, so gehen sie über den Umriss EPep hinaus, und es ist daher besser ihre Perspective besonders zu zeichnen, indem man zwar die nämliche Tafel XY beibehält, den Augpunkt aber in den entgegengesetzten Endpunkt (O, Q') des auf der Tafel senkrechten Durchmessers versetzt. Somit stellt also eine Weltkarte immer die concave Seite der betrachteten Hemisphäre dar.

§. 387.

Die stereographische Projection hat noch den Vortheil, dass alle Kreise sich auf ihr unter demselben Winkel schneiden, wie auf der Kugel: Die Meridiane und Parallelkreise also, Fig. 7.
welche sich auf der Kugel unter rechten Winkeln schneiden, bilden auf der Tafel rechte Winkel.

Es seien, um diess zu beweisen, MT und MS zwei Tangenten an der Kugel; ihre Perspectiven auf der Tafel VXY, welche auf dem Halbmesser OJ senkrecht steht, sind die Durchschnitte M'T' und M'S' dieser Tafel mit den Ebenen OMT und OMS; diese letzteren aber schneiden die Kugel in zwei kleinen Kreisen MαO und MβO, die MT und MS zu Tangenten haben; sie schneiden ferner auch die Berührungsebene der Kugel an O in zwei Geraden OT und OS, welche ebenfalls Tangenten an jenen kleinen Kreisen, und offenbar mit M'T' und M'S' parallel sind, woraus folgt, dass Winkel TOS = T'M'S'. Zieht man nun TS, so sind die zwei Dreiecke MTS und OTS congruent, weil TM = TO und SM = SO, als Tangenten an demselben Kreise, welche je zu zweien von demselben Punkte ausgehen. Mithin ist Winkel TMS = TOS = T'M'S', was zu beweisen war.

Perspectiven gewölbter Thore.

§. 388.

Taf. 19. Fig. 1. Dieses Thor wird von der Vorderseite gesehen, wie der Grundschnitt es zeigt, der hier in verjüngtem Maasstabe gezeichnet ist und nur die Lage der gegebenen Stücke und die Richtung der angewendeten Hilfslinien andeuten soll; a′b′ und g′h′ sind die wahren Längen der Thorpfeiler, deren Distanz von der Tafel gleich b′X′ und deren Tiefe gleich X′Y′ ist. Zieht man nun die Linien Pa′, Pb′, Pg′, Ph′ und ferner die Geraden DX′, DY′ unter 45°, so bestimmt man leicht die perspectivischen Rechtecke A′B′E′, G′H′J′, welche die Grundflächen der Pfeiler bilden, denn nach §. 303 sind b′B′ und b′E′ perspectivisch gleich b′X′ und b′Y′. Ist endlich b′b″ die absolute Höhe des Pfeilers, so bestimmt die Linie b″P die verkürzten Höhen der vertikalen Kanten B′B″ und E′E″; die beiden anderen Kanten G′G″ und K′K″ aber sind jenen gleich, da sie, zu zweien, in derselben Frontebene liegen. Somit stellt also B″G″K″E″ das Rechteck am Anlauf des Gewölbes dar.

§. 389.

Da die beiden einander entgegengesetzten Thorbögen in Ebenen liegen, welche parallel mit der Tafel sind, so bleiben ihre Perspectiven kreisförmig (§. 383), und man erhält diese, wenn man über den Durchmessern B″G″, E″K″ Halbkreise beschreibt. Die vertikalen Gewölbefugen erhält man, indem man zuerst X′Y′ in drei gleiche Theile theilt, und hierauf die Theilpunkte mit D verbindet; hiedurch werden auf B′E′ die Fusspunkte derjenigen Vertikalen bezeichnet, welche auf B″E″ die Anfangspunkte jener Halbkreise liefern; man zeichnet sie schichtenweise unterbrochen, wie die Figur es zeigt. Alle diese Kreise müssen $P\theta$ zur gemeinschaftlichen Tangente haben; denn diese Gerade ist offenbar der Durchschnitt der Tafel mit der Berührungsebene, welche durch den Augpunkt an den Cylinder der Bogenfläche gelegt ist; da nun diese Ebene die Tangenten jener Kreise enthält, und da sie durch das Auge des Beobachters geht, so müssen die Perspectiven jener Tangenten alle in dem Grundschnitte $P\theta$ zusammenfallen, der daher die gemeinschaftliche Tangente an den Perspectiven der auf dem Cylinder liegenden Kreise sein muss (§. 373).

§. 390.

Da die absolute Höhe a′a″ der Vorderfläche gegeben ist, so bestimmt man hieraus leicht die perspectivische Höhe A′A″ und die Seiten A″H″, H″J″. Was den Karniess betrifft, der hier einfach aus einer vorspringenden Einfassung von der Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds besteht und auf dem Grundrisse in $\alpha\beta\gamma\delta$ projicirt ist, so muss man $h''\lambda'$ gleich dem Vorsprunge der Einfassung nehmen, und hierauf die Gerade $\lambda'P$ ziehen, welche, in Verbindung mit der Diagonale DH″ die untere Ecke β der Einfassung bestimmt. Nun kann man die Kanten $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$ zeichnen; die Länge dieser letzteren aber erhält man, indem man $\varepsilon'\varphi'$ gleich der Tiefe $\beta\gamma$ der Einfassung nimmt, und hierauf $\varphi'D$ zieht, welche die unter 45° gegen die Tafel geneigte Linie $\varphi\gamma$ darstellt.

Nimmt man endlich $\varepsilon'\varepsilon''$ gleich der absoluten Höhe der Einfassung, so liefert die Gerade $\varepsilon''D$ die scheinbare Grösse der vertikalen Seite $\beta'\beta''$, und es ist nun leicht, das obere Rechteck $\alpha''\beta''\gamma''$ zu vollenden.

§. 391.

Taf. 19. Fig. 2. Es werde nun angenommen, der Thorbogen befinde sich in einer auf der Tafel senkrechten Ebene. Mittelst der absoluten Distanzen A″b und be, welche die Dicke der Pfeiler und den Durchmesser des Thors

angeben, findet man, wie oben, die Grundflächen und die vertikalen Kanten der Pfeiler, so wie auch den Durchmesser B'E', der im Anlauf des Gewölbes liegt. Was die Perspective des Bogens betrifft, so begnügt man sich oft mit der Anwendung des umschriebenen Halbquadrats BEGH und der Diagonalen BG und EH. Aus §. 379 ist bekannt, dass der äussere Theil $HM = \frac{1}{5} HE$, woraus folgt, dass auch $HK = \frac{1}{5} HB$; ferner macht die Diagonale BG mit dem Horizonte einen Winkel, dessen Tangente $\frac{GE}{EB} = \frac{1}{2}$ ist. Nimmt man daher $Pd = \frac{1}{2} PD$, so muss d der Fluchtpunkt der Diagonale BG sein; denn führt man den in Dd aufgeklappten Lichtstrahl in die Hauptebene zurück, so ist er offenbar parallel mit jener Diagonale. Die Perspective dieser letztern Linie ist also B'd, welche, in Verbindung mit den Vertikalen E'G' und B'H', das perspectivische Halbquadrat E'G'H'B' liefert. Die zweite Diagonale E'H' desselben schneidet die erste in einem Punkte, durch welchen man eine Vertikale zieht, um den Punkt L' als die Perspective des höchsten Punktes L auf dem Halbkreise zu erhalten. Nimmt man endlich $H'K' = \frac{1}{5} H'B'$, so gibt der Durchschnitt der Sehne K'P mit den beiden Diagonalen zwei andere Punkte M', N' der gesuchten Curve. Nun kennt man bereits auch die beiden Anfangspunkte des Bogens, im Ganzen also fünf Punkte und drei Tangenten, was gewöhnlich zur Zeichnung der Halbellipse B'M'L'N'E' hinreicht. Da übrigens dieses Verfahren nur gewisse ganz besondere Punkte liefert, so enthält der folgende Paragraph eine andere allgemeine Methode.

§. 392.

Zweite Methode. Nachdem man, wie oben, die Grundflächen der Pfeiler und den im Anlaufe des Gewölbes liegenden Durchmesser B'E' bestimmt hat, denke man sich den Bogen um die Vertikale A''A' gedreht und in die Tafel auf den Halbkreis BLE aufgeklappt, welchen man bestimmt, indem man A'B = A''b und BE = be nimmt. *) Bei dieser Bewegung müssen die beiden auf eine beliebig gezogene Horizontale aufgeklappten Punkte M und N Kreisbogen beschreiben, deren Sehnen mit der Tafel einen Winkel von 45° bilden. Diese Sehnen nun haben zu Perspectiven die Linien MD' und ND'. Die in MN aufgeklappte Horizontale, welche sich anfänglich in der Fliehebene A''P befand, schneidet die Tafel in T, folglich ist TP ihre Perspective, welche durch ihr Zusammentreffen mit MD' und ND' die Perspectiven zweier Punkte M' und N' des Bogens liefert. Taf. 19. Fig. 3.

§. 393.

Diese Methode kann auf alle Horizontalen wie TMN angewendet werden; durch ihre Anwendung auf den Scheitelpunkt L, erhält man den Punkt L', in welchem die Halbellipse von der Tangente KP berührt wird, weil letztere Linie die Perspective der in KL aufgeklappten Tangente ist. Da aber KP gegen den Horizont geneigt ist, so ist L' nicht der culminirende Punkt der Perspective, d. h. nicht derjenige Punkt, in welchem die Tangente horizontal ist.

§. 394.

Um diesen culminirenden Punkt zu erhalten, muss man unter allen Berührungsebenen des Kegels, der von den nach dem gegebenen Kreise gezogenen Sehstrahlen gebildet wird, diejenige suchen, welche

*) In der Anwendung ist es besser, den Halbkreis BLE links aufzuklappen, weil man alsdann nur einen einzigen Distanzpunkt D nöthig hat, und die Sehkanten weniger schief ausfallen. Hier wurde, um Verwirrung in der Figur zu vermeiden, die Aufklappung rechts vorgezogen.

parallel mit der Grundlinie XY ist; denn eine solche Ebene kann die Tafel nur in einer mit XY parallelen Geraden schneiden, welche also horizontal sein und die Perspective B′L′E′ berühren muss, weil sie die Perspective einer gewissen Tangente an dem gegebenen Kreise ist (§. 313).

Führt man nun die Operation auf der Horizontebene aus, deren Grundlinie PD ist, und auf welcher die Spitze des Sehstrahlenkegels in O liegt, so ist die Gerade OS offenbar der Grundschnitt der gesuchten Berührungsebene; die Fliehebene A″P, welche den gegebenen Kreis enthält, hat zu ihrem Grundschnitte die auf PD senkrechte Gerade GS; man darf also jetzt nur aus dem Punkte S, in welchem diese beiden Grundschnitte sich treffen, eine Tangente an den gegebenen Kreis ziehen. Um diese Construction auszuführen, klappe man den Kreis und den Punkt S um die Vertikale GK in die Tafel auf; der Kreis kommt, wie im §. 392, in BLE, und der Punkt S in S′ zu liegen; alsdann aber ist S′θ die Aufklappung der gesuchten Tangente, welche, in die Fliehebene PA″V zurückgeführt, die Tafel in V schneidet, und folglich ist die Horizontale Vω der Durchschnitt der Tafel mit der durch S′θ gehenden Berührungsebene. Da aber diese Ebene durch den Augpunkt O geht, so ist ihr Grundschnitt Vω genau die Perspective der in S′θ aufgeklappten Tangente, berührt folglich die Ellipse B′L′E′ (§. 313) und liefert also den gesuchten höchsten Punkt derselben.

§. 395.

Gewöhnlich reicht dieses Resultat zur Zeichnung der Curve B′L′E′ hin. Will man aber den Berührungspunkt ω genau bestimmen, so bemerke man, dass die in θφ aufgeklappte Gerade in ihrer ersten Lage senkrecht auf der Tafel war und φP zur Perspective hatte. Diese letztere Linie schneidet also die Vω in dem Punkte ω, der somit die gesuchte Perspective des Berührungspunktes θ ist. Man könnte auch die Gerade θD′ anwenden; denn diese ist die Perspective der Sehne desjenigen Bogens, welchen der in θ aufgeklappte Punkt des Halbkreises beschrieben hat.

§. 396.

Taf. 19. Fig. 3. Dritte Methode. Man ziehe die Ordinaten MQ, LC, NR,... welche den Durchmesser BE in gleiche oder beliebige Theile BQ, QC, CR,... theilen; hierauf trage man die Theile auf bq, qc, cr,... und ziehe Dq, Dc, Dr,... wodurch man die Punkte Q′, C′, R′,... als Perspectiven der horizontalen Projectionen der in M, L, N aufgeklappten Punkte erhält. Daher werden die in Q′, C′, R′,... errichteten Vertikalen die Horizontalen TP, KP,... in den gesuchten Punkten M′, L′, N′ schneiden.

§. 397.

Man bemerke wohl, dass die Methoden der §§. 396 und 392 ganz allgemein sind und sich gleicherweise auf gedrückte oder überhöhte, elliptische oder andere Bogen von beliebiger Form anwenden lassen.

§. 398.

Taf. 19. Fig. 4. Es sei endlich die Perspective eines schiefgesehenen Thores zu construiren, dessen Pfeiler durch ihre Projectionen ABK, GEH auf dem Grundrisse bestimmt sind. Diese Projection ist hier blos zu leichterem Verständnisse der graphischen Operationen gegeben; man könnte sie durch numerische Angaben der Grösse und Neigung der verschiedenen Seiten ersetzen, wie solches in §. 356 geschehen ist. Nachdem man nun die Grundlinie XY der Tafel in die Lage X′Y′ gebracht und die Distanz des Auges von der Tafel in PO aufgeklappt hat, ziehe man die Geraden OF und OF′ parallel mit AB und BK, wodurch man die Fluchtpunkte F und F′ aller Geraden erhält, welche jenen beiden Seiten parallel sind. Verbindet man daher diese Flucht-

punkte mit den Durchgängen T'', X', Y',... so erhält man leicht die Perspectiven der Pfeiler und Flächen. Um die Fugen des Gewölbeanlaufes zu finden, nehme man T'' T' gleich der absoluten Höhe, welche die Pfeiler erhalten sollen, und ziehe T'F, so bestimmt diese die perspectivischen Höhen der vertikalen Kanten A''A', B''B', E''E',... Auf dieselbe Weise erhält man auch die Höhe A'' A''' aus der absoluten Höhe T'' T''' der ganzen Façade.

§. 399.

Um nun den vordern Thorbogen zu erhalten, der in den Punkten B' und E' anfängt, denke man sich diesen in BE projicirten Halbkreis um die Vertikale T gedreht und auf die Tafel in b' l' e' aufgeklappt, welche Lage man leicht bestimmt, indem man T' b' = TB und b' e' = BE nimmt. Bei dieser Bewegung haben zwei beliebige, nun in der Horizontale m' n' aufgeklappte Punkte Kreisbögen beschrieben, deren Sehnen den Endpunkt φ des ähnlichen mit FO beschriebenen Bogens $O\varphi$ zum Fluchtpunkte haben (§. 269). Die Perspectiven dieser Sehnen sind also m' φ und n' φ. Da aber die in m' n' aufgeklappte Horizontale, als sie sich noch in der Fliehebene T'' F befand, die Tafel in t' schnitt, so ist also t' F ihre Perspective, welche durch ihr Zusammentreffen mit m' φ und n' φ die gesuchten Punkte M', N' bestimmt.

Mittelst dieser ganz allgemeinen Methode kann man so viele Punkte der Ellipse B' M' L' N' E' bestimmen als man will; und wendet man sie auf l' an, so erhält man den Punkt L', in welchem die Curve von t F berührt wird. Da aber letztere Gerade gegen den Horizont geneigt ist, so folgt, dass die Perspective L' des Scheitelpunktes l' nicht der höchste Punkt der Bogenperspective ist, d. h. nicht der Punkt, an welchem die Tangente horizontal ist. Wie dieser gefunden wird, lehrt §. 401.

§. 400.

Um den entgegengesetzten Thorbogen, der ebenfalls ein, in KH projicirter Halbkreis ist, zu finden, könnte man ihn auch um die Vertikale X in die Tafel aufklappen; es ist aber kürzer, ihn aus dem vorigen Bogen abzuleiten, indem man bemerkt, dass die beiden Punkte, welche dieselbe Höhe haben wie m' und n' auf einer mit KH parallelen Sehne liegen müssen, deren Durchgang x' auf der Vertikalen X liegt; die Perspective dieser Sehne ist daher x' F. Da endlich die vier Punkte, welche hier mit einander verglichen werden, zu zweien auf einer und derselben Erzeugenden der innern, cylindrischen Bogenfläche liegen, und diese Erzeugende mit BK parallel ist und also ihren Fluchtpunkt in F' hat, so ziehe man M' F' und N' F'; alsdann schneiden diese Linien die Sehne x' F in den beiden Punkten M'', N'', welche dem gesuchten zweiten Bogen K' M'' L'' N'' H' angehören, von welchem aber nur ein Theil für den Beobachter sichtbar ist.

§. 401.

Um den höchsten Punkt der Curve B' M' L' E' zu finden, muss man unter allen Berührungsebenen des Sehstrahlenkegels, der den Kreis BE zur Grundlinie hat, diejenige suchen, welche parallel mit XY ist, denn eine solche Ebene wird die Tafel in einer Linie schneiden, welche mit XY parallel und also horizontal ist, und welche die Perspective B' M' E' berühren muss, weil sie die Perspective einer gewissen Tangente des gegebenen Kreises BE ist. Nimmt man daher als horizontale Projectionsebene die Horizontebene an, deren Grundlinie PF ist, und in welcher die Spitze O des fraglichen Kegels liegt, so muss die gesuchte Berührungsebene ihren horizontalen Grundschnitt offenbar in OS, und die Vertikalebene TBE, welche den gegebenen Kreis enthält, den ihrigen in der mit OF oder BE parallelen Geraden RS haben. Diese beiden Grundschnitte schneiden sich in S; aus diesem Punkte muss man also eine Tangente an den Basiskreis des Kegels ziehen.

Um aber diese Construction ausführen zu können, klappe man den Kreis und den Punkt S um die Vertikale RT″ in die Tafel auf; alsdann nimmt S offenbar die Lage S′ und der Kreis die Lage b′ l′ e′ an, wie in §. 399. Zieht man nun die Tangente S′ θ, so erhält man den Punkt θ des gegebenen Kreises, welcher der höchste Punkt ω der Perspective wird. Um diesen Punkt völlig zu bestimmen, könnte man auf θ dieselben Operationen anwenden, wie früher auf m′ und n′. Gewöhnlich aber ist es hinreichend, die horizontale Tangente, von welcher die Perspective begrenzt wird, zu zeichnen; da nun die Tangente S′θ die Vertikale RT″ in dem Punkte V schneidet, welcher unbeweglich bleibt, wenn man sie S′θ in ihre erste, auf SR projicirte Lage zurückführt, so ist also Vω der Durchschnitt der Tafel mit der an den Sehstrahlenkegel gelegten Berührungsebene, d. h. Vω ist die gesuchte horizontale Tangente der Perspective B′ M′ L′ E′.

Um sich völlig hievon zu überzeugen, bemerke man, dass die in S′θ aufgeklappte und in SR projicirte Tangente in der Berührungsebene liegt, welche durch das Auge geht, und welche die Tafel in Vω schneidet; mithin ist Vω die Perspective jener Tangente und folglich (§. 373) auch Tangente an der Perspective B′ M′ L′ E′ des gegebenen Kreises.

Perspective eines Kreuzgewölbes.

§. 402.

Taf. 20. Fig. 1. Das so benannte Gewölbe ist der Durchschnitt zweier horizontaler Halbkreisgewölbe, welche dieselbe Anlaufsebene und Höhe haben. Hier wird der am gewöhnlichsten vorkommende Fall vorausgesetzt, dass nämlich die Grundflächen beider Cylinderkreise von einerlei Halbmesser, und dass die Pfeiler einfach quadratisch seien. Auf dem Grundrisse sind daher auch die Grundflächen dieser Pfeiler durch die kleinen Quadrate ABG, FEH,... dargestellt, welche wieder die Ecken eines grossen Quadrats A F U V bilden. Die Grundlinien der beiden cylindrischen Gewölbeflächen sind die Kreise L R′ S′ Q und b r′ s′ e, welche hier in die Anlaufsebene umgeschlagen sind, die man sich aber in die vertikalen Ebenen LQ und b e erhoben denken muss. Diese beiden Cylinder nun schneiden sich in zwei ebenen, auf die Diagonalen GJ und KH projicirten Curven, also in Ellipsen.

Denn betrachtet man diejenigen Erzeugenden, welche von den vier gleichhoch über der Anlaufebene liegenden Punkten R′, S′, r′, s′ ausgehen, so findet man, dass die horizontalen Projectionen Sm und sm zweier derselben sich in einem Punkte m schneiden, für welchen HD = Dm ist, weil E s = e s als Abscissen, welche gleichen Ordinaten in gleichen Kreisen entsprechen; da nun auch HG = GK, so folgt, dass die drei Punkte H, m, K in gerader Linie liegen. Eben so schneiden die Projectionen RN und rN der zwei anderen Erzeugenden sich in einem Punkte N, der auch auf der Linie HK liegt, weil offenbar wieder HP = PN. Alle Punkte dieses ersten Durchschnittsastes projiciren sich also auf die Gerade HK, und mithin ist dieser Ast eine in der vertikalen Ebene HK liegende Curve.

Der Durchschnitt beider Cylinder liefert aber noch einen zweiten Ast, weil die Projectionen jener vier Erzeugenden sich auch noch in den Punkten M und n schneiden, von welchen, wie vorhin, bewiesen werden kann, dass sie in der Diagonale GJ liegen. Mithin ist dieser zweite Durchschnittsast eine in der Vertikalebene GJ liegende Curve.

§. 403.

Um nun aber diese Cylinder zur Bildung der innern Fläche eines Gewölbes zu verwenden, dessen

Pfeiler um die leeren Zwischenräume K — J, G — H, K — G, J — H von einander entfernt sind, muss man offenbar alle **inneren** Theile dieser Flächen, d. h. solche Stücke der Erzeugenden, wie die in Mm und Nn, MN und mn projicirten, weglassen; so dass also nur die hier mit **vollem Striche** bezeichneten Stücke bleiben. Diese bilden einen Winkel mit vorspringenden, dem in C unter dem Gewölbe stehenden Beobachter zugekehrten Kanten oder Gräten *(arêtes)*, daher auch die französische Benennung dieser Gewölbeart: *voute d'arêtes.*

§. 404.

Um nun, nach diesen vorbereitenden Betrachtungen, die Perspective des Gewölbes zu construiren, nehme man zur Tafel die vordere Seitenfläche. Des Grundrisses kann man entbehren; denn der in Fig. 1 gezeichnete sollte blos dazu dienen, den Leser mit der Form des gegebenen Gegenstandes bekannt zu machen. Man trage auf die Grundlinie XY die gegebenen Seiten AB und EF der Pfeiler. Ist nun P der Hauptpunkt und D der Distanzpunkt, so bestimmen die Geraden PA, PB, PE, PF, in Verbindung mit der Diagonale AD, die drei Punkte G, J, U, welche, mittelst der durch sie mit XY parallel gezogenen Geraden, zur Construction der perspectivischen Pfeilergrundflächen ABG, EHeF, JbUQ, KLV hinreichen. Zur Prüfung, ob richtig construirt worden, kann man noch die andere, nach dem zur Linken liegenden Distanzpunkte gezogene Diagonale FV anwenden. Taf. 20. Fig. 2.

§. 405.

Angenommen der Grundriss enthalte einen in das Quadrat GHJK eingeschriebenen Kreis, der entweder durch die Pflasterung des Bodens oder durch den Rand eines unter dem Gewölbe angebrachten Bassins sichtbar gemacht sein kann. Um nun die Perspective dieses Kreises nach §. 374 zu erhalten, zeichne man einen Halbkreis über dem Durchmesser BE, ziehe die Diagonalen cg, ch, und die Geraden $\lambda\varrho$, $\mu\varphi$, welche die Seiten des in diesen Kreis eingeschriebenen Quadrats sind. Letztere haben zu Perspectiven die Geraden $P\varrho$ und $P\varphi$, aus deren Durchschnitt mit den beiden Diagonalen GJ und HK man schon vier Punkte der gesuchten Ellipse erhält. Die Vertikale Pc und die durch C′ gezogene Horizontale, welche zwei Durchmesser des gegebenen Kreises darstellen, liefern weitere vier Punkte, in welchen die Ellipse die Seiten des umschriebenen Quadrats GHJK **berühren** muss. Man hat also nun acht Punkte und vier Tangenten der Ellipse, was zu ihrer Zeichnung hinreicht. In §. 374 wurde aber gezeigt, wie man so viele Punkte derselben, als man nur immer will finden, und wie man auch ihre Axen construiren könne (§. 376).

§. 406.

Um nun die Perspective des Kreuzgewölbes selbst zu finden, errichte man die Vertikalen BB′, EE′, gleich der absoluten Höhe der Pfeiler, und ziehe den Halbkreis B′ Z E′, welcher den Bogen des vordern Einganges darstellt, und welcher, da er in der Tafel selbst liegt, auch in der Perspectiven seine natürliche Grösse beibehält. Hierauf ziehe man die Geraden B′ P und E′ P, welche die Perspectiven der beiden Erzeugenden des Cylinders sind, die im Anlaufe des Gewölbes sich befinden, und in welchen die vertikalen Pfeiler-Kanten GG′, KK′, LL′ und HH′, JJ′, QQ′ sich endigen müssen. Beschreibt man ferner über der Horizontalen L′Q′ als Durchmesser einen Halbkreis, so stellt dieser den Gewölbebogen des hintern Einganges dar, welcher, da er in einer mit der Tafel parallelen Ebene liegt, auch in der Perspective kreisförmig bleiben muss (§. 383).

§. 407.

Was nun die beiden Ellipsen oder Gratbögen der Gewölbe betrifft (§. 403), so betrachte man

zuerst diejenige, welche in der Fliehebene AGJD liegt, und deren Anfangspunkte G′ und J′ sind. Schneidet man den vordern Cylinder durch eine beliebige Horizontalebene TRS, so erhält man zwei auf der Tafel senkrechte Erzeugende, deren Durchgänge offenbar die Punkte R und S sind, und welche RP und SP zu Perspectiven haben. Aber dieselbe Horizontalebene musste die Ellipse in einer Sehne schneiden, welche unter 45⁰ gegen die Tafel geneigt ist, und sie in T schneidet, sofern AT der Durchschnitt der Tafel mit der vertikalen Ebene AGJD jener Ellipse ist. Folglich ist TD die Perspective dieser Ellipsensehne und daher gehören die Punkte M und n, in welchen die beiden Erzeugenden RP und SP von TD geschnitten werden, der gesuchten Ellipse an.

§. 408.

Man kann diese Construction für verschiedene Horizontalebenen wiederholen. Wendet man sie auf die Ebene T′Z an, welche den vordern Cylinder in einer Erzeugenden berührt, deren Perspective ZP ist, so erhält man die Perspective C des Scheitels der wirklichen Ellipse, d. h. den Punkt, in welchem die Curve G′MCnI′ von der Geraden T′D berührt wird (§. 373), weil diese Linie eine Sehne ist, die zu einer Tangente am Scheitel der wirklichen Ellipse geworden ist. Weil aber die Tangente T′D gegen den Horizont geneigt ist, so ist C nicht der höchste Punkt der Perspective; wie man diesen findet, wird später (§. 412) gezeigt werden.

§. 409.

Was die Perspective der andern Ellipse betrifft, welche in der Fliehebene FHK liegt, und deren Anfangspunkte in K′ und H′ sind, so braucht man hiezu keines zweiten Distanzpunktes; man bezieht einfach den Punkt M auf m in der Erzeugenden SP mittelst einer Horizontalen, welche eine Erzeugende, des mit der Tafel parallelen Cylinders darstellt; und eben so bezieht man den Punkt n auf N in der Erzeugenden RP. Hiedurch aber wird man in den Stand gesetzt, auch die zweite Ellipse H′mCNK′ zu construiren.

§. 410.

Taf. 20. Fig. 2. Der Gewölbebogen über dem Seiteneingange, welcher in der Fliehebene FP liegt, ist ein Halbkreis, dessen horizontaler Durchmesser die Tafel in den Vertikalen FF′ und zwar in der Höhe EE′ schneidet; mithin ist F′ der Durchgang dieses Durchmessers und F′P seine noch unbestimmte Perspective. Da aber letztere Linie die Kanten ee′ und bb′ der Pfeiler in den Punkten e′ und b′ trifft, so sind diese die Anfangspunkte des Halbkreises.

Man betrachte nun zwei beliebige, in einerlei Höhe liegende Punkte dieses Halbkreises, z. B. die beiden, welche in der Horizontalebene RS liegen. Offenbar muss die Linie, welche diese Punkte verbindet, senkrecht auf der Tafel sein und diese in der Vertikalen FF′, im Punkte t schneiden, so dass also Pt die Perspective dieser Linie sein wird. Klappt man nun den Seitenkreis um die Vertikale FF′ in die Tafel auf, so ist leicht einzusehen, dass die beiden fraglichen Punkte mit den Punkten R und S des vordern Kreises zusammen fallen müssen.*) Da ferner, während dieser Viertelsumdrehung, die gesuchten Punkte zwei Kreisbögen beschrieben haben, deren Sehnen horizontal und unter 45⁰ gegen die Tafel geneigt sind, so sind also RD und SD die Perspectiven dieser Sehnen, und bestimmen, in Verbindung mit Pt, die gesuchten Punkte r und s.

*) Diess erhellt ganz deutlich aus dem Grundrisse (Fig. 1), wo Fs = FS und Fr = FR, weil beide Cylinder gleich und die Pfeiler quadratisch sind.

Man hätte den Punkt s auch aus dem Durchschnitte der Geraden Pt mit der durch den bereits construirten Punkt m gezogenen Horizontalen finden können; denn diese beiden Punkte müssen, wie auch n und r, auf derselben Erzeugenden des mit der Tafel parallelen Cylinders liegen.

§. 411.

Wendet man diese Constructionsweise, durch welche man so viele Punkte des Seitenkreises finden kann, als man will, auf den Scheitelpunkt dieses Kreises an, so findet man den Punkt z mittelst der beiden Geraden ZD und t′ P, deren letztere die Curve b′rzse′ berühren muss, weil sie die Tangente ist an dem Scheitel des wirklichen Halbkreises. Da aber die Tangente t′P gegen den Horizont geneigt ist, so ist z nicht der höchste Punkt der Perspective. Wie dieser zu finden ist, lehrt der nächste §.

Den Bogen über dem Seiteneingange zur Linken könnte man auf eine ähnliche Art mittelst des zweiten Distanzpunktes finden. Es ist aber viel einfacher die für die Curve b′rzse′ gefundenen Punkte mittelst horizontaler Geraden symmetrisch auf die linke Seite zu beziehen.

§. 412.

Die culminirenden Punkte. Die beiden Ellipsen, welche die Gräten des Gewölbes bilden und die beiden Halbkreise über den Seiteneingängen, liegen alle auf dem Cylinder, dessen Erzeugenden mit XY parallel sind. Legt man daher durch den Augpunkt eine Berührungsebene an diesen Cylinder, so enthält letztere eine Tangente für jede der vier genannten Curven. Diese vier Tangenten aber haben zur gemeinschaftlichen Perspective den Durchschnitt der Tafel mit jener Berührungsebene. Es ist also, für's Erste, dieser Durchschnitt Tangente an den Perspectiven der vier Curven (§. 373). Da aber die Berührungsebene eine Erzeugende des mit XY parallelen Cylinders enthält, so kann sie also die Tafel nur in einer ebenfalls mit XY parallelen, folglich horizontalen Geraden schneiden. Es ist also jener Durchschnitt eine den Perspectiven der vier Curven gemeinschaftliche horizontale Tangente, und muss also die gesuchten culminirenden Punkte enthalten.

§. 413.

Um nun die Berührungsebene, von der im vorigen §. die Rede war, zu construiren, lasse man sie, so wie den von ihr berührten Cylinder und den Gesichtspunkt, eine Viertelsumdrehung um die in der Mitte C′ des Kreuzgewölbes errichtete Vertikale C′C machen. Diese Vertikale ist auf dem Grundrisse der Fig. 1 in C projicirt, und man sieht daselbst leicht, dass am Ende diese Bewegung der Seitencylinder mit dem vordern Cylinder zusammenfallen und als Grundschnitt auf der Vertikalebene der Fig. 2 den Halbkreis B′ Z E′ erhalten muss. Auch ist klar, dass der Gesichtspunkt auf die Horizontale PD zu liegen kommen wird und zwar in eine Entfernung.

$$PO'' = PD + PW.$$

Zieht man folglich aus O″ die Tangente $O''\alpha$, so ist diese nicht nur der vertikale Grundschnitt, sondern auch die vertikale Projection der gesuchten Berührungsebene. Diese Ebene aber schneidet die ursprüngliche Tafel, welche in Folge der Viertelsumdrehung die in F F′ projicirte Lage angenommen hat, in einer in θ projicirten Horizontalen. Dreht man nun Alles wieder in die erste Lage zurück, so sieht man leicht ein, dass jene Horizontale θ in die mit XY parallele Lage $\theta\psi$ kommt. Die Gerade $\theta\psi$ ist also der Durchschnitt der Tafel mit der durch den Augpunkt an den Seitencylinder gelegten Berührungsebene; sie ist also auch die

gemeinschaftliche Grenztangente an den vier Ellipsen, durch welche die Perspectiven der beiden Gratbögen und der Bögen über den zwei Seiteneingängen dargestellt sind *).

§. 414.

Gewöhnlich reicht diess hin, um jene vier Ellipsen zu zeichnen; will man aber die Berührungspunkte, wie α' und β', genau bestimmen, so bemerke man, dass, nach der Viertelsumdrehung, der Seitencylinder von der durch den Augpunkt gelegten Berührungsebene in einer senkrecht auf der ursprünglichen Tafel stehenden Erzeugenden berührt wird, welche auf Fig. 2 in α, und auf Fig. 1 in $\alpha\,\beta''$ projicirt ist. Man sieht also, dass α'' (Fig. 1) der Berührungspunkt jener Berührungsebene mit der Gratellipse ist, und β'' der Berührungspunkt mit dem Bogen über dem Seiteneingange rechts. Führt man nun Alles wieder in seine ursprüngliche Lage zurück, so kommt der Punkt α'' in α' zu liegen (Fig. 1), weil der Winkel $\alpha''\,C\,\alpha'$ ein Rechter ist, d. h. der Berührungspunkt bleibt auf derjenigen Erzeugenden $\alpha\,\beta''$, in welcher er Anfangs war. Da nun diese Gerade in Fig. 2 αP zur Perspective hat, so gibt also der Durchschnitt dieser letztern mit $\theta\psi$ die Perspective α' des culminirenden Punktes auf der Tafel.

§. 415.

Was den Berührungspunkt β'' (Fig. 1) betrifft, so muss er, wenn Alles wieder in die ursprüngliche Lage zurückgedreht wird, in β' zu liegen kommen. Dieser Berührungspunkt β' liegt also in einer auf der Tafel AF senkrechten Geraden, welche die Tafel in der Vertikalen F und zwar in der Höhe des Punktes α schneiden muss. Diese Senkrechte nun ist in Fig. 2 durch βP dargestellt, und ihr Durchschnitt mit $\theta\psi$ liefert die Perspective β' des culminirenden Punktes für den Gewölbebogen über dem Seiteneingange.

§. 416.

Der obere Theil des Kreuzgewölbes (Fig. 2) hat zum Umrisse ein Quadrat, dessen eine Seite $A''\,F''$ ist, und wird von einer vorspringenden Einfassung in der Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds gekrönt. Da zwei der Seiten des Quadrats senkrecht auf der Tafel stehen, so sind $A''P$ und $F''P$ ihre noch unbestimmten Perspectiven. Aber der Durchschnitt der Diagonale $A''\,D$ mit $F''\,P$ bestimmt die Ecke U'', welche übrigens auch auf der vertikalen Pfeilerkante $U\,U''$ liegen muss. Durch die Horizontale $U''\,V''$ wird endlich das Quadrat geschlossen.

§. 417.

Die vorspringende Einfassung hat zur Grundfläche ein mit $A''\,F''\,U''\,V''$ concentrisches Quadrat. Man nehme also $A''\,\lambda$ und $F''\,\mu$ gleich dem Vorsprunge, den die Einfassung erhalten soll, so sind die Geraden λP und μP die Perspectiven der auf der Tafel senkrechten Seiten. Die verlängerte Diagonale $A''\,D$ schneidet die Seite λP im Punkte a und die andere Seite μP im Punkte u; somit erhält man also zwei Ecken a und u des gesuchten Quadrats a f u v, das nun leicht zu vollenden ist.

*) Sollte der Punkt O'' in eine unbequeme Entfernung fallen, so dürfte man nur

$$P\delta = \tfrac{1}{2}\,PD + \tfrac{1}{2}\,PW \text{ und } \delta\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,P\omega$$

nehmen. Denn der auf diese Art erhaltene Punkt ε wäre alsdann offenbar der Mittelpunkt und $\varepsilon\omega$ der Halbmesser des Kreises, den man beschreiben müsste, um den Berührungspunkt α der Tangente $O''\alpha$ zu finden. So könnte man also durch α, ohne den Punkt O'' nöthig zu haben, die Tangente $O''\alpha$ ziehen.

Um das obere Quadrat der Einfassung zu erhalten, nehme man auf der Tafel die Länge $\lambda\lambda'$ gleich der absoluten Höhe der Einfassung. Nun liefert der Durchschnitt der Geraden λ' P mit der Vertikalen aa' eine Ecke a' des obern Quadrats, und man erhält dieses vollständig, wenn man die Horizontale a'f', die Vertikale ff', die Gerade f'P und endlich die Vertikalen uu' und vv' zieht.

Kreuzgewölbe mit mehreren Abtheilungen.

§. 418.

Nachdem man auf der Basis XY der Tafel die Punkte a, b, e, f bemerkt hat, in welchen die verlängerten Seiten der Pfeiler-Grundflächen, deren Perspectiven Pa, Pb, Pe, Pf sind, endigen, nehme man Xa gleich der Distanz des vordersten Pfeilers von der Tafel, und bestimme durch die Diagonale XD die perspectivische Tiefe aA, so erhält man AB und EF als die Perspectiven der vorderen Seiten der beiden ersten Pfeilergrundflächen. Eben jene Diagonale DX bestimmt auch die Punkte G, J, U, welche, in Verbindung mit den Parallelen GH, JK, UL, hinreichen, um die Grundflächen der vier ersten Pfeiler zu construiren. Man errichte ferner aus allen Endpunkten dieser Grundflächen Vertikalen, und nehme XX' gleich der Höhe eines Pfeilers bis zum Gewölbeanlauf; zieht man hierauf die Diagonale X'D, so schneidet diese die vertikalen Pfeilerkanten in den Punkten A', G', J', welche hinreichen, um die Anlaufsfugen A'B', E'F', B'G'L', E'H'J' zu bestimmen. Endlich beschreibe man über der Distanz B'E', als einem Durchmesser, den Halbkreis B'ZE', so stellt dieser den Gewölbebogen des vordern Einganges dar; derjenige aber des entgegengesetzten Eingangs darf nicht über L'Q' errichtet, sondern muss an's Ende der hintersten Abtheilung versetzt werden, wenn anders nicht ein Pfeilerbogen *(arc doubleau)* vorhanden ist, der dem Gewölbe, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Abtheilungen, als Stütze dienen soll. Taf. 20. Fig. 3.

§. 419.

Was die beiden Ellipsen betrifft, welche die Gratbögen der ersten Abtheilung bilden, so erhält man sie wie in §. 407, indem man die Erzeugenden RP, SP des Cylinders und die Diagonale TD zieht, wodurch man die Punkte M und n, und durch sie die Punkte m und N erhält. G'MC'nJ' und H'mC'NK' stellen die Perspectiven dieser Gratbögen dar. Von ihren culminirenden Punkten wird in §. 423 die Rede sein.

§. 420.

Um die Perspective der zweiten Abtheilung des Kreuzgewölbes zu construiren, könnte man den Punkt X'' suchen, in welchem die Basis der Tafel von der Diagonale dieser Abtheilung geschnitten wird, und müsste zu diesem Zwecke, links von X, eine Länge XX'' = ae nehmen. Da aber dieser Punkt X'' (welcher auf der Figur nicht angegeben ist), in eine unbequeme Entfernung fallen würde, so ist es besser, sich des schon construirten Punktes L zu bedienen, durch welchen die Diagonale gehen muss, so dass man also LD als Perspective dieser Diagonale erhält. Da nun diese Linie die Geraden Pe und Pf in den Punkten V und u schneidet, so kann man die Grundfläche Vqu des dritten Pfeilers rechts construiren und aus ihr die beiden Ecken W und l des entsprechenden Pfeilers links finden. Hierauf errichte man aus allen diesen Ecken Vertikalen, die ihre Endpunkte in den Geraden B'P und E'P erhalten, und beschreibe endlich über l'q' als Durchmesser einen Halbkreis l'xq', so stellt dieser den Bogen über dem hintern Eingange dar.

Hätte das Kreuzgewölbe noch eine dritte Abtheilung, so würde man, um die Pfeiler derselben zu finden, die Diagonale Dl ziehen, und hierauf wie oben verfahren.

§. 421.

Um nun die Ellipsen zu construiren, welche die Gratbögen dieser zweiten Abtheilung bilden, bemerke man, dass die eine derselben horizontal in LV projicirt wird, und dass sie zwei Punkte M′ und n′ enthält, welche auf den Erzeugenden RP und SP des vordern Cylinders liegen. Diese beiden Erzeugenden aber sind horizontal in ϱP und σP projicirt; folglich bestimmen die Punkte μ und ν, in welchen diese Geraden von LV geschnitten werden, die Vertikalen, mittelst welcher man die gesuchten Punkte M′ und n′ erhält. Aus diesen aber erhält man sofort auch die correspondirenden Punkte m′ und N′ des andern Gratbogens. Dieses Verfahren könnte man jedoch nicht auf den Scheitelpunkt C″ beider Ellipsen anwenden, und da es überhaupt wegen der sehr schiefen Richtung der Erzeugenden RP und SP ziemlich unsichere Resultate gewährt, so ist es nöthig, sich nach einem andern mehr directen Verfahren umzusehen.

§. 422.

Die Ellipsensehne, welche die beiden gesuchten Punkte M′ und n′ verbindet, ist eine unter 45⁰ gegen die Tafel geneigte, und in L V D projicirte Horizontale. Sie schneidet folglich die Kante LL′ des zweiten Pfeilers in der nämlichen absoluten Höhe, in welcher jene Kante von der Horizontalebene RS geschnitten wird. Verlängert man daher RS bis B″, und zieht B″ P, so liefert diese Gerade auf LL′ den Punkt λ, in welchem die fragliche Sehne der Kante LL′ begegnet. Die Perspective dieser Sehne ist also λD, und diese schneidet die Erzeugenden RP und SP in den gesuchten Punkten M′ und n′, aus welchen man sofort auch die Punkte m′ und N′ der andern Ellipse findet.

Dieses Verfahren lässt sich auf jede Erzeugende des Cylinders anwenden. In Beziehung auf die Erzeugende ZP muss man die auf der Tafel senkrechte Gerade B‴ P ziehen, welche die Kante LL′ im Punkte λ'' schneidet. Dieser Punkt liegt in der Höhe der Horizontalebene B″ Z, wesshalb also λ'' D die Perspective der Tangente am Scheitel der Ellipse ist und die ZP in dem gesuchten Punkte C schneidet, in welchem die Ellipse L′ M′ C″ n′ V′ λ'' D berührt wird. Die andere Ellipse der nämlichen Abtheilung ist Q′ m′ C′ N′ W′.

§. 423.

Taf. 20. Fig. 3. Die culminirenden Punkte. Um diese zu finden, muss man nach §. 412 erstlich den Durchschnitt der vertikalen Tafel XY mit einer Berührungsebene suchen, welche durch den Augpunkt an den mit XY parallelen Cylinder der ersten Abtheilung gelegt ist. Man drehe zu diesem Zwecke Alles um die durch den Mittelpunkt C dieses Gewölbes gezogene Vertikale, so wird nach einer Viertelsumdrehung jener Cylinder mit dem vordern Cylinder zusammenfallen und die Tafel in dem Halbkreis b′ z′ e′ schneiden, dessen Durchmesser man bestimmt, indem man die Erzeugende PB′ und PE′ bis zu ihrem Durchschnitte mit der durch den Gewölbeanlauf gezogenen Grundlinie X′ Y′ verlängert. Bei dieser Umdrehung verlässt der Augpunkt die Horizontebene nicht und kommt daher auf die Horizontlinie in O′ zu liegen in einer Entfernung PO′ = PD + zY; die letztere Linie zY, welche man mittelst der unter 45⁰ gegen die Tafel geneigten Diagonale CHF erhält, ist die wahre Grösse (§. 303) der perspectivischen Entfernung Cz zwischen der Tafel und der Mitte der Gewölbeabtheilung. Zieht man nun die Tangente O′α, so ist diese der vertikale Grundschnitt der gesuchten Ebene; und da die Tafel, nach einer Viertelsumdrehung, aus ihrer ursprünglichen Lage in die auf XY senkrecht stehende Ebene YY′ zu liegen kam, so ist also ihr Durchschnitt mit der Berührungsebene die vertikal im Punkt θ projicirte Horizontale. Führt man aber Alles wieder in die erste Lage zurück, so stellt jene Horizontale sich als $\theta\varphi$ dar und muss nach §. 412 die beiden Ellipsen der ersten Abtheilung

berühren. Wollte man die Berührungspunkte, d. h. die culminirenden Punkte beider Ellipsen selbst haben, so ist aus §. 414 bekannt, dass einer derselben auf αP liegt *).

§. 424.

Um die culminirenden Punkte der Gratbögen $L' C'' V'$ und $W' C'' Q'$ zu erhalten, muss man durch den Augpunkt eine Berührungsebene an den mit XY parallelen Cylinder der zweiten Abtheilung legen, und hierauf diesen Cylinder um die im Mittelpunkte C_2 dieser Abtheilung errichtete Vertikale drehen. Nach einer Viertelsdrehung wird alsdann dieser Cylinder die Tafel XY wieder in dem Halbkreise $b' z' e'$ schneiden, aber der Augpunkt wird hier in eine Entfernung $PO'' = PD + zY''$ fallen; denn letztere Linie zY'', welche man mittelst der Diagonale $C_2 Q$ erhält, ist die wahre Grösse (§. 303) der perspectivischen Distanz $C_2 z$ zwischen der Tafel und der Mitte der zweiten Gewölbeabtheilung. Diese Distanz kann in Metern, aus den Dimensionen der Pfeiler und ihrer Entfernung von der Tafel berechnet werden. Zieht man nun die Tangente $O'' \alpha''$, so stellt diese den vertikalen Grundschnitt der durch eine Viertelsumdrehung versetzten Berührungsebene dar. Und da durch eben diese Umdrehung die Tafel aus ihrer ursprünglichen Lage in die senkrecht auf XY stehende Ebene $Y'' Y'''$ zu liegen kam, so ist also ihr Durchschnitt mit der Berührungsebene eine vertikal in θ'' projicirte Horizontale. Hieraus schliesst man wie oben, dass die Horizontale $\theta'' \varphi''$ die gemeinschaftliche Tangente ist, durch welche die beiden Gratbögen der zweiten Abtheilung begrenzt werden. Was den culminirenden Punkt φ'' selbst betrifft, so ist er durch die Gerade $\alpha'' P$ gegeben.

§. 425.

Für eine dritte, vierte, . . . Abtheilung müsste man der Distanz PO'' noch 1, 2 . . . mal die constante Distanz $O'O''$ zusetzen, indem man zugleich die Vertikale $Y'' Y'''$ um 1, 2 . . . mal $Y Y'' = O' O''$ hinausrückte.

Ein anderes Kreuzgewölbe mit mehreren Abtheilungen.

§. 426.

Zur Uebung des Lesers soll noch ein Kreuzgewölbe perspectivisch dargestellt werden, wobei angenommen wird, der Augpunkt liege seitwärts und sei in P auf die Tafel projicirt. Da die Constructionen auf denselben Principien beruhen wie die der vorhergehenden Figuren, so werden sie hier nur kurz angedeutet. Taf. 21.

Nachdem man die Perspectiven Pa, Pb, Pe, Pf der Fliehebenen bemerkt hat, zwischen welchen die beiden Pfeilerreihen liegen, nehme man aX gleich der Distanz des ersten Pfeilers von der Tafel und ziehe die Diagonale XD, durch welche sofort die Punkte A, G, J, W und die Frontebenen ABEF, GH, VJ, WU bestimmt

*) Man hätte die Constructionen auch an dem Kreise $B' Z E'$ vornehmen können, welcher einen Schnitt des fraglichen Cylinders darstellt, der aber nicht in der Tafel XY, sondern in der Frontebene ABEF liegt. In diesem Falle müsste man zuerst den Punkt ω' suchen, in welchem diese Frontebene die vertikal in O' projicirte Horizontale schneidet, welche der Grundschnitt der Berührungsebene auf der Horizontebene ist. Dieser Grundschnitt hat nun eine horizontale Projection, deren Perspective OP ist, und diese schneidet die Frontebene AF im Punkte ω; folglich liefert die Vertikale $\omega\, \omega'$ die Perspective ω' des gesuchten Punktes, und die Tangente $\omega' \alpha'$ ist daher die Perspective des Durchschnitts der Berührungsebene mit der Frontebene AF. Diese Berührungsebene nun schneidet die Fliehebene FP in einer Horizontalen, die vom Punkte θ' ausgeht, und welche, nach einer Viertelsumdrehung, $\theta' \varphi$ wird. Eben diese Gerade $\theta' \varphi$ aber muss mit der im Texte gefundenen Linie $\theta \varphi$ zusammenfallen, weil diese Linien die Perspectiven zweier verschiedener, aber in derselben, durch das Auge gehenden Ebene liegender Linien sind.

werden, so dass man nun leicht die Grundflächen der vier ersten Pfeiler vollenden kann. Um auch die übrigen zu erhalten, ziehe man die Diagonale VD, welche auf Pe und Pf zwei Punkte bestimmt, durch welche die Frontebenen der folgenden Pfeiler gelegt werden müssen, u. s. w. Aus allen Ecken der gefundenen Grundflächen errichte man Vertikalen, und bestimme deren verkürzte Längen 1) durch die Horizontalen Y′P, Y″P, welche man durch die oberen Endpunkte der gegebenen Höhen fY′, fY″ zieht; 2) durch die Geraden F″A″ und A″P, F′A′ und A′P. Endlich ziehe man den Halbkreis B′ZE′.

§. 427.

Die beiden Erzeugenden RP und SP des Hauptcylinders liefern durch ihren Durchschnitt mit der Diagonale TD die beiden Punkte M und n des Gratbogens G′MCnJ′, und aus diesen erhält man durch Horizontalen die beiden Punkte m und N des andern Gratbogens K′NCmH′. Den Punkt C, wo beide Ellipsen sich schneiden, erhält man durch Anwendung derselben Construction auf die Erzeugende ZP.

Um den Bogen über dem ersten Seiteneingange rechts zu construiren, ziehe man die Sehne Pt und die beiden Diagonalen RD und SD; hiedurch erhält man die Punkte r und s, welche auf denselben Horizontalen liegen müssen, wie N und n, M und m. Diese Horizontalen liefern auf TP auch die beiden Punkte r″ und s″ des Bogens über dem Seiteneingange links, und es müssen beide Bögen in den Punkten z und z″ von den Geraden PT′ und Pt′ berührt werden.

Eben diese Bögen und die beiden Gratellipsen haben eine horizontale Tangente, welche allen vier Curven gemeinschaftlich ist, und nach §. 423 bestimmt werden kann.

§. 428.

Um die zweite Abtheilung des Gewölbes zu construiren, verlängere man die Sehne tsr bis zum Punkte q, wo sie die Vertikale QQ′ trifft: in diesem Punkte q schneidet jene Sehne die Frontebene VQ; folglich bestimmt die Horizontale $q\sigma\varrho$ auf den Erzeugenden RP und SP des Hauptcylinders die Punkte ϱ und σ, durch welche man die Diagonalen ϱr′D und σs′D ziehen muss, um auf Pt die zwei Punkte r′ und s′ zu erhalten, welche dem Gewölbebogen über dem Seiteneingange der zweiten Abtheilung angehören. Dieser Bogen hat auch die Gerade Pt′ zur Tangente, und mittelst der Horizontalen r′r‴ und s′s‴ erhält man die Punkte r‴ und s‴ des Bogens über dem zweiten Seiteneingang links. Dieser Bogen hat PT′ zur Tangente.

Was die beiden Gratbögen dieser Abtheilung betrifft, von denen nur einer zum Theil sichtbar ist, so ziehe man durch s′ die Horizontale s′m′; diese schneidet die Erzeugende SP in dem Punkte m′, welcher der gesuchten Ellipse angehört. Die Anfangspunkte dieser Curve sind bereits construirt. Die horizontale Tangente, welche die höchsten Punkte dieser Ellipse und die der beiden Seitenbögen bestimmt, findet man wie in §. 424.

§. 429.

Um endlich das Karniess zu construiren, das hier aus einer Kehlleiste und einem rechtwinkligen Stabe besteht, trage man auf die Horizontale X″Y″ den gegebenen Vorsprung a″e der Kehlleiste, und ziehe die Gerade Pe, welche die X″D in dem Punkte α schneiden wird, durch welchen man die Linien $\alpha\gamma$ und $\alpha\delta$P ziehen muss. Ferner nehme man X″X‴ gleich der Höhe der Kehlleiste und a‴b‴ gleich dem Vorsprunge ihres obern Theiles, so erhält man mittelst der Geraden X‴D und b‴P die Ecke β, durch welche sofort die Linien $\beta\lambda$ und $\beta\varepsilon$ gezogen werden müssen. Was die Curve $\alpha\beta$ betrifft, welche aus zwei sich an einander anschliessenden Kreisbögen besteht, und deren äusserste Tangenten vertikal sind (s. Tafel VII), so darf man nur, falls ihre Dimensionen so gross sind, dass sie eine genaue geometrische Construction erfordern, für mehrere

ihrer Punkte die in Beziehung auf α und β gemachten Constructionen wiederholen. Den rechtwinkligen Stab construirt man leicht, da seine Höhe und sein Vorsprung gegeben sind.

Auf der Ecke rechts haben alle Horizontalen denselben Vorsprung wie links, vorausgesetzt, dass man von den Linien a''P und Y''P oder den ihnen analogen in den verschiedenen Horizontalebenen ausgehe.

Ueber dem Karniess erhebt sich noch eine Attike, d. h. eine Lehnmauer, um das sehr niedere Dach zu maskiren; die Construction derselben ist aber so einfach, dass sie keiner weitern Erklärung bedarf.

Perspective einer Freitreppe.

§. 430.

Mehrere kreisförmige Stufen ABE, FGH, JKL führen auf eine Terrasse, in deren Hintergrunde sich eine Thüre in einer Mauerwand befindet. Die Stufen sind senkrechte Cylinder mit halbkreisförmiger Basis. Um nun ihre Perspectiven auf der vertikalen Tafel XY zu construiren, versetze man vorerst diese Tafel in X'Y' und bemerke auf derselben den Hauptpunkt P und den Distanzpunkt D. Taf. 22.

Nach der Methode des §. 374 zeichne man auf dem Grundrisse die Seiten und Diagonalen sowohl des um — als des in den Kreis ABE beschriebenen Quadrats, und auf der Tafel ziehe man die Geraden Pa, Pm, PY' Pn, Pe, welche diejenigen Seiten und den Durchmesser darstellen, die auf X'Y' senkrecht sind. Der Durchschnitt dieser Geraden mit der Diagonale X'D liefert die drei Punkte α', M' C', durch welche man Parallelen mit XY ziehen muss, um die Punkte B', N', A' und E' zu erhalten. Da man nun fünf Punkte und drei Tangenten der Halbellipse A'M'B'N'E' kennt, so kann diese mit hinlänglicher Genauigkeit construirt werden.

§. 431.

Um nun auch den Kreis zu erhalten, der die obere Basis des Cylinders der ersten Stufe bildet, nehme man die Vertikale Y'Y'' gleich der absoluten Höhe dieser Stufe (welche Höhe ungefähr die Hälfte der Breite AF, und gewöhnlich 15—16 Centimeter nach dem Maasstabe der Zeichnung betragen muss), so bestimmt die Gerade Y''P die verkürzte Länge der vertikalen Seite B'B'' des Cylinders und der Axe C'C'', und zieht man hierauf durch den neuen Mittelpunkt C'' eine Parallele mit XY, so erhält man die beiden Punkte A'' und E''. Was den Punkt M'' betrifft, so könnte man auf ähnliche Weise X'X'' gleich der absoluten Höhe der Stufe nehmen und die Diagonale X''D' ziehen, welche die Vertikale M'M'' in dem gesuchten Punkte schneiden würde; man kann aber auch, mit Rücksicht auf den in §. 275 bewiesenen Satz, diese Construction vermeiden. Denn bezieht man den Punkt M' auf m' in derselben Frontebene, so bezeichnet die innerhalb des Abnahme-Maasstabes Y''PY' erhaltene Vertikale m'm'' die verkürzte Höhe, welche die beiden Vertikalen M'M'' und N'N'' erhalten müssen, durch welche man sofort die beiden Punkte M'' und N'' der gesuchten Curve A''M''B''N''E'' erhält.

§. 432.

Diese Ellipse und die vorhergehende müssen eine gemeinschaftliche und zwar vertikale Tangente T'T'' haben, deren genaue Bestimmung von Wichtigkeit ist, weil man ohne sie die beiden Ellipsen unmöglich auf eine für das Auge befriedigende Art begrenzen könnte. Da nun diese Vertikale der scheinbare Umriss des Cylinders ist, so muss man, um ihn zu erhalten, durch den Augpunkt eine Berührungsebene an den senkrechten Cylinder ABE legen. Zu diesem Zwecke nehme man auf dem Grundrisse eine Distanz pO = PD, und ziehe aus dem

Punkte O die Tangente OT; alsdann ist die Vertikale T der gesuchte Umriss, und um nun seine Perspective zu finden, bemerke man, dass dieselbe in einer durch's Auge gehenden Ebene, und also in dem Durchschnitte der Tafel XY mit der vertikalen Ebene OT liegen muss. Dieser Durchschnitt ist die Vertikale θ. Zieht man daher die unbestimmte Gerade θT'T'' senkrecht auf XY, so ist diese die gesuchte Grenztangente, welche die beiden Ellipsen der ersten Stufe berühren muss.

§. 433.

Man könnte es auffallend finden, dass die Vertikale T, welche doch nichts weniger als Tangente an dem horizontalen Kreise ABE ist, zur Perspective eine Gerade T'T'' hat, welche Tangente an A'B'E' ist; aber diess rührt daher, weil die wahre Tangente Tθ und die Vertikale T in derselben, in der durch das Auge gehenden Ebene liegen und also eine gemeinschaftliche Perspective T'T'' haben, welche folglich Tangente an der Ellipse A'B'E' sein muss (§. 375). Das Nämliche gilt für die Ellipse A''B''E'', welche den obern Kreis darstellt, dessen wahre in Tθ projicirte Tangente ebenfalls in derselben Ebene enthalten ist, wie die beiden Geraden, von denen eben die Rede war.

§. 434.

Um die folgenden Stufen zu construiren, könnte man ganz ähnliche Constructionen wiederholen wie die vorigen, aber für eine Grundlinie, welche um 1, 2, ... Stufenhöhen höher läge als X'Y'; man kann aber diese Operationen durch folgende Bemerkungen sehr vereinfachen. Nimmt man für's Erste die Höhe C'C'' doppelt, dreifach u. s. w., so erhält man die Mittelpunkte C''', C''''... der verschiedenen Kreise, welche die auf einander folgenden Stufen begrenzen, und man kann durch diese Mittelpunkte die noch unbestimmten Horizontalen F''C'''H'', J''C''''L'' ziehen. Da nun die Tangente im Punkte F des untern Kreises FGH die Tafel in f auf X''Y'' schneidet, so hat sie zur Perspective die Gerade Pf, welche den Punkt F' und folglich die Vertikale F'F'' bestimmt. Nimmt man hierauf C''H' = C''F', und errichtet die Vertikale H'H'', so erhält man die Endpunkte der Halbkreise, welche die zweite Stufe bilden. Die Gerade GR, welche unter 45° gegen XY gezogen wurde, hat zur Perspective R'D, und diese liefert den Punkt G', welcher die Perspective des Scheitelpunktes G wäre, wenn letzterer im Grundrisse läge. Da er aber eine Stufenhöhe über dem Grundrisse liegt, so ziehe man die Vertikale G'G'' bis zu ihrem Durchschnitte G'' mit Y''P; und verdoppelt man diese Höhe G'G'', so erhält man die Scheitelpunkte G'' und G''' der beiden Kreise, welche die zweite Stufe bilden. Die auf der Tafel senkrechte Vv hat zur Perspective Pv, welche die X'D in V' schneidet; errichtet man nun die Vertikale V'V'' bis X''D, und verdoppelt diese Höhe, so erhält man die Punkte V'' und V''' der beiden gesuchten Ellipsen F'V''G''H' und F''V'''G'''H''. Diese beiden Curven müssen ebenfalls eine gemeinschaftliche, vertikale Tangente haben, die man, wie bei der ersten Stufe, dadurch bestimmt, dass man die Tangente OT_2 und durch θ_2 eine unbestimmte Vertikale zieht.

§. 435.

Auf eine ähnliche Weise verfährt man, um die Perspective der dritten Stufe zu finden; man nimmt ii' gleich der doppelten Stufenhöhe und zieht Pi, wodurch man den Punkt J' und die Vertikale J'J'' erhält. Hierauf nimmt man C'''L' = C'''J, und errichtet die Vertikale L'L''. Um die Perspectiven der Punkte K und W zu erhalten, suche man zuerst die Perspectiven K' und W' ihrer Projectionen auf dem Grundrisse; hierauf errichte man in diesen Projectionen Vertikalen, die man dreimal so gross nimmt, als die zwischen den Abnahme-Maasstäben PY''Y' und DX''X' enthaltenen Abschnitte derselben.

§. 436.

Nun ist noch die Perspective der Thüre zu construiren, deren Oeffnung auf dem Grundrisse durch das Rechteck $\alpha\beta\delta\gamma$ gegeben ist. Die Seiten $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ schneiden die Tafel in den zwei Punkten λ und ϱ, die in der dreifachen Stufenhöhe liegen und zu Perspectiven die noch unbestimmten Linien $P\lambda$ und $P\varrho$ haben. Um ihre scheinbare Grösse zu erhalten, müsste man (§. 303) auf die Horizontale $\lambda\varphi$ eine Länge gleich der Distanz $Y\omega$ des Punktes α von der Tafel tragen und den Endpunkt φ dieser Länge mit D durch eine Gerade verbinden, welche λP im Punkte α' als der Perspective von α schneiden würde; da aber diese Constructionen zuviel Raum erforderten, so wendet man hier die Reduction §. 335 an; d. h. man nimmt als Entfernung des Auges $Pd = \frac{1}{2}\,PD$, und eben so $\lambda\varphi = \frac{1}{2}\,Y\omega$, alsdann schneidet die Gerade φd die λP in demselben Punkte α', den man auch auf die vorhin angegebene Weise gefunden haben würde. Man nehme ferner $\varphi\psi$ gleich der halben Tiefe $\alpha\beta$, und ziehe ψd, so schneidet diese $d e P \lambda$ im Punkte β', als der Perspective von β. Zieht man hierauf die Horizontalen $\alpha'\gamma'$ und $\beta'\delta'$ bis zu ihrem Durchschnitte mit $P\varrho$, so erhält man die Seite $\gamma'\delta'$ des andern Thürpfostens. Die Vertikalen $\alpha'\alpha''$, $\gamma'\gamma''$ werden nach der absoluten Höhe der Thürpfosten bestimmt, welche man auf die in λ und ϱ errichteten Vertikalen tragen könnte. Es ist aber einfacher zu untersuchen, welches Verhältniss zwischen der Breite und der Höhe der Thüre besteht, und alsdann dieses Verhältniss zweier in einerlei Frontebene liegender Geraden auf $\alpha'\gamma'$ und $\alpha'\alpha''$ überzutragen (§. 276).

§. 437.

Um die Einfassung über der Thüre zu construiren, theile man den Abschnitt $\alpha''\gamma''$ in eine ungerade Anzahl gleicher Theile, und lasse die vorderen Steinfugen alle in einem und demselben Punkte, z. B. in der Spitze ω'', des über $\alpha''\gamma''$ construirten gleichseitigen Dreiecks zusammenlaufen. Die anderen Fugen müssen, weil sie senkrecht auf der Tafel stehen, ihren Fluchtpunkt in P haben.

Fünftes Kapitel.

Allgemeine Methode der Perspective.

§. 438.

Die Methode der Fluchtpunkte, von welcher in den vorigen Kapiteln allein Gebrauch gemacht wurde, hat den Vortheil, dass sie nur eine einzige Projectionsebene, die Tafel, erfordert; auch reicht sie vollkommen hin zur Darstellung der gewönlicheren Gegenstände, welche geradlinige oder kreisförmige Kanten haben und von prismatischen oder cylindrischen Flächen begrenzt werden. Bei Körpern aber von weniger einfacher Form, die von windschiefen oder Umdrehungsflächen begrenzt sind, und deren sichtbarer Umriss nicht mehr aus festbestimmten, und zum Voraus bekannten Linien besteht, würde die Methode der Fluchtpunkte sehr unbequem sein; denn man müsste sie nach einander auf verschiedene horizontale, so nahe als möglich an einander liegende Schnitte anwenden, deren einzelne Perspectiven man nach §. 372 finden würde; und endlich müsste man auf der Tafel die Umhüllungscurve dieser perspectivischen Linien zeichnen, um den scheinbaren Umriss des

fraglichen Gegenstandes zu erhalten (§. 497). Da dieses Verfahren aber sehr mühsame graphische Operationen erfordern, und doch keine genauen Resultate liefern würde, so ist es, besonders für solche Leser, welche mit der Darstellenden Geometrie vertraut sind, viel besser, zwei feste Ebenen anzuwenden, auf welche man den fraglichen Gegenstand und den Augpunkt projicirt; hierauf den sichtbaren Umriss des Gegenstandes (§. 242) nach den im ersten Kapitel des V. Abschnitts der Darstellenden Geometrie enthaltenen Methoden zu construiren und endlich die Durchschnitte der Tafel mit den Sehstrahlen zu construiren, welche man nach den verschiedenen Punkten des sichtbaren Umrisses und an andere merkwürdige Punkte des vordern, allein sichtbaren Theiles des Körpers gezogen hat. Diese Methode soll im Folgenden an einigen Beispielen erläutert werden.

Perspective eines Fussgestelles.

§. 439.

Taf. 24. Ein Fussgestell besteht aus drei Haupttheilen, welche alle durch Umdrehungsflächen von gemeinschaftlicher und vertikaler Axe begrenzt werden, nämlich 1) dem cylindrischen Bande, welches durch die Umdrehung der Vertikalen G′ G″ beschrieben wird; 2) der Einziehung, deren Meridiancurve G′H′ K′ ihre Concavität nach Aussen kehrt, und mit zwei horizontalen Tangenten endigt, so dass diese Curve eine entgegengesetzte Krümmung hat, und ihre Berührungsebene den Meridian auf der einen und den Parallelkreis auf der andern Seite lässt; 3) der cylindrischen Basis, welche durch die Umdrehung der Vertikalen K′ K″ beschrieben wird. Gewöhnlich macht das Fussgestelle einen der Gesimstheile eines Säulenfusses aus; hier aber wird es als Träger einer Büste, Vase oder sonst eines Gegenstandes betrachtet. In diesem Falle ist es häufig noch mit verschiedenen anderen Gesimsen versehen, wie in Taf. 6, Fig. 2, wo über der Einziehung zwei cylindrische Riemen zu sehen sind, welche durch einen kleinen Wulst in Form eines vorspringenden Gurtes von einander getrennt werden; unterhalb der Einziehung befindet sich wieder ein cylindrischer Riemen, ein Viertelsstab, und endlich ein Cylinder als Basis. Um aber die wichtigen Umstände, die bei der geometrischen Construction sich herausstellen, dem Leser recht klar vor's Auge zu bringen, wurde hier das Fussgestelle auf seine drei wesentlichen Theile reducirt, wie Taf. 24 es darstellt. Das Ganze ruht auf einem quadratischen Sockel RXxr, dessen Darstellung auf der Vertikalebene der Figur nicht für nöthig erachtet wurde.

§. 440.

Um die Einziehung G′ H′ K′ zu zeichnen, beschreibe man über der Geraden G′ K′ als Durchmesser einen Halbkreis und neige dessen Ordinaten so, dass sie parallel mit G′ g′ werden, wie es in §. 95 gezeigt wurde. Man könnte jedoch auch zwei, sich an einander anschliessende Kreisbogen anwenden, wie in den §§. 93 und 94 geschehen ist.

§. 441.

Taf. 24. Es sei nun (O, O′) der Gesichtspunkt, in welchem das Auge des Beobachters sich befindet, und XYY′ die Vertikalebene, welche als Tafel für die Perspective dienen soll. Diese Tafel scheint hier eine besondere Lage zu haben, weil sie mit der vertikalen Projectionsebene einen rechten Winkel bildet; man muss aber vielmehr sagen, die letztere sei senkrecht auf die perspectivische Tafel angenommen worden, und stets ist auch

dieser Anordnung der Vorzug zu geben. Man suche nun zuerst die Projectionen des sichtbaren Umrisses auf der Einziehung. Dieser Umriss ist nichts anderes als die Berührungslinie jener Umdrehungsfläche mit einem umschriebenen Kegel, dessen Spitze im Augpunkt (O, O′) sich befindet; man darf daher nur die in §. 357 der Darstellenden Geometrie erläuterte Methode anwenden, die der folgende §. kurz noch einmal wiederholen wird.

§. 442.

Es sei P′p′ irgend ein Parallelkreis der Umdrehungsfläche und S′p′T′ sei diejenige Tangente des Meridians, welche diesem Parallelkreis entspricht. Diese Tangente beschreibt, indem sie mit der Meridiancurve sich umdreht, einen senkrechten Kegel, an welchen man jetzt nur zwei durch (O, O′) gehende Berührungsebenen legen darf. Da aber dieser Kegel durch die Horizontalebene O′ Z′ in einem Kreise geschnitten wird, dessen Halbmesser Z′ T′ ist, und der sich horizontal in T J projicirt, so muss man aus O zwei Tangenten an letztere Kreislinie ziehen, oder einfach die Berührungspunkte J, i als Durchschnitte der Kreislinie T J mit dem über C O beschriebenen Kreise bestimmen. Alsdann sind die Geraden C J und C i die Projectionen der Erzeugenden, in welchen der Kegel P′ S′ p′ von den durch (O, O′) gelegten Ebenen berührt wird; und da diese Geraden von dem Parallelkreise P p in den Punkten M und m geschnitten werden, so gehören also diese Punkte dem gesuchten sichtbaren Umriss an, und dürfen nur noch in M′ auf P′ p′ projicirt werden.

§. 443.

Diese Methode lässt sich auf jeden andern Parallelkreis anwenden; betrachtet man aber den Kreis Q′ q′, für welchen die Meridiantangente Q′ S″ auch durch den Punkt T′ geht, so findet man unmittelbar zwei andere Punkte N und n, wenn man die Halbmesser C M und c m links über den Mittelpunkt C hinaus bis zu ihren Durchschnitten mit dem Kreise Q q verlängert; beide gefundenen Punkte müssen alsdann in N′ auf Q′ q′ projicirt werden. Der Grund dieser, von der vorigen etwas verschiedenen Construction liegt darin, dass der Parallelkreis Q′ q′ und der Kreis Z′ T′ nicht auf einerlei Mantel des um den Parallelkreis Q′ q′ beschriebenen Kegels Q′ S″ q′ sich befinden.

§. 444.

Man findet unmittelbar die beiden Punkte des sichtbaren Umrisses, welche auf dem Kehlkreise (H′ h′, H h) liegen; denn da alle Berührungsebenen der Einziehung längs dieses Parallelkreises vertikal sind, so haben diejenigen, welche durch den Punkt (O, O′) gelegt sind, ihre Berührungspunkte in den Durchschnitten der Kreise H h und C J O, d. h. in (D, D′) und (d, D′).

Die Punkte (A, A′) und (F, F′), welche auf dem Hauptmeridian liegen, für welchen alle Berührungsebenen senkrecht auf der vertikalen Projectionsebene stehen, erhält man, indem man vom Punkte O′ aus die Tangenten O′ A′ und O′ F′ an diese Meridiancurve zieht.

§. 445.

Man kann nun noch die Punkte suchen, welche in dem, senkrecht auf der Vertikalebene stehenden Meridian C C′ liegen; zu diesem Zwecke bemerke man, dass die beiden Berührungsebenen, welche, durch den Punkt (O, O′) gehend, jenen gesuchten Punkten entsprechen, senkrecht auf der Vertikalebene C C′ stehen, und sich daher in der Horizontalen (O C, O′ Z′) schneiden müssen; da nun diese Gerade die Meridianebene C C′ im Punkte (C, Z′) schneidet, so darf man nur aus diesem Punkte zwei Tangenten an die in jener Ebene

enthaltene Meridiancurve ziehen. Man drehe desshalb diese Curve um die vertikale Axe C, bis sie mit dem Hauptmeridian zusammenfällt; hierauf ziehe man die Tangenten $Z' \gamma'$, $Z'' \gamma''$, deren Berührungspunkte auf die Vertikale $C' Z'$ bezogen, den gesuchten Punkt γ des sichtbaren Umrisses auf der Vertikalebene liefern. Man hätte leicht auch die entsprechenden Punkte auf der Horizontalebene finden können, indem man den Parallelkreis $\gamma' \gamma''$ auf letztere projicirt hatte; es wurde aber diese Construction weggelassen, weil der Parallelkreis hier zu nahe an den Kehlkreis fiele.

§. 446.

Der sichtbare Umriss auf der Einziehungsfläche wird somit dargestellt durch die Linie von doppelter Krümmung

(ABMDNEFendmbA, A'B'M'D'N'E'F')

und es zeigt sich hier der sehr merkwürdige Umstand, dass auf dieser Linie vier besondere Punkte (B, B') und (b, B'), (E, E') und (e, E') vorkommen, für welche der Sehstrahl nicht nur Tangente an der Einziehung, sondern auch noch Tangente an dem sichtbaren Umrisse ist, den man als die Basis des umschriebenen Kegels betrachten kann, welchem jener Sehstrahl als Erzeugende angehört. Da nun diese besondere Lage des Sehstrahles, wenn sie vorkommt, vier Wendepunkte in der Perspective erzeugt, so ist es nothwendig, die Existenz solcher besonderen Punkte zu beweisen, und eine graphische Methode für ihre Construction zu geben.

§. 447.

Taf. 23. Man stelle die Aufgabe zuerst umgekehrt, so: Es ist ein Punkt (M, M') auf dem Meridian irgend einer
Fig. 3. Umdrehungsfläche gegeben; man soll eine solche Lage für das Auge finden, dass der nach (M, M') gehende Sehstrahl zu gleicher Zeit Tangente an der Umdrehungsfläche und an dem sichtbaren Umrisse sei.

Aus den Lehrsätzen im 8. Abschnitt der Darstellenden Geometrie über die Krümmung der Flächen ist bekannt, dass bei jeder Umdrehungsfläche für jeden Punkt zwei Normalschnitte von grösster und kleinster Krümmung stattfinden, nämlich: 1) der Meridian, dessen Krümmungshalbmesser für den Punkt M' hier durch $MG = R$ dargestellt ist; 2) der senkrecht auf diesen Meridian gemachte, und durch die Flächen-Normale G M' H gehende Schnitt, dessen Krümmungshalbmesser genau das Stück $M'H = R'$ dieser Normale ist. Aus §. 684 der Darstellenden Geometrie ist ferner bekannt, dass man ein windschiefes Hyperboloid Σ erhält, das mit der Einziehungsfläche um den Punkt M' herum osculirt, wenn man die Ellipse, welche mit dem einen jener Normalschnitte in M' osculirt zur Hauptellipse, und die Hyperbel, welche mit dem andern Normalschnitte in demselben Punkte osculirt zur Haupthyperbel von Σ nimmt. Bezeichnet man nun durch 2c die in der Richtung der Normale M'G genommene Axe, und durch 2a und 2b die beiden andern Axen, so müssen zwischen ihren Längen folgende Relationen stattfinden

$$\frac{a^2}{c} = R, \frac{b^2}{c} = R'.$$

Da aber c willkürlich ist, so nehme man es gleich a, alsdann verwandelt die Kehlellipse sich in den mit $M'G = R$ beschriebenen Krümmungskreis E M' F, und die imaginäre Axe $b = \sqrt{R'.a} = M'D$ erhält man, wenn man zu M' G und M' H die mittlere Proportionale sucht. Man vergesse nicht, dass man sich diese imaginäre Axe M' D senkrecht auf den Kehlkreis aus dem Mittelpunkt G desselben errichtet, denken muss. Hierdurch nun ist das Hyperboloid Σ, das mit der Einziehung um den Punkt (M, M') herum osculirt, völlig bestimmt.

§. 448.

Ist ein Kegel um irgend eine Fläche umschrieben, so ist aus §. 743 der darstellenden Geometrie bekannt, dass die Tangente an einem Punkte der Berührungscurve und die Erzeugende des Kegels, welche durch diesen Punkt geht, conjugirte Tangenten sind, welche die Eigenschaft haben, dass sie beziehungsweise parallel sind zwei conjugirten Durchmessern des Schnittes, den man, parallel mit der Berührungsebene in das Ellipsoid oder Hyperboloid gemacht hat, das an dem betrachteten Punkte mit der Fläche osculirt. In vorliegender Aufgabe sind also der die Einziehung in M′ berührende Strahl und die Tangente an eben diesem Punkte des sichtbaren Umrisses, für jede Lage des Auges, beziehungsweise parallel zweien conjugirten Halbmessern des hyperbolischen Schnittes, den man mittelst der auf dem Kehlkreise senkrechten Ebene E F in das Hyperboloid Σ gemacht hat. Da nun eine solche Lage des Augpunktes gesucht wird, für welche der Sehstrahl und die Tangente am sichtbaren Umrisse zusammenfallen, so muss man diesen Sehstrahl so wählen, dass er parallel ist, mit einer der Asymptoten der vertikal in E F projicirten Hyperbel. Denn es ist bekannt, dass zwei conjugirte Durchmesser einer solchen Curve, welche sich einander immer mehr nähern, endlich mit derjenigen Asymptote zusammenfallen, welche die gemeinschaftliche Diagonale aller der Parallelogramme ist, die von den verschiedenen Paaren conjugirter Durchmesser gebildet werden *).

§. 449.

Die Construction wird nun auf folgende Art ausgeführt. Da die beiden Halbaxen der in E F projicirten Hyperbel gleich G F und M′ D sind, so denke man sich in der an M′ gelegten Berührungsebene ein rechtwinkliges Dreieck, das M′ K′ = G F zur Grundlinie habe, und dessen zweite Kathete in K′ senkrecht auf der Vertikalebene stehe und gleich M′ D sei. Alsdann wird die Hypotenuse parallel mit der Asymptote sein. Um nun die Horizontalprojection dieses Dreiecks zu erhalten, projicire man den Punkt K′ in J und nehme J K = M′ D; alsdann ist M K die horizontale und M′ K′ die vertikale Projection des gesuchten Sehstrahls, der, in welchem seiner Punkte sich auch das Auge befinden mag, die doppelte Bedingung erfüllen wird, zu gleicher Zeit die Einziehungsfläche und den sichtbaren Umriss im Punkte (M, M′) zu berühren. Taf. 23. Fig. 3.

§. 450.

Im Vorbeigehen sei bemerkt, dass der Sehstrahl (M K, M′ K′) ganz auf dem Osculations-Hyperboloid Σ liegt, indem er offenbar mit einer der Erzeugenden dieser windschiefen Fläche zusammen fällt. Mithin findet zwischen diesem Lichtstrahle und der Einziehungsfläche eine Berührung zweiten Grades statt, worauf später wird zurückgewiesen werden.

§. 451.

Nun nehme man die Aufgabe in ihrem ursprünglichen Sinne wieder vor: Es sei ein Augpunkt (O, O′) gegeben; man soll den Punkt finden, in welchem der Sehstrahl zu gleicher Zeit Tangente ist an der Einziehungsfläche und an dem sichtbaren Umrisse. Um diese Aufgabe zu lösen, nehme man auf dem Hauptmeridian g′ h′ k′ verschiedene Punkte M′, P′, Q′, ... und bestimme für jeden derselben, nach §. 449, die Sehstrahlen (M R, M′ R′), (P S, P′ S′), (Q T, Q′ T′), ... welche die geforderte doppelte Bedingung erfüllen. Hierauf suche

*) S. die Anmerkung zu §. 109.

man die Punkte, in welchen diese Sehstrahlen den vertikalen Cylinder O T schneiden, so erhält man eine fehlerzeigende Curve T′R′S, deren Durchschnitt mit der Horizontalen O″V′ einen Augpunkt (V, V′) liefert, welcher dieselbe Höhe hat wie (O, O″), und für welchen der Sehstrahl (V N, V′ N′) der Aufgabe entspricht. Führt man hierauf V, V′ in (O, O″) zurück, so bleibt der Berührungspunkt (N, N′) auf demselben Parallelkreise und kommt endlich in die Lage (B, B′), so dass B C N = N C b. Es ist also (O B, O″ B′) der Sehstrahl, welcher der geforderten doppelten Bedingung der Aufgabe entspricht.

Durch Anwendung der zweiten Asymptote findet man noch einen zweiten, dem ersten symmetrisch gegenüberstehenden Punkt (b, B′), der in Beziehung auf das Auge in (O, O″) die nämlichen Bedingungen erfüllen wird. Wendet man ferner auf die Meridiancurve g′ h′ k′, nachdem sie eine halbe Umdrehung gemacht hat, die vorigen Methoden wieder an, so findet man noch zwei andere analoge Punkte, nämlich diejenigen, welche auf Taf. 24 durch (E, E′) und (e, E′) bezeichnet sind.

§. 452.

Taf. 24. Man suche nun die Perspective des Fussgestelles auf der vertikalen Tafel X Y Y′, und nehme desshalb an, diese Tafel sei, ohne ihre Höhe zu ändern, in Fig. 3 versetzt worden, d. h. man habe die Basis X Y mit der Grundlinie Y ω zusammenfallen lassen. Ferner nehme man die Vertikale α der Tafel in beliebiger Entfernung und bezeichne sie durch α_2 P_2. Nachdem man nun vom Augpunkte (O, O′) aus Gerade nach den verschiedenen Punkten des sichtbaren Umrisses gezogen, muss man die Punkte suchen, in welchen dieselben die vertikale Tafel schneiden, und diese Durchschnitte auf Fig. 3 beziehen. Betrachtet man z. B. den Sehstrahl (O D, O′D′), so sieht man, dass er die Tafel in einem auf der Vertikale δ liegenden Punkte und zwar in der Höhe Y δ' schneidet. Zieht man daher die Horizontale δ' D″, und verlängert sie zur Rechten der Vertikale α_2 P_2 um eine Länge gleich $\alpha\,\delta$, so erhält man die Perspective D″ des Punktes (D, D′). Der Punkt d″ liegt auf denselben Horizontalen und symmetrisch mit D″ auf der linken Seite von α_2 P_2. Fährt man auf diese Weise fort in Beziehung auf die übrigen Punkte des sichtbaren Umrisses, und besonders in Beziehung auf die acht merkwürdigen Punkte A, B, D, E, F, e, d, b, so findet man als Perspective dieses Umrisses die Linie

A″ B″ D″ E″ F″ e″ d″ b″ A″.

§. 453.

Was das cylindrische Band betrifft, das den obern Theil des Fussgestelles ausmacht, und das die beiden Vertikalen (L, L′ L″) und (l, L′ L″) zum sichtbaren Umriss hat, so darf man nur Sehstrahlen an die Endpunkte dieser Erzeugenden, so wie an die Endpunkte von (G, G′ G″) und (g, g′ g″) ziehen. Denn die Punkte, in welchen diese Sehstrahlen die Tafel schneiden, bilden offenbar die vier Scheitelpunkte uud mithin die hinlängliche Bestimmung der beiden Ellipsen

L_1 G_1 l_1 g_1 und L_2 G_2 l_2 g_2,

welche die Perspectiven der beiden Grundlinien jenes kleinen Cylinders darstellen. Ferner müssen die Vertikalen L_1 L_2 und l_1 l_2 Tangenten an den beiden Ellipsen sein; denn obgleich jede dieser Erzeugenden sehr verschieden ist von der Tangente am Kreise, so liegen doch beide in einer und derselben, durch das Auge gehenden Berührungsebene und mithin fallen ihre Perspectiven zusammen.

Auf die nämliche Art verfährt man in Beziehung auf den untern Cylinder des Fussgestelles, indem man nur die Perspectiven der vier Scheitel von jeder der beiden Ellipsen construirt, welche die Grundlinien dieses Cylinders darstellen. Diese Ellipsen haben die Vertikalen U_1 U_2 und u_1 u_2 zu gemeinschaftlichen Tangenten.

§. 454.

Um endlich die Perspective des quadratischen Sockels zu erhalten, der das Fussgestelle trägt, nehme man die Distanzen $\alpha_2 X''$, $\alpha_2 R''$ gleich der halben Seite des Quadrats, trage die Höhe $\omega O'$ des Auges von α_2 nach P_2, welcher letztere Punkt somit der Hauptpunkt der Tafel ist, und ziehe die Geraden $X'' P_2$ und $R'' P_2$ als die noch unbestimmten Perspectiven der auf der Tafel senkrechten Seiten des Quadrats. Um ihre Länge zu bestimmen, müsste man den Punkt X'' mit dem Distanzpunkte verbinden, wodurch man die Diagonale des Quadrats erhalten würde. Da aber der Distanzpunkt zu weit entfernt ist, so kann man, wie in §. 335, die reducirte Distanz $P_2 d_2$ anwenden, welche der Hälfte von $O\alpha$ gleich ist; und verbindet man hierauf den Punkt α_2 mit d_2, so schneidet diese Gerade die $R'' P_2$ in demselben Punkte r'', durch welchen die von X'' ausgehende Diagonale gehen würde. Es ist nun leicht, das perspectivische Quadrat $X'' R'' r'' x''$, so wie die vordere Seite des Sockels $X'' R'' R''' X'''$ zu finden, welche, da sie in der Tafel liegt, ihre Dimensionen beibehält.

§. 455.

Man bemerke, dass die Curve $A'' B'' D'' E'' \ldots$ in jedem der Punkte B'', E'', e'', b'', welche den vier besonderen Punkten B, E, e, b (§. 451) entsprechen, eine Wendung nehmen muss. Denn weil in (E, E') der Sehstrahl den sichtbaren Umriss berührt, so muss die Krümmungsebene dieser Curve durch das Auge (O, O') gehen. Die Perspective dieser ganzen Ebene ist also die Gerade, in welcher sie die Tafel schneidet; und die Perspectiven der Bögen ED und EF, welche dem Punkte E vorangehen und folgen, müssen jenen Durchschnitt der Krümmungsebene zur Tangente haben. Bei einer windschiefen Curve nun liegt von diesen beiden Bögen ED und EF der eine jenseits der andere diesseits der Krümmungsebene (darst. Geom. §. 653); ferner sieht man hier, dass sie auf einerlei Seite der Vertikalebene OE liegen: mithin werden die Perspectiven $E'' D''$ und $E'' F''$ der Bögen ED und EF nicht eine Inflexion, sondern eine Wendung erster Art zeigen und werden zur zwischenliegenden Tangente den Durchschnitt der Krümmungsebene mit der Tafel haben. Taf. 24.

§. 456.

Um diese Tangente zu construiren, bemerke man, dass die Krümmungsebene für den Punkt (E, E') des sichtbaren Umrisses offenbar Berührungsebene an dem Sehstrahlenkegel und mithin auch an der Einziehung sein muss; sie wird desshalb auch die Tangente des Parallelkreises, nämlich die Gerade ($E\theta$, $E'\theta'$) enthalten. Da nun diese Linie die Tafel im Punkte (θ, θ') schneidet, welcher auf Fig. 3 dem Punkte θ'' entspricht, so ist also $E'' \theta''$ der Durchschnitt des Krümmungskreises mit der Tafel, also auch die Tangente am Wendepunkte E''.

§. 457.

Da der Sehstrahl $O' g'$ sich unterhalb des Strahls $O' A'$ befindet, so ist klar, dass, in der Perspective der obere Cylinder den Bogen $B'' A'' b''$ und einen kleinen Theil der Seitenäste des sichtbaren Umrisses verdecken muss; man kann es aber auffallend finden, dass sogar der Ast $E'' F'' e''$, der in der Figur punktirt angegeben ist, unsichtbar sein soll. Diess aber rührt daher, weil der Sehstrahl (OA, O'A'), indem er längs der Curve ABDEF... hinstreift, jenseits des Punktes E die Einziehung in einem Punkte schneidet, welcher demjenigen vorangeht, wo er sie berührt, so dass also der Berührungspunkt unsichtbar wird. Um sich

hievon zu überzeugen, denke man sich die Meridianellipse G'H'K' vollständig und durch ihre zweite Hälfte geschlossen, so wird diese Curve eine ringförmige Fläche beschreiben, ähnlich der des Wulstes auf Taf. 23; und legt man nun durch jeden Sehstrahl eine Vertikalebene, so entstehen Durchschnitte, die nach einander die Formen der Fig. 4, 5 und 6 (Taf. 23) annehmen, und an welchen der Sehstrahl immer Tangente ist in einem gewissen Punkte M und zugleich Secante in zwei Punkten α und β. Diese Curven lassen sich leicht construiren, wenn man nur die Punkte bemerkt, in welchen jede Vertikalebene die verschiedenen Parallelkreise der Umdrehungsfläche schneidet.

§. 458.

Taf. 23 u. 24. So lange nun der Berührungspunkt sich zwischen A und B befindet, haben die Sehstrahlen die durch die Geraden 1, 2, 3 bezeichneten Lagen, in welchen der Berührungspunkt M stets den Durchschnittspunkten α und β vorangeht und daher sichtbar bleibt *); je mehr aber M dem Punkte B sich nähert, desto mehr nähert α sich dem Punkte M, und es gibt eine durch die Gerade 4 bezeichnete Lage des Sehstrahls, in welcher α und M zusammen fallen. In dieser Lage findet zwischen der Durchschnittscurve und dem Sehstrahle, der sie in ihrem Inflexionspunkte berührt, eine Berührung zweiten Grades statt. Dieser Fall aber tritt ein, wenn M in B (*Fig.* 1) zu liegen kommt; denn es ist im §. 450 bewiesen worden, dass in diesem besondern Punkte der Sehstrahl eine Berührung zweiten Grades mit der Umdrehungsfläche, und folglich auch mit dem Durchschnitt, habe.

Es folgt hieraus, dass auf dem Fussgestelle der Bogen (AB, A'B') ganz sichtbar wäre, wenn nicht der obere Cylinder die nach diesem Bogen gehenden Sehstrahlen aufhielte.

§. 459.

Ist der Berührungspunkt zwischen B und E gekommen in Fig. 1, so nehmen die Sehstrahlen die Lagen 5, 6, 7 an, in welchen der Berührungspunkt M sich zwischen α und β befindet. Für diese Lagen müsste also der Bogen (BDE, B'D'E') unsichtbar werden, wenn nicht, wie im vorliegenden Falle, das äussere, durch die zweite Hälfte der Ellipse G'H'K' beschriebene Flächenstück weggenommen wäre, und somit auch der Punkt α, der den Punkt M auf den Geraden 5, 6, 7 verdecken würde. Je näher aber der Berührungspunkt dem Punkte E rückt, desto näher kommt auch der Durchschnittspunkt β dem Punkte M, und in der durch 8 bezeichneten Lage fallen β und M zusammen, und es findet hier wieder zwischen der Durchschnittscurve und dem Sehstrahle eine Berührung zweiter Ordnung statt, indem letzterer die erstere in ihrem Inflexionspunkte berührt. Dieser Fall aber tritt wirklich ein im Punkte (E, E') auf Taf. 24; denn es ist in §. 450 bewiesen worden, dass in diesem besondern Punkte der Sehstrahl eine Berührung zweiter Ordnung mit der Umdrehungsfläche, und mithin auch mit dem entsprechenden vertikalen Durchschnitte, habe. — Der Bogen (BDE, B'D'E') bleibt also auf dem Fussgestelle sichtbar.

§. 460.

Hat der Sehstrahl den Punkt E' überschritten, so nimmt er bis F nach einander die durch die Geraden 9, 10, 11 angedeuteten Lagen an, in welchen der Berührungspunkt M sich jenseits der Durchschnittspunkte

*) Die Richtung der Sehstrahlen in den Figuren 4, 5, 6 ist sehr verschieden angenommen worden, weil es mühsam gewesen wäre Durchschnittscurven zu construiren an Form ähnlich und an Grösse, auch für die nächstaneinanderliegenden Sehstrahlen, ungleich. So aber konnten auch die Berührungspunkte besser von den Durchschnittspunkten unterschieden werden.

β und α befindet, und wenn auch der letztere α nicht wirklich auf dem Fussgestelle existirt, indem das äussere Flächenstück weggenommen ist, so reicht doch der andere auf dem innern Flächenstücke liegende Durchschnittspunkt β hin, den Berührungspunkt M unsichtbar zu machen, so lange der Sehstrahl über den Bogen EF und auch über eF hinstreift. Daher kommt es denn, dass auf der perspectivischen Tafel der Bogen E''F''e'' des sichtbaren Umrisses geometrisch unsichtbar ist. — In der Wirklichkeit tritt diese Unsichtbarkeit nicht gleich mit dem Punkte (E, E') ein, weil die Sehstrahlen, welche die Einziehung längs des Bogens (BDE, B'D'E') berührt haben, auf den untern Theil der Fläche fallen, und daselbst eine Durchschnittscurve bilden, welche sich an die Berührungslinie BDE anschliesst, wie solches in einem der folgenden Paragraphen (§. 467) wird gezeigt werden.

Perspective eines Wulstes.

§. 461.

Die vorige Aufgabe bot das merkwürdige Beispiel einer Fläche mit entgegengesetzten Krümmungen, auf welcher der wahre sichtbare Umriss, in physischer Beziehung genommen, nur aus gewissen Stücken der Berührungslinie des um die Fläche beschriebenen Kegels bestand, der seine Spitze im Gesichtspunkte hatte. Um aber diesen interessanten Umstand noch besser und hauptsächlich in rein geometrischer Beziehung untersuchen zu können, muss man eine ringförmige vollkommen geschlossene Fläche anwenden, und auf derselben nicht nur die Berührungslinien, sondern zugleich auch die Durchschnittslinien construiren, welche der Fläche und dem umschriebenen Kegel gemeinschaftlich sind. Man betrachte daher die auf den Tafeln 25 und 23 dargestellte Fläche, welche entstanden ist durch die Umdrehung eines Kreises um eine Gerade, welche in seiner Ebene aber ausserhalb der Kreislinie liegt. Die Endpunkte des vertikalen Durchmessers dieses kreisförmigen Meridians beschreiben zwei horizontale Kreislinien, welche die ganze Umdrehungsfläche in zwei Theile theilen, deren einer, äusserer durchaus convex, der andere, innere aber von entgegengesetzter Krümmung ist. Die Gesimstheile, welche häufig in der Architektur unter dem Namen Wulst, Viertelsstab, Hohlkehle, Anlauf, Einziehung vorkommen, sind nichts anderes als Theile der hier betrachteten ringförmigen Fläche.

§. 462.

Ist (O, O') der Gesichtspunkt, so erhält man den sichtbaren Umriss auf dem äusseren Flächentheile nach der Methode des §. 441, welche hier kurz noch einmal angegeben werden soll. Man wähle irgend einen Parallelkreis P'Q', ziehe an den entsprechenden Punkt des Meridians die Tangente Q'T', welche die Horizontalebene O'Z' in (T', T) schneidet; und beschreibt man hierauf mit dem Halbmesser CT einen Kreis, so schneidet dieser den Halbkreis CJO im Punkte J. Der Halbmesser CJ aber schneidet die Horizontalprojection des Parallelkreises P'Q' in einem Punkte p; und projicirt man diesen in p', so gehören der Punkt (p, p') und der symmetrisch gelegene (p'', p') der gesuchten Curve an. Taf. 25.

Man erhält unmittelbar noch zwei andere Punkte (v, v') und (v'', v') derselben Curve, wenn man aus T' die Tangente T'R' zieht, durch welche der Parallelkreis R'V' bestimmt wird, dessen Horizontalprojection (§. 443) die Verlängerungen der Halbmesser Cp und Cp'' in den gesuchten Punkten v und v'' schneidet.

§. 463.

Die auf dem Aequator liegenden Punkte (δ, δ') und (δ'', δ') liefert der Durchschnitt dieses Aequators mit dem Kreise CJO; und die Punkte (H, H'), (K, K') erhält man, indem man an den Hauptmeridian die

Tangenten O'H' und O'K' zieht. Wenn man endlich, wie in §. 445, aus Z' äussere Tangenten an eben diesen Meridian zieht, und die Berührungspunkte in den Meridian CC' zurückführt, so erhält man die zwei Punkte (L, L') und (L'', L'), welche ebenfalls dem sichtbaren Umrisse angehören, nämlich der Curve

$$(\mathrm{H p \delta L v K v'' L'' \delta'' p'' H, H' p' \delta' L' v' K'}).$$

§. 464.

Den sichtbaren Umriss auf dem innern Theile der Fläche kann man auf eine ähnliche Art bestimmen, nur muss man die Tangenten an den der Axe C'Z' am nächsten liegenden Halbkreise des Meridians ziehen. Will man jedoch die bereits ausgeführten Constructionen anwenden, so muss man die beiden Parallelkreise wählen, welche durch die inneren aus dem schon benützten Punkte T' gezogenen Tangenten bestimmt werden; alsdann erhält man, wie leicht einzusehen, aus den Durchschnitten dieser Parallelkreise mit den Halbmessern Cp und Cp'' die vier Punkte (m, m'), (m'', m'), (n, n'), (n'', n'). Die auf dem Kehlkreise liegenden Punkte (D, D') und (d, D') sind unmittelbar gegeben durch den Durchschnitt dieses Kreises mit dem Halbkreise CJO; und die Punkte (A, A'), (F, F') erhält man, indem man aus O' zwei Tangenten an den innern Meridian zieht. Den Punkt l' endlich kann man durch die aus Z' an eben jenen Meridian gezogene Tangente finden. Somit erhält man für den sichtbaren Umriss des innern Flächentheils die Curve

$$(\mathrm{A m B D E n F n'' e d b m'' A, A' m' B' D' E' n' F'}),$$

§. 465.

Diese Curve enthält vier besondere Punkte (B, B'), (b, B'), (E, E') und (e, E'), in welchen der Sehstrahl nicht blos Tangente am Wulste, sondern auch am sichtbaren Umrisse ist, was sich wie in §. 447 u. f. erweisen lässt. Daraus aber ergeben sich auf der Perspective vier Wendepunkte, wie in §. 455 bewiesen worden ist.

§. 466.

Um diese Perspective auf die vertikale Tafel XYY' zu zeichnen, die zuerst nach X''Y'' versetzt und hierauf um letztere Gerade aufgeklappt wird, muss man verschiedene Sehstrahlen, wie (Oδ, O'δ') ziehen; da nun dieser Strahl die Tafel im Punkte (φ, φ') trifft, so nehme man $\varphi'' \delta_2$ gleich Yφ', um die Perspective δ_2 des Punktes (δ, δ') zu erhalten. Verfährt man eben so in Beziehung auf andere, besonders auf die oben angezeigten besonderen Punkte, so erhält man die Curve $H_2 \delta_2 K_2 \delta_3$ als Perspective des sichtbaren Umrisses auf der äussern und $A_2 B_2 D_2 E_2 F_2 e_2 d_2 b_2$ als Perspective des sichtbaren Umrisses auf der innern Wulstfläche.

Es wurde auf der Tafel auch noch die perspectivische Ellipse des horizontalen Kreises angegeben, der den obern Theil der Wulstfläche begrenzt, weil dieser Kreis häufig durch irgend eine vorspringende Verzierung oder als Anfang eines Säulenschaftes bemerklich wird.

§. 467.

Taf. 25. Man bemerke hier, dass die Sehstrahlen, welche die innere Wulstfläche in der Curve (AMB, A'M'B') berühren, im Allgemeinen auf den entgegengesetzten Theil dieser Fläche fallen und von ihm aufgehalten werden. Zieht man nämlich nach irgend einem Punkte (M, M') jener Curve einen Sehstrahl (OM, O'M'), und legt eine vertikale Ebene durch denselben, so schneidet diese den Wulst in einer Curve ($\varepsilon \lambda \gamma$, $\varepsilon' \lambda' \gamma' \lambda'' \varepsilon'$), die man erhält, indem man die Punkte, wie $\varepsilon, \lambda, \gamma$, in welchen die verschiedenen Parallelkreise der Fläche von jener Ebene geschnitten werden, auf die Vertikalebene projicirt; und verlängert man daher den Sehstrahl O'M'

bis zu seinem Durchschnitte mit jener Curve in α', so erhält man den Punkt (α, α'), in welchem der Sehstrahl den Wulst trifft. Verfährt man auf ähnliche Art in Beziehung auf andere Sehstrahlen, so erhält man eine Curve $(B\alpha Gb, B'\alpha' G')$, die genau in den beiden Punkten (B, B') und (b, B') anfängt und aufhört, wie gleich nachher wird bewiesen werden, und eben diese Curve ist es, welche in Verbindung mit BAb den wahren sichtbaren, in physischer Beziehung genommenen Umriss auf der innern Wulstfläche bildet, d. h. die Grenze der sichtbaren Theile: dieser neue Curvenast $B\alpha Gb$ vermehrt aber die perspectivische Darstellung auf der Tafel um nichts, weil die Punkte M und α in demselben Sehstrahle liegen und folglich einerlei Perspective haben.

§. 468.

Um die Beziehung, in welcher diese Durchschnittscurve $B\alpha Gb$ zu der Berührungscurve steht, deutlicher zu machen, und um die Anschliessungspunkte beider Curven und somit auch die Ausdehnung des einzigen sichtbaren Bogens BAb auf der Perspective genau zu bestimmen, muss man, wie auf Taf. 23 geschehen, sämmtliche Curven zeichnen, in welchen die ganze Wulstfläche von den Sehstrahlen berührt und geschnitten wird. Zu diesem Zwecke construire man, mittelst der in §. 467 angegebenen Methode, die beiden Schnitte $(\varepsilon\lambda\gamma, \varepsilon'\lambda'\gamma'\lambda'')$ und $(\varepsilon_2\lambda_2\gamma_2, \varepsilon'_2\lambda'_2\gamma'_2\lambda''_2)$, welche die Vertikalebene OM mit der ringförmigen Fläche macht, Taf. 23.
und bemerke, dass der Sehstrahl (OM, O'M') den einen jener Schnitte im Punkte (M, M') berührt, und den Fig. 1.
andern in zwei Punkten (α, α') und $(6, 6')$ schneidet. Aber die gegenseitige Lage dieser drei Punkte ändert sich bald; denn indem der Berührungspunkt (M, M') des Sehstrahls sich dem Punkte (B, B') nähert, nehmen die Schnitte nach und nach Formen an, analog denen der Figuren 4, 5, 6, und der Sehstrahl kommt in die durch die Geraden 1, 2, 3 angedeuteten Lagen. *) Der Durchschnittspunkt α kommt also dem Punkte M immer näher, und es giebt eine Lage 4, in welcher diese beiden Punkte zusammenfallen, und wo alsdann der Sehstrahl eine Berührung zweiten Grades mit der Durchschnittscurve hat, indem er diese in ihrem Inflexionspunkte berührt. Dieser Umstand aber muss genau im Punkte (B, B') stattfinden; denn im §. 459 ist bewiesen worden, dass in diesem besondern Punkte der Lichtstrahl eine Berührung zweiten Grades mit der Umdrehungsfläche und folglich auch mit dem entsprechenden vertikalen Schnitte habe. Hiedurch ist also bewiesen, dass der Ast $G\alpha B$ der Durchschnittscurve sich genau im Punkte (B, B') an die Berührungslinie AMB anschliesst.

§. 469.

Ist der Berührungspunkt des Lichtstrahls zwischen (B, B') und (E, E') angelangt, so nehmen die Sehstrahlen die Lagen 5, 6, 7 an, für welche der Punkt M zwischen die beiden Durchschnittspunkte zu liegen kommt. Hiedurch wird M unsichtbar für den Beobachter in (O, O') und somit ist also die Art gerechtfertigt, wie die Bögen A_2B_2 und $B_2D_2E_2$ auf der Perspective der Tafel 25 hinsichtlich der Punktirung dargestellt sind.

Man bemerke, dass in der Lage 6, wo der Punkt M in (D, D') auf dem Wulste angelangt ist, der Sehstrahl im Allgemeinen nicht mehr Tangente an dem Vertikalschnitte OD ist, weil die Ebene dieses Schnittes hier mit der Berührungsebene des Wulstes in (D, D') zusammenfällt, und also ihr Durchschnitt, der gewöhnlich die Tangente an der Durchschnittscurve ist, unbestimmt bleiben muss.

§. 470.

Je näher M dem Punkte E kommt, desto mehr nähert sich der Durchschnittspunkt 6 dem Punkte M, und endlich wird der Sehstrahl eine Lage 8 annehmen, welche der Lage 4 analog ist, indem die Punkte 6

*) Siehe die Anmerkung zu §. 458.

und M zusammenfallen, so dass also der Sehstrahl wieder eine Berührung zweiten Grades mit dem Durchschnitt hat. Diess geschieht genau im Punkte (E, E′), wie im §. 450 erwiesen worden, und folglich muss die Durchschnittscurve $Q\beta RE$ durch den Punkt E gehen.

§. 471.

Ist endlich der Berührungspunkt über (E, E′) hinausgerückt, so nehmen die Sehstrahlen nach und nach die Lagen 9, 10, 11 an, in welchen der Punkt M jenseits der beiden Berührungspunkte α und β zu liegen kommt, aus welchem doppelten Grunde er also für das Auge in (O, O′) unsichtbar sein muss. Hiedurch ist auch die Punktirung des Bogens $E_2F_2e_2$ auf der Perspective der Tafel 25 gerechtfertigt.

§. 472.

Taf. 23. Fig. 1. Vereinigt man nun durch einen stetigen Zug die Reihe der dem Punkte α analogen Punkte, die man in den verschiedenen Vertikalebenen, wie OM, erhalten hat; hierauf durch einen andern stetigen Zug die Reihe der dem Punkte β analogen Punkte, indem man zugleich bemerkt, dass dieselbe Vertikalebene OMM_2 zwei Sehstrahlen enthält, deren einer (OM, O′M′) den Wulst in α und β, und der andere $(OM_2, O'M'_2)$ ihn in α_2 und β_2 schneidet; so findet man, dass der um die innere Wulstfläche beschriebene Sehstrahlenkegel dieselbe in zwei Curven

$$(G\alpha BH\alpha_2KhbG,\ G'\alpha'B'H'K')\ \text{und}\ (Q\beta RE\beta_2PerQ,\ Q'\beta'R'E'P')$$

schneidet. Um die besondere Form dieses Kegels deutlicher zu machen, wurde sein horizontaler Grundschnitt STVUvt angegeben; dieser hat vier Wendepunkte, wie es auch schon bei der Perspective auf Tafel 25 der Fall gewesen.

§. 473.

Um die im vorigen Paragraphen angegebenen Curven mit Genauigkeit zeichnen zu können, ist es gut ihre Tangenten, besonders für die Wendepunkte, zu construiren. Da nun für den Punkt T die Berührungsebene am Kegel dieselbe ist, wie für den Punkt (B, B′), in welchem der Kegel den Wulst berührt, so darf man nur den horizontalen Grundschnitt φT der Berührungsebene für den Punkt (B, B′) des Wulstes suchen, so wird diese Gerade φT auch der Grundschnitt der Berührungsebene des Kegels längs der Erzeugenden (OBT, O′B′T), und folglich die Tangente der Curve STVU im Punkte T sein.

Was den Punkt (R, R′) der Durchschnittscurve betrifft, so erhält man seine Tangente, indem man die Tangente des Wulstes am Punkte (R, R′), deren Grundschnitt $\psi\theta$ ist, mit der Berührungsebene des Kegels längs der Erzeugenden (OR, O′R′) verbindet. Letztere Ebene aber hat zum Grundschnitte die Gerade $T\varphi$, welche von $\psi\theta$ im Punkte θ geschnitten wird; mithin ist $(\theta R, \delta' R')$ die Tangente an der Durchschnittscurve.

In Beziehung auf den Punkt (H, H′) verfährt man auf dieselbe Weise, indem man die Berührungsebene des Wulstes an (H, H′) mit der Berührungsebene des Kegels längs der Erzeugenden (OHE, O′H′E′) verbindet; letztere aber fällt mit der Berührungsebene des Wulstes an (E, E′) zusammen, und mithin ist es leicht ihren horizontalen Grundschnitt auf die gewöhnliche Art zu construiren. Man bemerke, dass letzterer Grundschnitt Tangente am Wendepunkte V der Curve STVU sein wird.

§. 474.

Was die Berührungscurve (ABDE..., A′B′D′E′...) betrifft, so kann ihre Tangente an irgend einem Punkte nicht mehr durch Combination der Berührungsebenen am Wulste und am umschriebenen Kegel gefunden

werden, weil diese für jeden Punkt jener Berührungscurve zusammenfallen. — Man kann aber, um die Aufgabe zu lösen, sich auf die im §. 448 angeführte Beziehung zwischen der Erzeugenden des Kegels und der Tangente an der Berührungscurve stützen, nach welcher man an den gegebenen Punkt des Wulstes das osculirende Hyperboloid construiren müsste, wie solches in §. 449 geschehen ist.

Das nämliche Hilfsmittel könnte man auch anwenden, um überhaupt die Tangente an der Berührungslinie zweier beliebigen Flächen, von denen aber eine entwickelbar sein müsste, zu finden; denn der Lehrsatz des §. 448 behält auch für diesen allgemeinen Fall noch seine Giltigkeit (Darst. Geom. §. 743).

§. 475.

Die Fig. 2 stellt ebenfalls die Berührungslinien und die Durchschnittslinien eines Wulstes mit einem um dessen innere Fläche beschriebenen Kegel dar, aber für den Fall, da der Sehstrahl (O A, O′A′) eine solche Neigung hat, dass er den entferntesten Theil des Wulstes nicht schneidet, so dass also der Blick in das Innere des leeren Raumes eindringen kann. Alsdann ist der horizontale Grundschnitt des Kegels eine Curve STVUvtS, deren oberer und unterer Ast sich in den Punkten ω und π kreuzen. Die beiden Aeste BαG, RβG der Durchschnittscurve in Fig. 1 vereinigen sich hier in Fig. 2 zu einem einzigen Aste RQB. Eben so vereinigen sich auch die beiden Aeste Dβ_2P und Hα_2K der Fig. 1, in Fig. 2 zu einem einzigen DPH. Aehnliche Modificationen treten ein für die anderen unterhalb des Durchmessers FCA befindlichen Hälften dieser Curven. Taf. 23. Fig. 2.

Man bemerke ferner, dass, in diesem Falle, das Stück QFq des sichtbaren Umrisses in der Perspective der Tafel 25 sichtbar werden würde, weil die beiden Aeste dieser Perspective sich auf eine ähnliche Art kreuzen würden, wie die Aeste des horizontalen Grundschnittes STVUvt in Fig. 2 der Tafel 23. Die Perspective wird übrigens für diesen Fall auf dieselbe Art construirt wie in §. 466.

Sechstes Kapitel.

Perspective der Schatten.

§. 476.

Alle Gegenstände in der Natur zeigen dem Blicke des Beobachters helle oder erleuchtete und wieder mehr oder weniger dunkle Stellen. Soll nun durch eine Perspective ein gegebener Gegenstand getreu dargestellt werden, so muss dieselbe nicht nur den sichtbaren Umriss und die dem Gegenstande zugehörigen bemerkenswerthesten Linien und Punkte enthalten, sondern sie muss auch die Licht- und Schattengrenzen und die verschiedenen durch den Gegenstand erzeugten Schlagschatten angeben. Die allgemeine Methode nun, welche für etwas verwickelte Formen zugleich die einzig strenge ist, besteht darin, dass man zuerst, nach den Regeln des ersten Abschnitts, die Projectionen dieser verschiedenen Schattenlinien auf zwei fest angenommenen Grundebenen sucht, hierauf Sehstrahlen nach allen Punkten dieser Linien zieht und endlich die Durchschnitte dieser Strahlen mit der Tafel sucht, wodurch sodann die Perspective der Schatten bestimmt wird. Die Anwendung dieser allgemeinen Methode wird hier durch die Darstellung zweier Gegenstände erläutert werden, für welche schon früher sowohl die Projection der Schatten als auch die des sichtbaren

Umrisses, doch jede besonders, construirt worden ist, so dass es also für den Leser, da ihm die Einzelnheiten dieser Constructionen zum Voraus bekannt sind, nur noch einiger kurzen Andeutungen bedarf.

Perspective eines Fussgestelles mit seinen Schatten.

§. 477.

Taf. 26. Der Gesichtspunkt ist (O, O′) und als Tafel dient die auf dem Meridian OC senkrechte Ebene XY. Die vertikale Projectionsebene oder die Grundlinie K″Y′ wurde senkrecht auf der Tafel XY stehend angenommen, weil auf diese Art die Punkte, in welchen die Tafel von den Sehstrahlen getroffen wird, leicht zu construiren sind; man wählt desshalb auch immer diese Anordnung, wenn nicht überwiegende Vortheile eine Aenderung derselben rathsam machen.

§. 478.

Auf der Einziehungsfläche stellt sich der sichtbare Umriss als die geschlossene Curve (ABDEFedbA, A′B′D′E′F′) dar, welche wie im §. 442 construirt wird. Um nun hieraus die Perspective auf der nach $X_2 Y_2$ versetzten Tafel zu finden, darf man nur (§. 452) auf letzterer die Vertikale $\alpha_2 z_2$ beliebig ziehen, und hierauf, nachdem man einen Sehstrahl (OB, O′B′) gezogen, der die Tafel in (β, β) schneidet, den Punkt B_2 auf der Horizontalen $\beta' B_2$ so nehmen, dass seine Distanz von der vertikalen Axe $\alpha_2 z_2$ gleich $\alpha\beta$ sei. Ebenso verfährt man in Beziehung auf die 8 besonderen, in §. 452 bezeichneten Punkte, welche zur Zeichnung der Perspective

$$A_2 B_2 D_2 E_2 F_2 e_2 d_2 b_2 A_2$$

des sichtbaren Umrisses hinreichend sind. Diese Perspective enthält vier Wendepunkte.

Was die beiden Cylinder betrifft, welche die obere Einfassung und die Basis des Fussgestelles bilden, so findet man ihre Perspectiven auf eine ähnliche Art, indem man nur die vier Scheitelpunkte jeder Ellipse sucht, §. 453.

§. 479.

Es sei nun (CS, C′S′) die Richtung der Lichtstrahlen, welche das Fussgestelle erhellen und welche alle parallel mit einander angenommen werden. Man findet nach §. 97 als Licht- und Schattengrenze auf der Einziehung die Curve

(N′M′a′L′m′n′, NMaLn).

Der obere Theil derselben aber wird überdeckt durch den Schatten m′P′M′, den die Einziehung auf die Einfassung wirft (§. 103), während der untere Theil überflüssig und ersetzt wird durch die Schatten (NQ, N′Q′), (nq, n′q′), welche die Einziehung auf sich selbst wirft (§. 105).

Die Perspectiven dieser verschiedenen Curven, welchen auf der Tafel $X_2 Y_2$ analoge Buchstaben entsprechen, werden durch die allgemeine Methode des §. 478 construirt, wobei man sich hauptsächlich an die besonderen Punkte zu halten hat, wie an L′, der dem sichtbaren Umrisse und der Schattengrenze gemeinschaftlich ist; an m′ und M′, wo die Schattengrenze von der Schattenlinie der Einfassung geschnitten wird, und an P′, als dem höchsten Punkte dieser Schattenlinie.

Man bemerke hier, dass die Perspective der Licht- und Schattengrenze auf der Einziehung zwei **Knoten** und keine Wendepunkte bildet.

§. 480.

Was die Schlagschatten auf der Horizontalebene betrifft, so erhält man sie (§. 101, 102), indem man die Lichtstrahlen, welche die Einziehung und die beiden Kreise des cylindrischen Bandes G′ G″ g′ g″ streifen, bis zu jener Ebene verlängert. Letzere Strahlen schneiden die Horizontalebene in zwei Halbkreisen, welche durch zwei gemeinschaftliche Tangenten U V und u v mit einander verbunden sind, und deren Perspectiven nach (§. 478) erhalten werden. Man construire hauptsächlich den Punkt γ_2, wo die Tangente vertikal, und den Punkt δ_2, wo sie horizontal an der Ellipse ist. Den ersten erhält man, indem man den S ehstrahl O Y γ als Tangenten an den Halbkreis V γ ν zieht; denn die Vertikalebene O Y γ berührt den Kegel der nach jenem Halbkreise gezogenen Sehstrahlen und schneidet also die Tafel X Y in einer Vertikalen Y, welche auf der versetzten Tafel sich als $Y_2 \gamma_2$ darstellt. Um den höchsten Punkt δ_2 zu erhalten, suche man die Perspective des Punktes δ, in welchem die Tangente $\delta\,\delta'$ parallel mit X Y ist; denn die Berührungsebene am Sehstrahlenkegel längs der Erzeugenden O δ schneidet die Tafel X Y in einer Horizontalen, welche Tangente am Punkte δ_2 sein wird; dieser Punkt muss also der höchste der perspectivischen Ellipse sein.

§. 481.

Der Schlagschatten, den die Einziehung auf die Horizontalebene wirft, ist eine Curve mit vier Wendepunkten (§. 114), von der in der Perspective auf der Tafel X_2 Y_2 aber nur ein sehr kleiner Bogen sichtbar wird. Der Schlagschatten endlich, den die cylindrische Basis des Fussgestelles auf die Horizontalebene wirft, ist ein Halbkreis, der von zwei mit C S parallelen Tangenten begleitet wird. Um denjenigen Punkt ε_2 der Perspective dieses Halbkreises zu finden, in welchem die Tangente vertikal ist, ziehe man den Sehstrahl O $\varphi\,\varepsilon$ als Tangente an den Schattenhalbkreis und construire die Perspective des Punktes ε nach der allgemeinen Methode.

Perspective eines Kapitäls und seiner Schatten.

§. 482.

Da dieses Kapitäl ganz demjenigen ähnlich ist, welches bereits in §. 116 behandelt wurde, so ist es unnöthig, die Aufzählung der verschiedenen Gesimstheile, aus denen es besteht, zu wiederholen. Man bemerke nur, dass die vertikale Projectionsebene C′ Y′ hier keiner der vier Seitenflächen der Deckplatte (*larmier*) parallel ist, weil jene Ebene senkrecht auf der zur Aufnahme der Perspective bestimmten Tafel X Y stehen sollte, die man in einer beliebigen Entfernung von dem Kapitäl genommen hat. Der Augpunkt ist in (O, O′), d. h. man hat die Horizontalebene durch das Auge des Beobachters gelegt, um durch die gegebenen Stücke der Aufgabe nicht zu viel Raum in Anspruch nehmen zu müssen. Taf. 27.

§. 483.

Man ziehe nun nach einer Ecke der Deckplatte den Sehstrahl (O B, O′ B′) und verlängere ihn, bis er die Tafel X Y im Punkte (β, β') schneidet. Um nun diesen Durchschnittpunkt auf der nach X_2 Y_2 versetzten Tafel zu erhalten, errichte man die Vertikale $P_2\,\beta_2$ gleich der Höhe Y′ β' und ziehe die Horizontale β_2 B_2 gleich der Distanz P β, so erhält man den Punkt B_2 als Perspective der Ecke (B, B′) der Deckplatte. Verfährt man ebenso mit den übrigen Ecken A, D, E, und mit den verschiedenen geradlinigen Umrissen, welche das Kapitäl darbietet, so erhält man leicht die Perspective dieses ganzen obern Theiles.

§. 484.

Um diejenigen geradlinigen Umrisse, welche zu zweien parallel sind, genauer und auch in kürzerer Zeit zeichnen zu können, ist es gut, wenn man sich die Fluchtpunkte F und f verschafft, in welchen alle jene Perspectiven zusammenlaufen, und welche hier über das Zeichenblatt hinausfallen. Man ziehe zu diesem Zwecke aus O, parallel mit B A und B D, zwei Sehstrahlen, welche die Horizontlinie X P Y in zwei Punkten schneiden; misst man hierauf die Distanzen dieser Punkte vom Hauptpunkte P und trägt sie von P_2 nach f, und von P_2 nach F, so erhält man die gesuchten Fluchtpunkte.

§. 485.

Nun gehe man an diejenigen Theile des Kapitäls, welche durch Umdrehungsflächen begrenzt werden, und betrachte zuerst den als cylindrisch vorausgesetzten Schaft der Säule. Man lege an diesen Cylinder die beiden Berührungsebenen O X und O Y, welche die Tafel in den Vertikalen X und Y schneiden; trage hierauf die Distanzen P X und P Y von P_2 nach X_2 und Y_2 und errichte in letzteren Punkten Vertikalen, so bilden diese die Perspective des sichtbaren Umrisses und auch des Halses der Säule.

§. 486.

Auf dem Viertelsstabe besteht der sichtbare Umriss fürs Erste aus einem Kreisbogen (G H g, G′ H′), welcher durch die beiden Tangenten OG, Og bestimmt wird und eine Halbellipse G_2 H_2 g_2 zur Perspective hat, zu deren Construction die drei nach dem allgemeinen Verfahren des §. 483 erhaltenen Scheitelpunkte hinreichen. Der übrige Theil des sichtbaren Umrisses wäre eine Berührungslinie, ganz derjenigen ähnlich, welche in §. 462 auf der äussern Fläche des Wulstes gefunden worden, und welche nach dem dortigen Verfahren genau construirt werden könnte. Da aber hier nur zwei sehr kleine Bögen derselben sichtbar werden, so braucht man nur den tiefsten Punkt I_2 zu construiren, indem man den Sehstrahl O′ I′ als Tangente an den Meridian des Viertelstabes zieht. Mittelst dieses Punktes I_2 und der Anschliessungspunkte G_2, g_2 kann man alsdann die sichtbaren Theile der Curve G_2 I_2 g_2 hinreichend genau zeichnen.

§. 487.

Auf den Viertelsstab folgt ein cylindrischer Reif, dessen beide kreisförmige Grundlinien zu Perspectiven zwei Ellipsen haben, die man leicht nach den vorherigen Angaben construiren kann. Eben so den untern Kreis der Hohlkehle und den obern Kreis des Halses; nur auf der Hohlkehle kommen zwei kleine Bogen vor, welche dem sichtbaren Umrisse auf der Einziehung des Fussgestelles (§. 441) analog sind, und die man, wie dort, genau construiren könnte. Da aber diese Bögen sehr klein sind und die scheinbare Helle auf dieser Fläche mit entgegengesetzten Krümmungen schnell abnimmt und erlischt, so kann man diese kleinen Bögen nach dem blossen Auge zeichnen, indem man sie zu Berührungslinien an den beiden Scheitelpunkten der Ellipse macht.

§. 488.

Auf dem Wulste des Astragals wird der scheinbare Umriss durch eine Berührungslinie gebildet, die man nach §. 462 construiren kann. Man braucht aber die Projectionen dieser Curve nicht zu zeichnen, sondern nur die vier Scheitelpunkte der Perspective x_2 z_2 y_2 zu construiren, die man unmittelbar erhält, wenn man Sehstrahlen zieht, welche den Aequator und den Meridian dieses kleinen Wulstes berühren. Was endlich

den cylindrischen Riemen und den Ablauf (*congé*) betrifft, womit das Astragal endigt, so verfährt man wie bei der Hohlkehle (§. 487).

§. 489

Wegen Darstellung der Schattenlinien zuerst in ihren Projectionen, könnte auf die §§. 124 . . . 133 verwiesen werden; gleichwohl folgt hier eine kurze Andeutung des Verfahrens. Die Lichtstrahlen sind alle der Geraden (C S, C′ S′) parallel, und diejenigen, welche die horizontale Kante (A B, A′ B′) der Deckplatte bestreifen, bilden eine Ebene, deren vertikalen Grundschnitt Q′ R′ man leicht erhält, indem man durch den Punkt (P, P′) eine Gerade (P Q, P′ Q′) parallel mit (C S, C′ S′) zieht. Wendet man hierauf verschiedene schneidende Horizontalebenen an, so schneidet jede derselben die Schattenebene Q′ R′ in einer mit (A B, A′ B′) parallelen Geraden, und den Viertelsstab in einen Kreis von bekanntem Halbmesser; der Durchschnitt jener Geraden und dieses Kreises in der Horizontalprojection liefert daher zwei Punkte des Schattens (L K l, L′ K′ l′), welchen die Kante (A B, A′ B′) der Deckplatte auf den Viertelsstab wirft. Auf die nämliche Weise erhält man auch die Schlagschatten dieser Kante auf den anderen Theilen des Kapitäls, welche alle durch Umdrehungsflächen begrenzt werden; die höchsten oder tiefsten Punkte dieser verschiedenen Curven aber liegen immer in dem auf A B senkrechten Meridian C U. Um diese Punkte zu finden, darf man also nur die Gerade, in welcher die Schattenebene Q′ R′ von dem Meridian C U geschnitten wird, auf die Vertikalebene C P aufklappen. Taf. 27.

Der Schatten, den die untere Kante (a b, a′ b′) auf die Deckplatte wirft, ist eine horizontale Gerade, die man leicht findet, indem man den Punkt sucht, in welchem der von (a, a′) ausgehende Lichtstrahl von der Vertikalebene A B geschnitten wird. Verlängert man den nämlichen Strahl bis zur Vertikalebene A E, so erhält man auch einen Punkt des Schlagschattens auf dieser letztern Seitenfläche der Deckplatte.

§. 490.

Auf dem Viertelsstabe ist eine Licht- und Schattengrenze vorhanden, welche nach §. 128 construirt wird, indem man sich hauptsächlich an die beiden auf dem Aequator liegenden Punkte und an den tiefsten Punkt (M, M′) hält, welche nach §. 130 unmittelbar gefunden werden können. Hierauf ziehe man die Perspective $L_2 M_2 l_2$, indem man das Verfahren des §. 483 auf die drei Punkte (L, L′), (M, M′), (l, l′) anwendet, was hier hinreichend ist. Zwei von diesen Punkten gehören auch der Curve $L_2 K_2 l_2$ an, deren Punkt K_2 man aus dem höchsten Punkte (K, K′) des von der Deckplatte auf den Viertelsstab geworfenen Schattens erhält. Man bemerke, dass die Tangenten an den beiden Punkten M_2 und K_2 der Perspectiven in dem Fluchtpunkt f zusammen laufen müssen, als Tangenten, welche, im Raume, der Geraden (A B A′ B) parallel sind.

§. 491.

Die Lichtgrenze L′ M′ wirft Schatten auf den untern Reif und die Hohlkehle; diese und alle folgenden Schattenlinien werden wie in den §§. 135, 136, . . . bestimmt, und aus ihnen sofort nach dem allgemeinen Verfahren des §. 483 ihre Perspectiven abgeleitet.

§. 492.

Abgekürzte Methode. Das vorhergehende Verfahren erfordert ausser der Tafel noch zwei andere Ebenen, auf denen zuerst die Projectionen der Schattenlinien bestimmt werden müssen, aus welchen letzteren sodann ihre Perspectiven abgeleitet werden. Man kann aber die Perspectiven auch unmittelbar, mit Umgehung der Projectionen und mit Anwendung einer einzigen Ebene, der Tafel, erhalten. Die Methode, welche diesen

Vortheil gewährt, ist leicht anzuwenden, wenigstens auf Körper, die, im vertikalen Sinne genommen, geradlinige Umrisse haben. Ein Beispiel dieser Art bietet der folgende Paragraph.

§. 493.

Taf. 28. Fig. 1. Der Gegenstand ist ein cylindrischer Säulenschaft, der auf einem quadratischen Sockel ruht. Eine der Seitenebenen AB B'A' dieses Sockels ist parallel mit der Tafel, welche X Y zur Grundlinie, P D zur Horizontlinie, P zum Hauptpunkte und D zum Distanzpunkte hat. Man erhält die Perspective des Sockels nach §. 290, indem man auf der Tafel seine Breite X Y, seine Höhe X X' anmerkt, und Y G gleich seiner Entfernung von der Tafel nimmt; denn die Linie G D, welche eine unter 45° gegen die Tafel geneigte Herizontale darstellt, schneidet die Seiten Y P und X P in den beiden Ecken B und E, welche zur Vollendung des untern Quadrats A B C E hinreichen, aus welchem sofort auch das obere abgeleitet wird.

Was den vertikalen Cylinder betrifft, dessen Basis ein Kreis von gegebenem Halbmesser ist, so ziehe man zuerst die Perspective des um diesen Kreis beschriebenen Quadrates, indem man die Grundlinie der Tafel durch X' gezogen annimmt; hierauf schreibe man in dieses perspectivische Quadrat eine Ellipse ein, und ziehe an diese zwei vertikale Tangenten, welche den sichtbaren Umriss des Cylinders bilden. Die obere Basis erhält man auf eine ähnliche Art, indem man eine in der absoluten Höhe des Cylinders auf der Tafel gezogene Gerade als Grundlinie annimmt.

§. 494.

Man bestimme nun die allen Lichtstrahlen gemeinschaftliche Richtung durch die Horizontalprojection O φ des durch den Augpunkt gehenden Lichtstrahles und durch seine Neigung ω gegen den Horizont. Hiebei wurde angenommen die Projection O φ sei auf der Horizontebene, deren Grundlinie D P ist, gemacht worden. Da aber diese Ebene um D P aufgeklappt worden, so kam der Augpunkt in O zu liegen, so dass die Entfernung P O = P D. Hieraus folgt, dass φ der Fluchtpunkt aller der Geraden ist, welche parallel sind mit den horizontalen Projectionen der Lichtstrahlen; während der Fluchtpunkt φ' dieser Strahlen selbst irgendwo in der Vertikale $\varphi \varphi'$ liegen muss. Um letzern Punkt zu finden, klappe man um die Vertikale $\varphi \varphi'$ in die Tafel das rechtwinklinge Dreieck auf, das zur Hypotenuse den durchs Auge gehenden Lichtstrahl hat, indem man $\varphi O'' = \varphi O$ nimmt und eine Gerade $O'' \varphi'$ zieht, welche mit dem Horizonte den gegebenen Winkel ω macht. Diese Aufklappung des Lichtstrahls schneidet die Vertikale $\varphi \varphi'$ in dem gesuchten Punkte φ'.

§. 495.

Um nun den Schatten zu erhalten, den diejenige Ecke des Sockels auf den Grundriss wirft, welche auf der Tafel durch B' bezeichnet ist, bemerke man, dass der Lichtstrahl, welcher durch diese Ecke geht, B' φ' zur Perspective hat, während die Perspective der horizontalen Projection eben jenes Lichtstrahls B φ ist, nach dem, was im vorigen Paragraph über die Fluchtpunkte derjenigen Linien gesagt wurde, welche jenen beiden, wohl zu unterscheidenden Richtungen parallel sind. Mithin ist der Punkt b, in welchem die Geraden B φ und B' φ' sich schneiden, der Ort, in welchem letzterer Lichtstrahl den Grundriss trifft, und also ist die Gerade B' b der von der vertikalen Kante B B' geworfene Schatten. Ebenso erhält man als Schlagschatten der Ecke C' den Durchschnitt c des Lichtstrahls C' φ' und seiner horizontalen Projection C φ, und mithin als Schlagschatten der horizontalen Kante B' C' die Gerade b c, welche nach P laufen muss. Denn sie stellt eine auf der Tafel senkrechte Gerade dar, weil sie der Durchschnitt des Grundrisses mit der durch die Kante B' C'

gehenden Schatten-Ebene ist, welche selbst senkrecht auf der Tafel steht. Der Schlagschatten der Kante C′ E′ endlich ist eine mit X Y parallele Gerade c e; ein Theil dieser Linie aber ist unsichtbar, so wie auch der von der Vertikalen E E′ verursachte Schatten.

§. 496.

Was den Cylinder betrifft, so ziehe man aus dem Punkte φ zwei Tangenten an die Ellipse, welche ihm zur Basis dient. Diese Tangenten stellen alsdann die Grundschnitte auf der Ebene A′ B′ C′ E′ dar, welche von zwei mit den Lichtstrahlen parallelen Berührungsebenen gebildet werden, und die Vertikalen M M′ und N N′ bilden die Licht- und Schattengrenze auf dem Cylinder. Das Stück M R des ersten Grundschnitts ist der Schatten, den ein Theil der Erzeugenden M M′ auf den Sockel wirft. Der übrige Theil dieser Erzeugenden wirft seinen Schatten auf den Grundriss in einer Geraden p m′ φ, deren ersten Punkt man findet, wenn man den Lichtstrahl R φ' zieht, der die b c in p schneidet. Den Endpunkt m′ eben jener Schattenlinie erhält man mittelst des Lichtstrahles M′ m′ φ'. Auf ähnliche Art findet man den Schatten q n′ φ, welchen die Erzeugende N N′ auf die Grundrissebene wirft. Beide Schattenlinien müssen durch einen Ellipsenbogen m′ r′ n′ verbunden werden, den man mittelst der schon bekannten, auf die verschiedenen Punkte des Bogens M′ R′ N′ angewendeten Operationen erhält.

§. 497.

Die hier auf vertikale Prismen und Cylinder angewendete Methode ist weit nicht mehr so einfach, wenn die darzustellenden Körper von Umdrehungsflächen begrenzt werden, deren Meridiane nicht geradlinig sind. Als Beispiel diene die Vase, fig. 2, von welcher in einer besondern Figur ein genaues Profil gegeben sein muss (Tafel 4), damit man den Durchmesser dieses oder jenes in gegebener Höhe liegenden Parallelkreises messen könne.

Es sei P der Hauptpunkt auf der Tafel, D der Distanzpunkt, φ' der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen und φ der Fluchtpunkt ihrer horizontalen Projectionen. Man ziehe eine Grundlinie X″ Y″ in beliebiger Höhe. Denkt man sich nun durch diese Linie eine Horizontalebene gelegt, so schneidet solche die Vase in einem Kreise, dessen Durchmesser man erhält, wenn man auf der Profilebene eine Horizontale in derselben Höhe zieht wie X″ Y″. Die Entfernung dieses Kreises von der Tafel ist auch bekannt, da die Entfernung dieser letztern von der Umdrehungsaxe gegeben ist. Hienach ist es leicht, nach §. 378, die Perspective $\alpha\beta\gamma\varepsilon$ dieses Kreises zu zeichnen, und man findet zugleich auch die Perspective c′ seines Mittelpunkts, welche von dem Mittelpunkte ω der Ellipse verschieden ist. Taf. 28. Fig. 2.

Construirt man auf diese Weise die Perspectiven A L B, $\alpha\beta\gamma$, E N K mehrerer horizontaler, in verschiedenen Höhen gemachter Schnitte und zeichnet zuletzt die Umhüllungscurven A G E und B H K aller jener Perspectiven, welche sämmtlich Ellipsen sind, so erhält man den scheinbaren Umriss der Umdrehungsfläche. Dasselbe Verfahren lässt sich auch auf die anderen Theile der Vase anwenden.

§. 489.

Was nun die Schattenlinien betrifft, so denke man sich um die Fläche längs des Parallelkreises $\alpha\beta\gamma\varepsilon$ einen Umdrehungskegel beschrieben. Um die Spitze dieses Kegels, welche T heissen mag, zuerst auf dem Profil zu bestimmen, ziehe man eine Tangente an den Meridian und zwar durch den Punkt desselben, welcher auf dem fraglichen Parallelkreisse liegt. Nun ist es leicht auch die Perspective T′ dieser Spitze zu construiren, weil sie auf der Umdrehungsaxe und in einer bekannten Höhe liegt. Nach §. 128 aber handelt es sich jetzt darum, an diesen Kegel eine Berührungsebene zu legen, welche den Lichtstrahlen parallel sei.

Man ziehe desshalb durch die Spitze T' einen Lichtstrahl, dessen Perspective $T'\varphi'$ sein wird, während $c'\varphi$ offenbar die Perspective seiner Horizontalprojection auf der Ebene $\alpha\beta\gamma\varepsilon$ ist. Der Punkt R nun, in welchem diese beiden Geraden sich schneiden, ist der Durchschnittspunkt des Lichtstrahls mit der Ebene des Parallelkreises; man darf daher nur aus R die Tangente RM an die Ellipse $\alpha\beta\gamma$ ziehen, um einen Punkt M der Licht- und Schattengrenze LMN auf der Perspective der Vase zu erhalten.

§. 499.

Um den Schatten zu finden, welchen der Punk M auf die Grundrissebene wirft, ziehe man zuerst den Lichtstrahl $M\varphi'$; hierauf suche man die Perspective m der Horizontalprojection desjenigen Punktes der Vase, welcher auf der Tafel durch M dargestellt ist; alsdann ist $m\varphi$ die Perspective der Projection des Lichtstrahles $M\varphi'$, und der Durchschnitt dieser beiden Geraden liefert den Punkt q des Schlagschattens.

Den Punkt m kann man auf folgende Art finden: Man ziehe in dem Parallelkreise $\alpha\beta\gamma$ den Durchmesser $MC'F$, dessen Fluchtpunkt F in der Horizontlinie liegt, und verbinde hierauf diesen Punkt mit dem perspectivischen Mittelpunkte c des untern Quadrats am Sockel. Den Punkt c erhält man aus dem Durchschnitte einer der Diagonalen des Quadrats mit der vertikalen Axe $Pc'T'$. Nun ist Fcm die Perspective der Horizontalprojection des Durchmessers $Fc'M$, und aus dem Durchschnitte dieser Perspective mit der Vertikalen Mm ergibt sich endlich die Perspective m der Projection des Punktes M.

§. 500.

Wenn der Schatten des Punktes M auf eine andere Fläche als die des Grundrisses fiele, so müsste man diese Fläche mit einer durch den Lichtstrahl $M\varphi'$ gelegten Ebene schneiden, welche letztere zur Perspective ihres horizontalen Grundschnitts die Gerade $m\varphi$ hätte. Wenn man nun die Perspective des Schnittes construirte, so würde diese von $M\varphi'$ in dem gesuchten Punkte geschnitten werden. So müsste man verfahren, um die Schlagschatten auf den beiden Fussgestellen dieser Vase zu erhalten. Man sieht aber, dass alsdann die hier angewendete Methode ziemlich verwickelt würde, und überdiess wenig Genauigkeit gewährte, weder in Bestimmung der Berührungspunkte, wie M, noch in Aufsuchung der Wendepunkte, welche auf solchen Flächen mit entgegengesetzten Krümmungen vorkommen. Wenn es sich desshalb um die Darstellung solcher verwickelterer Formen handelt, und die Zeichnung mit mehr Genauigkeit ausgeführt werden soll, als eine blosse Skizze es verlangt, so ist es besser sich an die allgemeine Methode des §. 476 zu halten. Gleichwohl soll hier die abgekürzte Methode noch auf ein Beispiel angewendet werden, das bei manchen Gelegenheiten von Nutzen sein kann.

Perspective eines Kreuzgewölbes und seiner Schatten.

§. 501.

Taf. 28. Fig. 3. Ohne die Einzelnheiten des §. 404 zu wiederholen, über die Art, wie die Perspective dieses Gewölbes gezeichnet werden muss, werde hier bloss bemerkt, dass die Tafel XY, auf welcher die Perspective sich befindet, als mit der Ebene der Vorderflächen der ersten Pfeiler zusammenfallend angenommen wird. Auf der Horizontebene, welche um PD auf die Tafel aufgeklappt ist, nehme man die Projection $O\varphi$ des durch das Auge O gehenden Lichtstrahles willkürlich an, und bezeichne durch ω den Winkel, den dieser Strahl mit dem Horizont bildet. Nimmt man nun $\varphi O'' = \varphi O$ und zieht die Gerade $O''\varphi'$ unter dem Winkel ω, so ist diese Gerade die Aufklappung des Lichtstrahls auf der Tafel, und folglich ist der Punkt φ', wo sie die

Vertikale $\varphi\varphi'$ schneidet, der Fluchtpunkt aller Lichtstrahlen im Raume, während φ der Fluchtpunkt der horizontalen Projectionen aller jener Strahlen ist. Man sieht ferner leicht ein, dass $P\varphi'$ die Projection des durch den Augpunkt gehenden Lichtstrahles auf der Tafel ist. Man hätte also, um die Richtung der Lichtstrahlen zu bestimmen, die beiden Projectionen $O\varphi$ und $P\varphi'$ unmittelbar geben können.

§. 502.

Die Kante AA' des Pfeilers, welche eine erleuchtete Seitenfläche von einer dunkeln scheidet, erzeugt eine vertikale Schattenebene, welche den Grundriss in einer Geraden schneidet, deren Perspective $Aa\varphi$ ist, weil der Schnitt mit $O\varphi$ parallel geht. Dieser Schatten aber trifft in a auf die Basis des zweiten Pfeilers, und erhebt sich an diesem in der Vertikalen aa', deren Endpunkt a' durch den Strahl bestimmt wird, welcher vom Punkte A' ausgeht und zur Perspective $A'a'\varphi'$ hat.

Von dem Punkte A' weg streifen die Lichtstrahlen an dem Stirnbogen $A'B'$ hin, und erzeugen einen schiefen Cylinder, welcher die Vorderfläche des Pfeilers ab in einem Kreise schneidet, der gleich $A'B'$ ist. Die Perspective dieses Schnittes bleibt kreisförmig (§. 276), erhält aber einen kleinern Durchmesser. Um diesen zu bestimmen, ziehe man durch den Mittelpunkt I des Stirnbogens den Lichtstrahl $Ii\varphi'$, welcher die Horizontale $a'i$ im Punkte i schneidet, und beschreibe mit ia' als Halbmesser einen Kreis $a'b'$, so ist dieser die Perspective des vom Stirnbogen $A'B'$ auf den Pfeiler geworfenen Schattens. Der letzte Punkt B' dieses schattenerzeugenden Bogens ist durch die Gerade $\varphi'b'$ gegeben, und muss dem Punkte B entsprechen, den man aus der Horizontalprojection φb desselben Lichtstrahls erhält.

§. 503.

Von der Lage $B'b'\varphi'$ weg, gehen die Lichtstrahlen, welche über den Stirnbogen $B'C'$ hinstreifen, zwischen den beiden Pfeilern rechts durch und fallen auf den Boden, wo sie eine Ellipse $\beta\gamma$ erzeugen, von welcher man jeden einzelnen Punkt aus dem Durchschnitte eines Lichtstrahls mit seiner Horizontalprojection erhält; so z. B. den Punkt β aus $B'\beta\varphi'$ und $B\beta\varphi$, den Punkt γ aus $C'\gamma\varphi'$ und $C\gamma\varphi$. Um aber den letzten Punkt γ dieses Schattens zu finden, muss man (wie im folgenden Paragraph geschehen wird) den Punkt F' des Grathbogens $L'F'R'$ suchen, durch welchen ein Lichtstrahl $C'F'\gamma\varphi'$ geht, welcher zu gleicher Zeit jene Curve $L'F'R'$ und den Stirnbogen $A'B'C'$ trifft; denn von dieser Lage weg ist es der Ellipsenbogen $F'L'$, welcher Schatten auf den Boden wirft und daselbst eine andere von der vorhergehenden $\beta\gamma$ verschiedene Ellipse $\gamma\lambda$ erzeugt. Den letzten Punkt λ dieser Schattenlinie bestimmt der Durchschnitt des Lichtstrahls $L'\lambda\varphi'$ mit seiner Horizontalprojection $L\lambda\varphi$, und jeden andern Punkt der Ellipse $\gamma\lambda$ findet man auf eine ähnliche Weise, indem man zuerst auf dem Bogen $F'L'$ einen Punkt beliebig nimmt und ihn durch eine Vertikale auf die Diagonale LR projicirt, welche die Horizontalprojection des ganzen Grathbogens $R'F'L'$ darstellt. — Die beiden Pfeilerkanten LL' und bb' endlich erzeugen die geradlinigen Schatten $L\lambda$ und $b\beta$, von denen aber nur der erstere Tangente an der anstossenden Ellipse ist.

§. 504.

Die Curve $E'm'F'$ ist der Schatten, den der Bogen $A'B'E'$ des ersten Gewölbes auf dieses Gewölbe selbst wirft; sie ist also der Durchschnitt eines schiefen mit einem geraden Cylinder, und da hier die Eintrittscurve $A'B'E'$ eben ist, so ist es also auch die Austrittscurve oder die Schattenlinie $E'F'$, wie solches schon bei der Brücke (§. 76) der Fall war. Diese Schattenlinie fängt im Punkte E' an, für welchen die Tangente am Kreise $AB'E'$ parallel ist mit der Projection $P\varphi'$ der Lichtstrahlen auf der Tafel; denn der

durch einen solchen Punkt gezogene Lichtstrahl befindet sich ganz in der Berührungsebene des Gewölbecylinders, und mithin fällt sein Austrittspunkt mit dem Eintrittspunkte E′ zusammen. Zieht man hierauf eine beliebige Secante M′N′ parallel mit $P\varphi'$, so ist diese der Grundschnitt einer auf der Tafel senkrechten und mit den Lichtstrahlen parallelen, schneidenden Ebene. Diese Ebene nun schneidet das Gewölbe in einer durch N′ gehenden Erzeugenden, deren Perspective N′P ist, während dieselbe Ebene den schiefen Strahlencylinder in einem Lichtstrahle schneidet, der durch M′ geht, und $M'\varphi'$ zur Perspective hat. Folglich ist der Punkt m′, in welchem die beiden Linien $M'\varphi'$ und N′P sich schneiden, der Schatten, welchen der Punkt M′ auf das Gewölbe wirft. Wiederholt man diese Construction für andere links von M′ liegende Punkte, so erhält man die Verlängerung der Curve E′m′F′; als Schattenlinie aber muss sie im Punkte F′ endigen, wo sie dem Grathbogen R′F′L′ trifft, und auf diese Weise findet man also den Punkt F′, von welchem im vorigen Paragraph die Rede war.

§. 505.

Taf. 28. Fig. 3. **Schatten des Seiteneingangs.** Da die Erzeugenden des Seitengewölbes der Grundlinie XY parallel sind, so muss man eine dritte, senkrecht auf diesen Erzeugenden stehende Ebene zu Hilfe nehmen; am besten taugt hiezu die **Hauptebene** der Figur (§. 280), nämlich die durch den Augpunkt gelegte, auf der Tafel senkrecht stehende Vertikalebene O P Z′. Auf dieser Hauptebene würde man die Projection des Lichtstrahls $(O\varphi, P\varphi')$ erhalten, wenn man auf sie aus φ' eine Senkrechte $\varphi'\varphi''$ fällte, und den Punkt φ'' in welchem diese die Vertikale P Z′ der Tafel selbst treffen würde, mit dem Augpunkte O im Raume verbände. Es reicht aber hin, den Punkt φ'' zu erhalten, welcher offenbar der Fluchtpunkt aller Geraden ist, die parallel sind mit der Projection des Lichtstrahles auf der Hauptebene.

§. 506.

Der Schatten T′Q″ nun, welchen der Kreisbogen V′Q′S′ auf das Seitengewölbe wirft, ist der Durchschnitt dieses geraden Cylinders mit einem schiefen, welcher mit ersterem einerlei Basis hat. Mithin ist T′Q″ eine ebene Curve, wie in §. 504, und um sie zu finden, schneide man beide Cylinder durch Ebenen, welche mit den Erzeugenden des einen wie des andern parallel sind. Diese Ebenen müssen senkrecht stehen auf der im vorigen Paragraph bestimmten Hauptebene, und der Durchschnitt einer derselben auf der Seitenebene V V′ Q′ wird eine Gerade sein, deren Perspective $\varphi''S'Q'$ durch φ'' gehen muss (§. 505). Diese schneidende Ebene nun schneidet den schiefen Cylinder in dem Lichtstrahle $Q'\varphi'$ und das Gewölbe in der Erzeugenden S′Q″; mithin gehört der Punkt Q″, in welchem diese beiden Geraden sich schneiden, der gesuchten Curve T′Q″ an. Diese Schattenlinie fängt offenbar in dem Punkte T′ an, wo der Bogen von der durch φ'' gezogenen Tangente berührt wird, und muss endigen in dem Punkte, in welchem sie den Grathbogen R′F′L′ trifft, und welcher hier zufälligerweise der vorhin construirte Punkt Q″ ist.

§. 507.

Von der Lage Q′Q″q weg, fallen diejenigen Lichtstrahlen, welche über das Kreisbogenstück Q′V′ hinstreifen, auf den Boden, und erzeugen daselbst einen Ellipsenbogen q v, dessen einzelne Punkte auf folgende Art construirt werden. Nachdem man einen Punkt Q′ beliebig auf dem Kreisbogen genommen, projicire man ihn horizontal in Q auf XVP. Hierauf ziehe man den Lichtstrahl $Q'q\varphi'$ und seine Horizontalprojection $Qq\varphi$, so ist der Durchschnitt q dieser beiden Geraden ein Punkt des gesuchten Ellipsenbogens. Dieser wird sich an die Gerade Vv anschliessen, welche der Schlagschatten der Pfeilerkante VV′ ist.

Die Vertikale RR′ wirft den geradlinigen Schatten Rr und das Grathbogenstück R′Q″ erzeugt als Schatten einen neuen Ellipsenbogen rq, der wie oben construirt wird, indem man auf die Diagonale RL einen beliebig auf R′Q″ genommenen Punkt projicirt. Die beiden Ellipsenbögen rq und vq sind aber nicht Tangenten an einander.

§. 508.

Was die äussere Kante YY′ betrifft, so erzeugt sie eine vertikale Schattenebene, deren horizontaler Grundschnitt offenbar die Gerade Yφ zur Perspective hat. Dieser Schatten verlängert sich aber nicht bis zu dem Punkte, der dem obern Endpunkte Y′ der Kante entsprechen würde, weil der Lichtstrahl, welcher längs der Vertikale YY′ hinstreift, die vorspringende Kante G′H′ trifft, ehe er jenen Punkt Y′ erreicht. Um nun diese letzte Lage des Lichtstrahls zu finden, bemerke man, dass die Schattenebene Y′Yφ die untere, horizontale Fläche der Einfassung in einer mit Yφ parallelen Geraden schneidet, deren Perspective Y′φ sein muss. Verlängert man daher letztere Gerade bis G′ und zieht G′φ′, so erhält man die gesuchte Grenzlage des Lichtstrahls. Diese Linie G′φ′ liefert zuerst den Punkt Y″, durch welchen man den geradlinigen Schatten X″Y″, den die Einfassung auf die Vorderfläche des Gebäudes wirft, ziehen muss; hernach schneidet sie die Gerade Yφ in dem Punkte g′, wo der Schatten der Vertikalen YY′ auf dem Grundrisse endigen muss.

Nun bewegt sich der Lichtstrahl weiter, an G′H′ hin, und erzeugt auf dem Boden einen offenbar mit XY parallelen Schatten g′h′, dessen Länge durch die Linie H′h′φ′ bestimmt wird; alsdann steigt er an H′H″ hinauf und erzeugt eine vertikale Schattenebene, deren Grundschnitt h′φ seinen Endpunkt h″ in der Geraden H″h″φ′ findet; endlich gleitet er über die obere Kante H″K″ hin und erzeugt eine Schattenebene, welche den Grundriss in einer senkrecht auf der Tafel stehenden Geraden h″k″P schneidet, deren Länge durch die Linie K″k″φ′ bestimmt wird. Endlich erhält man noch einen geradlinigen mit XY parallelen Schatten k″u und noch einige andere, den vorhergehenden analoge Umrisse, welche aber zu klein sind, als dass man sie durch Buchstaben bezeichnen könnte, und welche sich überdiess auf unsichtbare Theile der Figur auf der Tafel beziehen.

Siebentes Kapitel.

Perspective der durch Reflexion entstandenen Bilder.

§. 509.

Wenn ein Lichtstrahl AM, der von einem erleuchteten oder selbstleuchtenden Punkte ausgeht, auf eine spiegelnde Fläche XY fällt, so wird er bekanntlich in einer Richtung MR zurückgeworfen, welche in der durch AM und die Normale MN bestimmten Ebene liegt, und mit MN den Reflexions-Winkel RMN bildet, welcher dem Einfallswinkel AMN gleich ist. Dieser Satz bleibt wahr, von welcher Art die Fläche XY auch sein mag, convex, concav oder eben; hier aber werden, in Rücksicht der Anwendungen, welche von dem Satze gemacht werden sollen, nur ebene Spiegel in Betrachtung gezogen. Um nun für diesen Fall denjenigen Lichtstrahl zu finden, welcher, von A ausgegangen, genau nach dem in dem Punkte O angenommenen Auge zurückgeworfen wird, fälle man die Senkrechte AD auf den ebenen Spiegel XY, verlängere sie um DA′=DA und ziehe A′mO, so ist Am der gesuchte Strahl; denn es ist leicht einzusehen, dass die Winkel

Taf. 29. Fig. 1.

Amn und Omn einander gleich sind. Hieraus folgt, dass der Beobachter in O den Punkt A, durch Reflexion so sieht, wie wenn derselbe in irgend einem Punkte der unbestimmten Geraden O m A′ sich befände; wo wird nun aber der genaue Ort des Bildes auf dieser Geraden sein?

§. 510.

Dieser Ort wäre unbestimmt, wenn das Auge nur einen einzigen Lichtstrahl empfinge; zeichnet man aber den Kegel O A′O′, der zur Basis die Oeffnung O O′ der Pupille hat, so schneidet er den Spiegel X Y in einem Schnitte m m′; alle einfallenden Strahlen nun, welche in dem neuen Kegel m A m′ enthalten sind, werden offenbar so zurückgeworfen, dass sie in dem Büschel O m m′O′ enthalten bleiben, und folglich in das Auge des Beobachters gelangen. Nach dem im vorigen Paragraph ausgesprochenen Gesetze nun müssen alle diese Strahlen sich im Punkte A′ schneiden; folglich ist es für das Auge O gerade so, als ob diese Strahlen direct von dem Punkte A′, und nicht von irgend einem andern Punkte der Geraden O m A′ ausgegangen wären; mithin ist das Bild des Punktes A genau in A′, einem Punkte, der in Beziehung auf die Spiegelebene X Y eine symmetrische Lage gegen A hat.

§. 511.

Eben so ist das Bild des Punktes C in C′. Das Bild einer Geraden A C ist geradlinig und hat eine symmetrische Lage A′C′ gegen A C, so dass diese beiden Geraden den Spiegel in einem und demselben Punkte X schneiden, indem sie den Winkel A′X Y = A X Y bilden. Ueberhaupt, irgend eine Figur A B C hat zum Bilde eine Figur A′B′C′, welche der ersten symmetrisch ist. Ist eine Gerade B C dem Spiegel parallel, so bleibt auch ihr Bild B′C′ der gegebenen Richtung parallel. — Von diesen hier aufgestellten Sätzen soll nun auf einige Beispiele Anwendung gemacht werden.

Perspective einer Treppe und ihres Bildes in einem Wasserspiegel.

§. 512.

Taf. 29. Fig. 2. Fig. 2 stellt eine Doppeltreppe vor, welche von einem horizontalen Dammgange zu einer weiter unten gelegenen Wasserfläche führt: unter dem Dammgange und zwischen den beiden Treppen ist ein kleines Gewölbe angebracht, um die Quelle zu überdecken, von welcher das Wasser gespeist wird. *) Als Tafel wird die Vertikalebene angenommen, welche auf dem vordern Rande X Y des rechtwinkligen und parallel mit der Tafel sich unbestimmt forterstreckenden Bassins errichtet ist; der Rand X Y wird in der Höhe des Wasserspiegels angenommen; P ist der Hauptpunkt, P D die Horizontlinie und D der Distanzpunkt.

§. 513.

Man nehme Z X = 1,05 Meter als Entfernung der ersten Stufe von der Hauptebene P Z, und X Y = 2,30 Meter als Breite des Bassins; alsdann ist X P die unbestimmte Perspective der untern Kante jener Stufe, und zieht man die Gerade D Y unter 45°, so schneidet diese von X P das Stück X A ab, welches perspectivisch gleich X Y ist. Die Horizontale A V stellt also den Durchschnitt des Wasser-Niveaus mit der Mauerwand dar. Nimmt man nun ferner Y U = 0,90 Meter als Länge der Stufe und zieht D R U, so schneidet diese Gerade von

*) Dieses interessante Beispiel ist aus dem Werke: Science du dessin von Vallée entlehnt; die Construction geschieht aber hier auf directe Weise und ohne Zuhilfenahme der verschiedenen von jenem Schriftsteller angewendeten Projectionsebenen.

XP das Stück AR ab, welches perspectivisch gleich YU ist, und die Perspective der untern im Niveau des Wassers liegenden Stufenkante ist. Endlich nehme man die Vertikale $XX' = 0{,}18$ Meter als Höhe der Stufe und $X'x = 0{,}28$ Meter *) als horizontale Breite derselben, so erhält man durch die Geraden PX′ und Px, in Verbindung mit den Vertikalen AA′, RR′ und mit den Horizontalen A′B, R′S den vollständigen Umriss der ersten Treppenstufe.

§. 514.

Die perspectivische Darstellung der nun folgenden einzelnen Theile gründet sich hauptsächlich auf den im §. 275 bewiesenen Satz, dass die perspectivischen Längen solcher Geraden, welche in einerlei Frontebene liegen, dasselbe Verhältniss unter einander haben, wie die ursprünglichen Längen. Man nehme also

$$BB' = AA',\ B'C = A'B,\ CC' = AA' \ldots.$$

$$\text{und eben so } SS' = RR',\ S'T = R'S,\ TT' = RR' \ldots,\ LL' = RR'.$$

Die perspectivische Länge E′F des Ruheplatzes könnte man aus ihrer absoluten Grösse bestimmen, wie man A′B aus X′x bestimmt hat; kürzer aber ist es diese Länge mit der einer Stufe zu vergleichen, und wenn sie z. B. das Dreifache dieser letztern ist, $E'F = 3A'B$ zu nehmen.

§. 515.

Die vertikale Kante FF′ muss gleich 4AA′ genommen werden, wenn der zweite Treppenarm vier Stufen bekommen soll; und die Geraden FG und F′G′, welche in P zusammenlaufen, müssen zur absoluten Grösse die doppelte Stufenlänge YU erhalten. Um die Perspective dieser Länge zu erhalten, bemerke man, dass die in der Frontebene AV liegende Vertikale FF′ die Grundrissebene im Punkte φ schneidet, und dass also $P\varphi$ die Perspective der Projection von FGP ist; zieht man daher $D\varphi y$ und nimmt $yu = 2YU$, so schneidet die Gerade $D\gamma u$ ein Stück $\varphi\gamma$ ab, das perspectivisch gleich yu ist (§. 304); mithin bestimmt die Vertikale $\gamma GG'$ die gesuchten Längen FG und F′G′.

§. 516.

Endlich sei $ZW = 0{,}84$ Meter die halbe Breite des von dem Gewölbe überdeckten Durchgangs, so stellt PW den Durchschnitt des Wasserniveaus mit dem Gewölbepfeiler dar, welcher in dem Punkte anfängt, wo PW von der horizontalen RQ geschnitten wird, und in der Horizontalen γNI endigt, wenn die Gewölbetiefe einer Stufenlänge (§. 515) gleich genommen wird. Ist aber die Gewölbetiefe von dieser Stufenlänge verschieden, so bestimmt man den Abschnitt WN auf dieselbe Art, wie es in §. 513 für XA und XR geschehen ist. Um die Höhe QQ′ zu bestimmen, errichte man aus W eine Vertikale gleich der absoluten Grösse dieser Pfeilerkante, oder man vergleiche sie mit der Höhe einer Stufe, und wenn sie z. B. das Sechsfache dieser letztern ist, so nehme man $QQ' = 6RR'$. Bis hieher war nur von der einen, links der Vertikalen PZ liegenden Hälfte der Figur die Rede; um die andere Hälfte zu erhalten, muss man alle bis jetzt gefundenen und noch zu findenden Theile symmetrisch auf die rechte Seite von PZ tragen.

§. 517.

Reflectirte Bilder. Die Oberfläche des Wassers, welche einen Spiegel bildet, fällt hier mit der Grundrissebene zusammen, deren Grundlinie auf der Tafel die Gerade XY ist. Nach §. 510 muss man vom

*) Diese und alle folgenden numerischen Angaben sind einem Maassstabe entnommen, auf welchem 1 Meter zu 0,048 M. verjüngt ist.

Punkte B' aus eine Senkrechte B'β auf den Grundriss fällen, welche, weil sie in der Frontebene AV liegt, den Grundriss in β schneiden wird; hierauf muss man diese Senkrechte um ihre eigene Grösse verlängern, d. h. man muss βb' = βB' nehmen, weil diese Linien in ihren Perspectiven offenbar einander gleich bleiden. Alsdann ist der Punkt b' die Perspective des Bildes von B' und eben so sind b'c, cc', ... die Bilder der Linien B'C, CC'... Was die Kante der Stufe B'S' betrifft, so bleibt ihr Bild der ursprünglichen Linie parallel (§. 511), folglich muss es senkrecht auf der Tafel bleiben und mithin b'σP zur Perspective haben.

§. 518.

Da der Punkt L' in der Frontebene sich befindet, deren Grundschnitt perspectivisch durch QRλ dargestellt ist, so schneidet die aus L' gefällte Vertikale den Wasserspiegel in λ, und man muss daher λl' = λL', und hierauf λl = λL, ... nehmen. Eben so mache man Qq' = QQ'; und was die im Gewölbe-Anlauf liegende Fuge betrifft, welche, in Q' anfangend, senkrecht auf der Tafel steht, so ist sie selbst hier zwar nicht sichtbar, ihr Bild aber ist es, und da es senkrecht gegen die Tafel gerichtet bleibt (§. 511), so dass seine Perspective die Gerade q'n'P. Diese letztere dient auch dazu, die Vertikale Nn', welche das Bild der innern Pfeilerkante darstellt, zu begrenzen.

§. 519.

Der vordere Gewölbebogen endlich, welcher durch einen Kreisbogen Q'H' dargestellt wird, der von einem gewissen Punkte ω der Vertikale PZ aus beschrieben wurde, hat zur Perspective seines Bildes einen anderen Kreisbogen q'h', der mit demselben Halbmesser aber symmetrisch unterhalb der Horizontalen RQH beschrieben ist, weil letztere Gerade der Grundschnitt der Frontebene ist, welche den ursprünglichen Bogen enthält. Man findet daher leicht den Mittelpunkt ω' des Bogens q'h', und hieraus auch den Mittelpunkt des hintern Bogens n'i', mit Anwendung des Abnahme-Maassstabes PXX', wie solches schon bei mehreren ähnlichen Fällen gezeigt worden (§. 274).

§. 520.

Um auch ein Beispiel von einer beliebig geneigten Linie zu geben, sei $\delta'\varepsilon'$ eine eiserne im Punkte ε' in die Wand eingesetzte Stange, deren Endpunkt δ' einen Vorsprung von 0,85 Metern gegen die Mauer habe; es soll nun die Perspective des vom Wasser reflectirten Bildes dieser Stange gesucht werden. Da der Punkt ε' in der Frontebene liegt, welche AV zum Grundschnitte hat, so darf man nur die Vertikale $\varepsilon\varepsilon'' = \varepsilon\varepsilon'$ nehmen; was aber die vom Punkte δ' aus gefällte Vertikale betrifft, so muss man zuerst den Grundschnitt ihrer Frontebene suchen. Man schneide daher von dem Stücke XY, mittelst welches man die wahre Breite XA des Bassins fand (§. 513), den Theil Yη = 0,85 Meter ab, und ziehe die Gerade Dη, welche die PX im Punkte ζ schneidet; zieht man durch letztern Punkt die Horizontale $\delta\zeta$, so ist solche der gesuchte Grundschnitt; denn aus §. 304 ist bekannt, dass die perspectivische Distanz Aζ gleich Yη ist. Nun darf man nur noch die Vertikale $\delta'\delta$ um $\delta\delta'' = \delta\delta'$ verlängern, so erhält man $\delta''\varepsilon''$ als Perspective des reflectirten Bildes der Eisenstange.

Perspective eines Saales und seines von einer Spiegelfläche reflectirten Bildes.

§. 521.

Taf. 29. Dieser Saal hat die Form eines durch zwei Seitenwände AE und BC abgestutzten Rectangels (Fig. 3).
Fig. 3. Die letztere dieser Wände ist ihrer ganzen Ausdehnung nach von einem vertikalen Spiegel besetzt, welcher

die Bilder der verschiedenen Gegenstände zurückwirft. Es soll nun die Perspective der Gegenstände selbst und ihrer Bilder gesucht werden, auf einer vertikalen Tafel XY, welche ein wenig vor den schneidenden Wänden und parallel mit dem Hintergrunde CE des Saales aufgestellt ist.

P sei der Hauptpunkt und D der Distanzpunkt der Tafel; man nehme XY = 12 Fuss als Breite des Saales und XX′ als seine Höhe an. Hierauf ziehe man die Geraden XP, YP, X′P′, Y′P′. Ist nun der Anfang der schneidenden Wände 1 Fuss und der Hintergrund des Saales 10 Fuss hinter der Tafel, so ziehe man die Geraden (D, 1) und (D, 10), welche die Ecke A und den Punkt I bestimmen, durch welchen man die unbestimmte Horizontale IEC ziehen muss. Haben die schneidenden Wände eine Neigung von 70⁰ gegen die Tafel, so ziehe man, nachdem man PO = PD genommen, den Sehstrahl OF so, dass Winkel POF = 20′, so sind F und F′ die Fluchtpunkte aller Horizontalen, welche mit der einen oder andern der schneidenden Wände parallel sind; diese letzteren werden daher durch die Geraden BF, B′F, AF′, A′F′ bestimmt, welche wieder durch die beiden Vertikalen EE′ und CC′, mit denen der Hintergrund des Saales anfängt, begrenzt werden müssen. Fig. 4.

§. 522.

Man suche nun die Perspective der vom Spiegel BCC′B′ reflectirten Bilder. Für Linien wie AB, GL, welche die Fugen der Bodenplatten darstellen, würde man das absolute Bild erhalten (§. 510), wenn man vom Punkte G auf die Vertikalebene BC eine Senkrechte fällte, sie um ihre eigene Grösse verlängerte und den Endpunkt dieser Verlängerung mit L verbände (§. 511); das so erhaltene Bild würde alsdann einen Winkel von 70⁰ mit dem Spiegel BC und folglich einen Winkel von 50⁰ mit dem Hauptstrahle OP bilden. Man ziehe daher den Sehstrahl Oh so, dass Winkel POh = 50⁰, so ist h der Fluchtpunkt der Perspective des reflectirten Bildes von GL, und mithin Lh diese Perspective selbst; eben so hat das Bild von EC zur Perspective Ch u. s. w.

§. 523.

Was die senkrecht auf der Tafel stehenden Fugen betrifft, so müsste z. B. das Bild von PQR durch den Punkt Q gehen (§. 511), in welchem diese Fuge den Spiegel BC schneidet, und würde mit letzterm einen Winkel von 20⁰ und daher mit dem Hauptstrahle OP einen Winkel von 40⁰ bilden. Construirt man daher den Winkel POp = 40⁰, so ist p der Fluchtpunkt des Bildes von PQR, und mithin, wenn man p und Q verbindet, pQr die Perspective dieses Bildes. Alle übrigen senkrecht auf der Tafel stehenden Fugen haben Bilder, deren Perspectiven ebenfalls im Punkte p zusammen laufen.

§. 524.

Das Bild der Seitenkante AE würde durch den Punkt S gehen, in welchem sie den Spiegel BCF schneidet und würde mit diesem Spiegel einen Winkel von 40⁰ und daher mit OP einen Winkel von 60⁰ bilden. Zieht man daher den Sehstrahl Of′ so, dass Winkel POf′ = 60⁰, so ist f′ der Fluchtpunkt des gesuchten Bildes und mithin f′Sea die Perspective desselben. Diese Gerade dient zur Begrenzung der schon gezeichneten Fugen Ce, Lg, ... und zur Bestimmung der Vertikalen ee′, so dass es nun leicht ist, das Bild CC′e′e des Hintergrundes und des der Saaldecke B′C′e′a′ zu vollenden.

§. 525.

Hat die schneidende Wand AE ein Fenster, so zeichne man zuerst die Perspective desselben, nach §. 355, indem man die Distanzen EK und EG, zwischen welchen die Fensteröffnung enthalten ist, zu 3 und

7 Fuss, und ZZ', ZZ'' als die absoluten Höhen der Lehne und des Sturzes annimmt. Was die Perspective des Bildes betrifft, so bemerke man, dass die beiden Fensterpfosten vertikal bleiben und von den Punkten g und k ausgehen; ferner, dass die Horizontalen g'k', g''k'' im Fluchtpunkte f' zusammen laufen und durch die Punkte S' und S'' gehen müssen, in welchen die Geraden G'K', G''K'' die Vertikalebene PCF des Spiegels schneiden.

Achtes Kapitel.

Seltsame Perspectiven und Anamorphosen.

§. 526.

Seltsame Perspective nennt man eine Zeichnung, für welche der Gesichtspunkt so angenommen worden ist, dass alle Sehstrahlen sehr spitze Winkel mit der Tafel bilden (Winkel weit unter 45°), und wo also der Hauptpunkt ausserhalb des Zeichnenblattes fällt. Ein Beobachter, welcher sich der Tafel, auf welcher eine solche Zeichnung ausgeführt ist, gewohnterweise gegenüber stellt, wird, in dieser Lage, vergeblich einen befriedigenden Gesichtspunkt suchen; und hat er endlich nach mehrfachen Versuchen den wahren Gesichtspunkt gefunden, so wird die grosse Schiefe der Sehstrahlen ihn erst zu falscher Schätzung der Distanzen verleiten (§. 250); einige Dimensionen des Gegenstandes werden ihm zu gross, andere zu klein erscheinen, und so wird das Ganze ihm einen missgestalteten und oft unkenntlichen Anblick gewähren. Lässt man ihn aber durch ein Rohr oder durch ein in einer Scheidewand an der Stelle des Gesichtspunktes angebrachtes Loch die Zeichnung betrachten, so dass ihm durch eine solche Vorrichtung alle umliegenden Gegenstände verdeckt werden, welche ihn zu einer instinctmässigen Aenderung seines Urtheils über das Gesehene veranlassen könnten, und ihm für dieses Urtheil keine andere Grundlage bleibt als die Winkel, welche zwischen den von den einzelnen Punkten der Zeichnung entsendeten Lichtstrahlen enthalten sind, und welche trotz der Schiefe dieser Strahlen gegen die Tafel, doch genau dieselben bleiben wie für den Gegenstand selbst; so wird er jetzt mit angenehmer Ueberraschung erkennen, was ihm auf der mit blossem Auge betrachteten Zeichnung unkenntlich erschienen war.

§. 527.

Taf. 29. Fig. 5. Es soll nun auf einer Tafel XYV, welche als Horizontalebene der Figur angenommen wird, und für einen Gesichtspunkt, der horizontal in O projicirt und dessen Höhe in OO' aufgeklappt ist, eine solche seltsame Perspective construirt werden. Man zeichne zuerst eine regelmässige Perspective des fraglichen Gegenstandes auf einer andern, vertikalen Tafel, welche in Wirklichkeit in XY ihre Stelle hat, von hier aber versetzt und in X'Y'V' aufgeklappt worden ist; aus dieser Hilfsperspective nun kann die Perspective auf der Horizontalebene XYV leicht abgeleitet werden. Damit man keine zwei Projectionsebenen nöthig habe, wende man die Methode der Quadrate an (§. 334), d. h. man ziehe durch verschiedene Punkte L', M', N', ... welche man beliebig auf der Diagonale V'X' angenommen hat, Horizontalen L'l', M'm', N'n', ... und hierauf die Vertikalen L'A', M'B', N'C', ... Trägt man hierauf die Theile X'A', A'B', B'C', ... auf die Grundlinie XY, so sind offenbar die unbestimmten Geraden OAa, OBb, OCc die Perspectiven der Linien A'a', B'b', C'c', .. auf der horizontalen Tafel. Um die Diagonale V'X' zu erhalten, suche man ihren

Fluchtpunkt, indem man einen mit ihr parallelen Sehstrahl zieht; dieser Strahl wird horizontal in der mit X′ Y′ parallelen Geraden O F projicirt, und ist in der durch O′ mit V′ X′ parallel gezogenen Geraden O′ F aufgeklappt; mithin ist F der gesuchte Fluchtpunkt und also F X V die Perspective jener Diagonale. Die Gerade F X V schneidet aber die schon gezogenen Linien A a, B b, . . . in den Punkten L, M, N . ., durch welche man jetzt nur noch die mit X Y parallelen Linien L l, M m, N n, . . . ziehen darf, um, auf der horizontalen Tafel, die Perspective aller auf der Tafel X′ Y′ V′ gezeichneten Quadrate zu erhalten.

§. 528.

Da man von dem fraglichen Gegenstande bereits eine Perspective gezeichnet hat und zwar auf der in der Vertikalebene X Y angenommenen Tafel X′ Y′ V′ und für denselben Gesichtspunkt (O, O′), so darf man nur untersuchen, in welchen Fächern dieser Tafel die verschiedenen Züge oder bemerkenswerthen Punkte der Originalzeichnung enthalten sind, und hierauf diese Züge in die entsprechenden Fächer der Tafel X Y V auf eine ähnliche Art einzeichnen. Diese sehr bequeme Näherungsmethode wird um so genauere Resultate liefern, in je mehr Quadrate man die Tafel X′ Y′ V′ theilt; und sollte man bemerken, dass für gewisse Felder der horizontalen Tafel die Zeichnung etwas unbestimmt bliebe, so kann man dadurch nachhelfen, dass man neue Theilungen einschiebt. So wurde z. B. durch die Mitte R′ des Abschnittes Q′ S′ eine Horizontale R′ r und eine Vertikale R′ H′ gezogen; diese letztere bestimmt den Punkt H auf X Y, und zieht man durch diesen die Gerade O H R, welche die Diagonale X V in R schneidet, und durch letztern Puukt endlich die Horizontale R r, so ist diese die Perspective von R′ r′ und muss also die Perspectiven aller auf R′ r′ liegenden Punkte enthalten.

Von den Anamorphosen oder Zerrbildern.

§. 529.

Eine Anamorphose eines bestimmten Gegenstandes ist eine Art Perspective desselben, welche, unmittelbar angesehen, nicht die mindeste Aehnlichkeit mit dem Gegenstande zeigt, während ihr Bild in einem convexen oder concaven Spiegel den Gegenstand in seiner wahren Gestalt darstellt. Es sei z. B. der in der Horizontalebene der Figur liegende Kreis X V Y U die Basis eines cylindrischen und vertikalen Spiegels; O sei die Projection des in einer Höhe O O′ liegenden Gesichtspunktes; endlich sei ein in der Vertikalebene X Y liegender Kreis (oder irgend eine andere Curve) gegeben, dessen Lage auf dieser Tafel durch L′ M′ N′ P′ in Fig. 2 angezeigt sei. Nun handelt es sich darum, die Anamorphose dieses Kreises auf der Horizontalebene zu finden, d. h. eine Curve $\lambda \mu \nu \pi$ zu construiren von solcher Beschaffenheit, dass unter allen den Lichtstrahlen, welche von den Punkten λ, μ . . . ausgehen, diejenigen, welche von dem Spiegel nach dem Auge (O, O′) reflectirt werden, dieselben Richtungen haben, als wenn sie unmittelbar von den analogen Punkten L′, M′. . des in der Vertikalebene X Y gegebenen Kreises kämen.

Taf. 30. Fig. 1 u. 2.

§. 530.

Allgemeine Methode. Man betrachte irgend einen Punkt M′ dieses Kreises, der horizontal in G projicirt ist, und ziehe nach ihm einen Sehstrahl, so wird dieser O G zur Projection haben und die Horizontalebene in einem Punkt m schneiden, den man leicht finden kann, wenn man den Sehstrahl um O G aufklappt. Denn errichtet man in O eine Senkrechte gleich O O′ und in G eine Senkrechte gleich G′ M′, so wird die Gerade, welche die

Endpunkte dieser Senkrechten verbindet, die verlängerte OG in dem gesuchten Punkte m schneiden. *) Wird aber der cylindrische Spiegel in X V Y aufgestellt, so schneidet ihn eben jener Strahl in einem Punkte I′, der in I projicirt ist, und ist es ein Lichtstrahl, so wird derselbe unter einem Winkel reflectirt, den die Normale in zwei Hälften theilt; nun ist aber für einen vertikalen Cylinder die Normale horizontal und mithin wird ihre Projection C I K den von den Projectionen des einfallenden und zurückgeworfenen Lichtstrahles gebildeten Winkel noch immer halbiren; macht man daher Winkel $KI\mu = KIO$, so ist $I\mu$ die Projection des zurückgeworfenen Strahls.

§. 531.

Man darf jetzt nur noch den Punkt finden, in welchem dieser zurückgeworfene Strahl die Horizontalebene schneidet. Dieser Punkt muss in dem Grundschnitte derjenigen Ebene liegen, welche den einfallenden Strahl und die Normale enthält; und da eben dieser Grundschnitt offenbar eine durch m mit C I parallel gezogene Gerade ist, so schneidet er die $I\mu$ in einer Distanz gleich I m. Hieraus folgt, dass die beiden vorhergehenden Constructionen sich, nachdem man den Punkt m gefunden, auf diese einzige reduciren: Man ziehe die Tangente IT an die Basis des Cylinders, beschreibe mit Im einen Kreisbogen mT und verlängere diesen um $T\mu = mT$, so erhält man den gesuchten Punkt μ, welcher zugleich auch die Projection $I\mu$ des reflectirten Sehstrahles bestimmt.

§. 532.

Umgekehrt, der Lichtstrahl, welcher von dem erleuchteten Punkte μ ausgeht, und in dem in §. 530 durch I′ bezeichneten Punkt auf den Spiegel fällt, wird in einer Geraden zurückgeworfen, welche den Punkt I′ mit (O, O′) verbindet, weil der hiedurch gebildete Winkel der nämliche ist wie in §. 530. Der zweite Schenkel dieses Winkels aber ist genau der Sehstrahl, welcher durch den Punkt (G, M′) des gegebenen Kreises geht; mithin erzeugt der von μ nach I′ gesendete Lichtstrahl in dem Auge des Beobachters das nämliche Bild, welches der Punkt (G, M′) des gegebenen Kreises erzeugt hätte und mithin ist μ die Anamorphose dieses Punktes (G, M′). **) Wendet man dasselbe Verfahren auch auf andere Punkte L, N′, P′ an, wie es hier in Beziehung auf den Punkt M′ (§. 531) geschehen, so findet man als Anamorphose des gegebenen Kreises die Curve $\lambda\,\mu\,\nu\,\pi$.

§. 533.

Taf. 30. Fig. 1, 2. Die Ponsif'sche Methode. Wenn der gegebene Gegenstand viele Einzelnheiten enthält, so ist es besser, statt die Anamorphose jedes einzelnen Punktes zu suchen, folgende Methode anzuwenden. Auf eine vertikale in den cylindrischen Spiegel eingeschriebene Tafel XY, welche senkrecht auf der Geraden C O steht und hier vorerst nach Z′ X′ Y′ versetzt ist, zeichne man eine regelmässige Perspective der verschiedenen

*) Diese sehr leichte Operation wurde hier nicht ausgeführt, um die dadurch entstehende Verwirrung in der Figur zu vermeiden, auf welcher später ohnehin noch eine Vertikalebene O′ Oz nöthig wird für die Ponsif'sche Methode, durch welche man den Punkt m mittelst des Punktes b finden lernt.

**) Streng genommen wäre μ eigentlich die Anamorphose des Punktes m, in welchem der durch (G, M′) gehende Sehstrahl die Horizontalebene schneidet; denn nach der Regel des §. 510 ist der Punkt m der eigentliche Ort des Bildes von μ, das der ebene und vertikale Spiegel T I zurückwirft, welcher mit dem cylindrischen Spiegel längs des der Vertikalen I entsprechenden Flächenelements zusammenfällt. Da aber die beiden Punkte m und (G, M′) auf demselben Sehstrahle liegen, so kann der eine für den andern genommen werden, besonders hier, wo gewöhnlich an der Stelle des Augpunktes eine Vorrichtung angebracht wird, welche dem Urtheile des Beobachters keine andere Grundlage übrig lässt, als die Richtung des Lichtstrahls.

darzustellenden Gegenstände für den Gesichtspunkt (O, O′); hierauf theile man diese Tafel Z′ X′ Y′ durch Horizontalen und Vertikalen in Quadrate, deren Anamorphosen leicht zu finden sind, wie gleich gezeigt werden wird; endlich trage man näherungsweise die verschiedenen Theile der Perspective in diejenigen Fächer der Horizontalebene ein, welche den, jene Theile enthaltenden Fächern auf der Tafel Z′ X′ Y′ entsprechen.

§. 534.

Man suche zuerst die Durchschnitte der durch alle Punkte jener Quadrate gezogenen Sehstrahlen mit der Horizontalebene, d. h. man zeichne die Perspectiven jener Quadraten auf der genannten Ebene. Die Vertikalen X′ Z′, G′ F′, ... Y′ W′, haben offenbar zu Perspectiven die unbestimmten Geraden O X z, O G f, ..., O Y w. Man klappe nun die Vertikalebene O X z um ihren horizontalen Grundschnitt um, so wird der Augpunkt in O′ und die Vertikale X in X Z″ zu liegen kommen. Auf letzterer nehme man die Distanzen X Z″ = X′ Z′, X A″ = X′ A′, X B″ = X′ B′, ... so erhält man als Durchschnitte der Sehstrahlen O′ Z″, O′ A″, O′ B″, ... mit der Horizontalebene die Punkte z, a, b, ... durch welche man jetzt nur noch die mit X Y parellelen Geraden z w, a q, b h, ... ziehen darf, um die Perspectiven der in der Tafel liegenden Horizontalen zu erhalten.

§. 535.

Nach der Regel des §. 531 nun erhält man die Anamorphose des Punktes z, wenn man auf die Tangente X θ die Senkrechte z θ fällt und solche um $\theta\zeta = z\,\theta$ verlängert. Würde man ebenso in Beziehung auf die Punkte a, b, ... verfahren, so erhielte man α, β, ..., welche Punkte alle in gerader Linie liegen müssen, man darf daher nur, nachdem man ζ gefunden, die Gerade X ζ ziehen und auf ihr die Theile

$$X\alpha = X a,\ X\beta = X b,\ X\delta = X d, \ldots$$

nehmen, so ist leicht einzusehen, dass X ζ die Anamorphose der Linie X z oder vielmehr der Vertikalen X′ Z′ ist (s. die Anmerkung zu §. 532). Nachdem man auf eben diese Art die Anamorphose φ des Punktes f construirt hat, ziehe man die Gerade I φ, welche die Anamorphose von G f oder vielmehr von der Vertikalen G′ F′ ist; hierauf nehme man die Distanzen I μ = I m, I γ = I G, ...; ferner nehme man auf V λ die Distanzen V ν = V n = V ϱ = V R, ... u. s. f. Endlich verbinde man durch einen stetigen Zug alle die Punkte, welche jeder von den Geraden

z f l w, a q, b m p h, ... X G R Y

entsprechen, so erhält man die Curven

$$\zeta\varphi\lambda\omega,\ \alpha\chi,\ \beta\mu\pi\gamma,\ \ldots,\ X\gamma\varrho Y$$

als Anamorphosen jener Geraden, oder vielmehr der Horizontalen

Z′F′L′W′, A′Q′, B′M′P′H′, ... X′Y′;

und nun hat man auf der Horizontalebene die Anamorphosen aller auf der vertikalen Tafel Z′ X′ Y′ gezeichneten Quadrate.

§. 536.

Anamorphosen für einen konischen Spiegel. Es sei ABCD der Kreis, welcher auf der Horizontalebene dem konischen Spiegel als Basis dient, der durch Umdrehung erzeugt ist und seine Spitze in (O, S′) hat; (O, O′) sei der in der Kegelaxe angenommene Augpunkt, und LPQR ein in der Horizontalebene liegendes Quadrat, dessen Anamorphose auf derselben Ebene gesucht werden soll. Taf. 30. Fig. 3.

Man betrachte irgend einen Punkt M dieses Quadrats und ziehe durch denselben einen Sehstrahl, der sich in OM projicirt. Um nun den Durchschnitt dieses Strahls mit der konischen Fläche zu finden, klappe man die Meridianebene OM auf den Hauptmeridian OA auf; hierdurch kommt der Punkt M in E zu liegen, der aufgeklappte Sehstrahl wird (OE, O'E') und schneidet die Erzeugende (OA, O' A') im Punkte F'. Nach diesem Punkte ziehe man die Normale I'F'K' und mache den Winkel K' F' H' = K' F' O'; hierdurch erhält man einen Punkt (H, H') von solcher Lage, dass der von ihm ausgehende und in F' auf den Kegel fallende Lichtstrahl in der Richtung F' O' nach dem Auge des Beobachters reflectirt würde. Führt man aber alle diese Resultate wieder in die Medianebene OM zurück, so kommt der Punkt H in den Punkt m zu liegen, welcher somit die Anamorphose des gegebenen Punktes (M, N') ist.

Verfährt man eben so in Beziehung auf andere Punkte L, N, P, so findet man als Anamorphose für die Seite LP die Curve lmnp; ebenso würde man für die drei anderen Seiten PQ, QR, RL die Anamorphosen pq, qr, rl finden, welche mit lmnp identisch sind, so dass man also, um sie zu erhalten, nur die bereits construirten Punkte l, m, n, ... symmetrisch in die drei anderen, von den verlängerten Diagonalen gebildeten Winkel eintragen darf.

§. 237.

Wenn der anamorphistisch darzustellende Gegenstand viele Einzelnheiten enthält, so wendet man statt der eben erläuterten lieber eine andere der Ponsif'schen (§. 533) ähnliche Methode an. Man zeichnet nämlich auf die horizontale Tafel LPQR die regelmässige Perspective der darzustellenden Gegenstände für den Augpunkt (O, O'), und theilt hierauf die Tafel in Fächer ein durch zwei Reihen Linien, die man so gewählt hat, dass ihre Anamorphosen leicht zu zeichnen sind. Hier ist es am vortheilhaftesten, folgende zwei Linien-Systeme anzuwenden:

1) Verschiedene Strahlen, wie OL, OM, ..., weil die Anamorphosen derselben offenbar wieder andere Gerade, wie mv, sind.

2) Concentrische, um O beschriebene Kreise, wie ME, weil alle Sehstrahlen, welche man nach den Punkten des vollständig ausgezogenen Kreises ME zieht, den Kegel in den Punkten des durch F' bestimmten Parallelkreises treffen und daher ganz in derselben Winkelrichtung wie F' H' zurückgeworfen werden; sie schneiden daher die Horizontalebene in den verschiedenen Punkten des Kreises Hm, der also die Anamorphose des Kreises ME ist.

Dritter Abschnitt.

G n o m o n i k.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Begriffe.

§. 538.

Die Gnomonik lehrt auf eine gegebene, ebene oder krumme Fläche, welche das Zifferblatt *(cadran)* genannt wird, ein System von Linien so zeichnen, dass jede derselben, zu allen Zeiten des Jahres, immer wieder um dieselbe Tagesstunde von dem Sonnenschatten eines Stiftes oder Stieles *(style)* *) bedeckt wird. Sie ist also eine Anwendung der allgemeinen Schattenlehre; da aber die Lösung ihrer Aufgaben sich zugleich auf einige Elementarsätze der Astronomie gründet, so wurde für nöthig erachtet, dieselben kurz hier anzuführen. Diejenigen Leser, welche schon damit bekannt sind, können unmittelbar zum §. 551 übergehen.

§. 539.

Die Fixsterne, so genannt, weil sie ihre gegenseitige Lage stets beibehalten, befinden sich in so grossen Entfernungen von der Erde, dass man dieselben, trotz der äusserst genauen Messungsmethoden und Instrumente, welche die neueren Astronomen anwenden, noch nicht hat messen können; man weiss nur, dass sie mehrere Billionen Meilen übersteigen. Daher erscheint denn auch unsere Erdkugel (obgleich ihr mittlerer Halbmesser nahe 860 geographische Meilen beträgt) nur als ein Punkt im Vergleiche mit diesen ungeheuren Entfernungen, und zwei Sehstrahlen, welche von zwei beliebigen Punkten der Erde nach einem und demselben Sterne gezogen werden, schliessen einen Winkel ein, der so klein ist, dass er auch durch die genauesten

*) Der Stift oder Stiel ist eine auf dem Zifferblatte befestigte cylindrische oder prismatische Stange, an deren Spitze sich manchmal eine dünne Platte mit einem kleinen kreisförmigen Loche befindet, damit derjenige Punkt des Zifferblattes, auf welchen der durch den Endpunkt des Stiftes gehende Lichtstrahl fällt, recht sichtbar werde. Manchmal sogar ist statt des Stiftes nur diese Platte vorhanden, wo dann ihr Mittelpunkt die Spitze des Stiftes ersetzt.

Instrumente nicht gemessen werden und daher ohne Bedenken gleich Null gesetzt werden kann. Man muss daher annehmen, dass alle Geraden, welche vom Mittelpunkte der Erde und von den verschiedenen Punkten ihrer Oberfläche aus noch nach einem und demselben Sterne gezogen werden, parallel sind oder ganz mit einander zusammen fallen.

§. 540.

Diese ausserordentliche Entfernung bei einem gänzlichen Mangel intermediärer Vergleichungspunkte erzeugt bei uns eine optische, übrigens sehr natürliche (§. 244) Täuschung; es scheint uns nämlich, die Sterne seien alle gleichweit von uns entfernt und befinden sich auf einer Kugelfläche von ungeheuerm, aber unbestimmtem Halbmesser, deren Mittelpunkt in unserm Auge oder auch im Mittelpunkte der Erde (§. 539) liegt. Diese Kugel, welche wir das Himmelsgewölbe oder die Himmelskugel nennen, ist also nur eine ideale Fläche, mittelst deren aber die Gesetze der beobachteten Bewegungen leichter ausgesprochen werden können.

§. 541.

Taf. 31. Fig. 1. Jeden Tag nun scheinen die Sterne um die als unbeweglich angenommene Erde Kreise zu beschreiben, deren Mittelpunkte alle in einem gewissen Durchmesser POP′ der Himmelskugel liegen, und deren Ebenen senkrecht auf diesem Durchmesser sind, der die Kugel in zwei Punkten P und P′, Pole genannt, schneidet. Jene Umdrehung geschieht mit gleichförmiger Bewegung und wird in einer Zeit vollendet, welche für alle Sterne dieselbe und in allen Epochen eine unwandelbare ist: ihre Dauer heisst ein Sterntag.

Alle Kreise, deren Ebenen durch die Rotationsaxe POP′ gehen, heissen Meridiane; Aequator hingegen heisst derjenige grösste Kreis EOQ, welcher senkrecht auf dieser Axe steht; die anderen Kreise, wie ZN, TU, . . . heissen Parallelkreise.

§. 542.

Aehnliche Benennungen kommen auf der Erdkugel vor, wo p und p′ die Pole sind, eOq der Aequator und mn der dem ZN entsprechende Parallelkreis ist. Die letztere Uebereinstimmung rührt daher, weil alle Bewohner dieses irdischen Parallelkreises ihr Zenith in irgend einem Punkte des Kreises ZN haben; denn die vertikale Richtung, welche an jedem Orte der Erde durch das Bleiloth bestimmt wird, fällt überall mit dem Halbmesser mO oder nO der Erde zusammen, wann diese als sphärisch und als aus homogenen Schichten bestehend, angenommen wird.

§. 543.

Jeder Beobachter, welcher nicht auf dem Erdäquator eq sich befindet, kann nur einen der beiden Himmelspole P, P′ wahrnehmen; denn im Punkte m z. B. wird ihm durch den scheinbaren Horizont hh′, den man stets als zusammenfallend mit dem wahren HH′ annehmen muss (§. 539), der Punkt P′ verdeckt. Man nennt denjenigen Pol, welcher in unseren Erdstrichen sichtbar ist, den Nordpol; diess ist also hier der Punkt P, wenn empq diejenige Hemisphäre ist, welche unser Europa enthält: P′ hingegen ist der Südpol.

§. 544.

Die Polhöhe für einen Ort m auf der Erde ist der Winkel POH, welchen die Erdaxe mit dem Horizont des Ortes bildet; dieser Winkel kann von dem Orte m aus gemessen werden, weil der Sehstrahl mP mit

OP zusammenfällt. Die Polhöhe eines Orts m ist stets seiner geographischen Breite gleich; unter dieser versteht man seine Entfernung vom Aequator, gemessen durch den Bogen me oder durch den Winkel mOe, der offenbar gleich POH ist.

§. 545.

Die Entfernung eines Punktes S′ auf der Himmelskugel vom Aequator, welche durch den Meridianbogen S′E gemessen wird, heisst die Declination oder Abweichung dieses Punktes; sie kann nördlich oder südlich sein. Die Rectascension oder gerade Aufsteigung des Gestirnes S′ ist der Winkel, welcher zwischen dem durch S′ gehenden Meridian und einem andern als fest angenommenen Meridian enthalten ist. Sie wird also gemessen durch einen Bogen des Aequators, und wird von West nach Ost, von 0 bis 360° gezählt.

§. 546.

Obgleich die Sonne weit nicht so entfernt von uns ist, als die Fixsterne, so beträgt ihre mittlere Entfernung doch 20 Millionen geographische Meilen, welche Zahl sich nur um $^1/_{60}$ mehr oder weniger ändert. Zieht man also von der Sonne aus *) zwei Gerade nach der Erde, die eine nach ihrem Mittelpunkte, die andere nach irgend einem Punkte ihrer Oberfläche, so werden dieselben höchstens einen Winkel von 9 Secunden einschliessen und können also als parallel oder gar als zusammenfallend betrachtet werden, wobei die Annäherung an die Wahrheit noch immer grösser ist, als sie je bei graphischen Operationen gefordert werden kann. Mit einem Worte, man muss bei Fragen dieser Art die Erdkugel als einen einzigen Punkt betrachten, sowohl wenn es sich von Fixsternen, als wenn es sich von der Sonne handelt.

§. 547.

Wenn nun ein in m auf der Erdoberfläche befindlicher Beobachter die Sonne in S sieht, so wird sein Sehstrahl mS, der mit OS zusammenfällt (§. 546), ihm dieselbe auf die Himmelskugel in S′ projiciren, so dass sie sich alsdann auch auf derselben wird zu bewegen scheinen; und um nun, unter Voraussetzung der Unbeweglichkeit der Erde, den scheinbaren Lauf der Sonne zu erklären, muss man ihr zwei verschiedene aber gleichzeitige Bewegungen zuschreiben:

1) Eine tägliche Umdrehung um die Erde, welche sie mit dem ganzen gestirnten Himmel um die Axe POP′ gemeinschaftlich hat. Diese Bewegung ist durchaus gleichförmig und geht in der Richtung von Ost nach West, d. h. von der Linken zur Rechten für einen Beobachter, der auf der Axe POP′ stände und gegen den Nordpol schaute.

2) Eine eigene Bewegung, durch welche die Sonne in einem Jahre den grössten Kreis BS′CB′C′B durchläuft, welcher gegen den Aequator eine Neigung von ungefähr 23°27′ hat, und die Ekliptik heisst. Diese zweite Bewegung ist nicht gleichförmig, sondern unterliegt mehreren Ungleichheiten, deren Anführung hier aber nicht nöthig ist. Sie geht von West gegen Ost, d. h. von der Rechten zur Linken für einen Beobachter in der oben angegebenen Stellung.

*) Nämlich vom Mittelpunkte der Sonnenscheibe aus, was hier nicht gleichgiltig sein kann, da der scheinbare Durchmesser dieser Scheibe ziemlich merklich ist, und ungefähr 32 Minuten beträgt. Diese Bemerkung wird auch im Folgenden immer vorausgesetzt, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist.

§. 548.

In Folge dieser beiden gleichzeitigen Bewegungen beschreibt die Sonne auf der Himmelskugel eine Art von Spirallinie, deren einzelne Windungen nur wenig von eigentlichen Parallelkreisen verschieden sind; denn da die Sonne ihre grösste Declination von 23° 27′ erst in einem Zeitraume von ungefähr 91 Tagen erreicht, so kommen auf die mittlere Veränderung der Declination während eines ganzen Tages nur 16 Minuten; unter dem Aequator selbst erhebt sich diese tägliche Aenderung der Declination bis zu 24 Minuten, während sie bei den Solstitien ganz unmerklich ist.

Im Frühlings-Aequinoctium, zur Zeit des 21. März, befindet sich die Sonne im Punkte B, wo die Ekliptik den Aequator schneidet, und an diesem Tage durchläuft sie nahezu diesen Aequator. An jedem der folgenden Tage nimmt ihre Declination gegen Norden mehr und mehr zu, weil sie vermöge ihrer eigenen Bewegung den Bogen BS′C der Ekliptik durchläuft. Am 22. Juni kommt die Sonne im Sommersolstitium an, d. h. in dem Punkte C der Ekliptik, der am weitesten vom Aequator entfernt ist und auf einem Parallelkreise TU liegt, dessen Declination ET = 23° 27′. Dieser Parallelkreis heisst der Wendekreis des Krebses, und wird von der Sonne fast wörtlich durchlaufen, weil ihre Declination zwei oder drei Tage vor und nach dem Solstitium fast unverändert bleibt, indem die Tangente am Punkte C der Ekliptik mit dem Aequator parallel ist. Vermöge ihrer eigenen Bewegung nun durchläuft die Sonne ferner den Bogen CB′ der Ekliptik; ihre Declination nimmt wieder ab, und sie durchläuft nach und nach wieder die bereits beschriebenen Parallelkreise. Am 23. September befindet sie sich im Punkte B′ des Aequators, den sie in dieser Zeit des Herbst-Aequinoctiums wieder nahezu durchläuft. Hierauf wird ihre Declination südlich auf dem Bogen B′C′ der Ekliptik und sie gelangt gegen den 22. December in den Punkt C′, der auf dem Wendekreise T′U′ des Steinbocks liegt und das Wintersolstitium bezeichnet. Von hieran durchläuft die Sonne noch den Bogen C′B der Ekliptik und nähert sich wieder dem Aequator, den sie am 21. März auf's Neue in B erreicht, nach einem Zeitraume von 365,24226 Tagen, welcher das tropische Jahr genannt wird.

§. 549.

Der wahre Sonnentag ist der Zeitraum, welcher zwischen zwei auf einander folgenden Durchgängen der Sonne durch den Meridian irgend eines Ortes m enthalten ist. Obgleich ein solcher Sonnentag veränderlich ist, so ist er doch stets länger als ein Sterntag, der eine constante Zeitlänge hat. Denn wenn die Sonne heute den Meridian zu gleicher Zeit mit einem gewissen Sterne passirt, so wird sie morgen, wenn dieser Stern wieder in demselben Meridian angekommen ist, vermöge ihrer eigenen Bewegung, ungefähr 1 Grad östlich gerückt sein *) und daher noch ungefähr 4 Minuten Zeit brauchen, bis sie den Meridian wieder erreicht.

§. 550.

Die wahren Sonnentage sind nicht gleich unter sich und zwar aus folgenden Ursachen:

1) Die Bewegung der Sonne in der Ekliptik ist nicht gleichförmig, sondern ist mehreren Ungleichheiten unterworfen, welche die Astronomie berechnen lehrt;

2) Die Schiefe der Ekliptik würde allein schon, wenn auch die Geschwindigkeit der Sonne constant wäre, eine Ungleichförmigkeit ihrer Bewegung in Beziehung auf den Aequator veranlassen. Denkt man sich nämlich durch die Axe POP′ der Pole 24 Stundenebenen gelegt, welche den Aequator in gleiche Bögen,

*) Der mittlere Werth dieses täglichen Zurückbleibens ist der Quotient von 360° durch die Zahl 365,24226 der Jahrestage; er ist 59′8″, welcher Bogen in einer Zeit von 3 Minuten 56 Secunden zurückgelegt wird.

jeden zu 15⁰ theilen, so folgt aus ganz einfachen geometrischen Betrachtungen, dass diese Stundenebenen keine gleiche Bögen auf der Ekliptik abschneiden. Um sich also eine constante Zeitperiode zu verschaffen, haben die Astronomen eine Sonne angenommen, welche den Aequator mit gleichförmiger Geschwindigkeit in derselben Zeit durchläuft, in welcher die wahre Sonne ihren Weg in der Ekliptik zurücklegt; und die auf einander folgenden Durchgänge dieser imaginären Sonne durch unsern Meridian sind es, welche den mittlern Mittag und die mittleren Tage bestimmen, deren Zahl in einem tropischen Jahre noch immer 365,24226 beträgt. Jeder dieser mittleren Tage ist um die Zeit von 3 Minuten 56 Secunden grösser als ein Sterntag (s. die Anmerkung zu §. 549), während der wahre Tag bald kürzer bald länger ist um einige Secunden, als der mittlere Tag. Letztere Differenzen für mehrere Monate zusammengenommen, verursachen zu gewissen Zeiten des Jahres einen sehr bemerklichen Unterschied zwischen der wahren und mittlern Zeit, wie solches in §. 580 gezeigt wird werden.

Ueber den Anfangspunkt der mittlern Zeit kann hier nicht die Rede sein, da die Bestimmung desselben von der elliptischen Bewegung abhängt. Es ist genug zu wissen, dass man für jeden Tag den Ueberschuss oder den Rückstand des wahren Mittags gegen den mittlern berechnen kann, und dass diese Differenzen in den astronomischen Ephemeriden, in der *Connaissance des temps* und im *Annuaire du bureau des longitudes* angegeben sind. Einige andere, zum Theil nur periodische Ungleichheiten, welche, wie z. B. die Nutation, auf die Bewegung der Sonne einen Einfluss üben, kommen hier in keinen Betracht.

§. 551.

In der Gnomonik, wo schon die Natur der anzuwendenden Verfahrungsarten keine astronomische Genauigkeit zulässt, werden folgende Annahmen gemacht:

1) Die Sonne beschreibt jeden Tag einen auf der Axe POP′ der Pole senkrechten Kreis, dessen mit jedem Tage sich ändernder Mittelpunkt beständig in dieser Axe bleibt. Diese Annäherung genügt hier vollkommen, indem zur Zeit der Aequinoctien, da die Declination am schnellsten sich ändert, die Differenz zwischen 6 Uhr Morgens und 6 Uhr Abends nur 12 Bogen-Minuten beträgt (§. 548).

2) Die Bewegung der Sonne ist gleichförmig in demselben Parallelkreise, d. h. sie durchläuft in demselben in gleichen Zeiten gleiche Bögen.

3) Jede Gerade, von einem beliebigen Punkte der Erdoberfläche nach dem Himmelspole gezogen, fällt mit der Axe der Pole zusammen, weil die irdischen Entfernungen im Vergleiche mit dem Abstande der Sonne sehr klein sind (§. 546). Aus demselben Grunde werden auch die Sonnenstrahlen, welche auf die verschiedenen Punkte irgend eines Körpers fallen, in einer und derselben Zeit als parallel unter sich angenommen.

§. 552.

Hienach sei AOP eine gerade, nach dem Nordpole, als dem einzigen auf unserer Halbkugel sichtbaren, gerichtete Linie. Man denke sich durch diese Gerade zwölf unbestimmte Ebenen oder 24 Stundenebenen gelegt, welche unter sich gleiche Winkel, also jeden zu 15 Grad, bilden, und wähle die erste derselben so, dass sie vertikal sei, oder mit dem Meridiane des Orts zusammen falle. Diese Ebenen theilen offenbar jeden der Tagkreise, welche die Sonne in den verschiedenen Zeiten des Jahres durchläuft in 24 gleiche Theile, und die Sonne wird daher immer wieder zu derselben Tagesstunde dieselbe Stundenebene passiren. Desshalb wird auch der von dem Stifte AOP geworfene Schatten das ganze Jahr hindurch zu derselben Tagesstunde immer wieder derselbe sein, weil er bestimmt wird durch den Durchschnitt eben jener Stundenebenen mit der Fläche des Zifferblattes, was letztere auch sein mag. Taf. 31. Fig. 2.

Ist nun das Zifferblatt eine auf der Axe AOP senkrechte Ebene, so darf man nur in dieser Ebene mit einem beliebigen Halbmesser aus dem Fusspunkte O der Axe, als einem Mittelpunkte, einen Kreis beschreiben und diesen vom Punkte b aus, der in der Vertikalebene des Stiftes liegt, in 24 gleiche Theile theilen; alsdann sind die nach den verschiedenen Theilpunkten gezogenen Halbmesser Ob, Oc, Od, ... die Durchschnitte der Stundenebenen und folglich die vom Stifte OP geworfenen Schatten. So hätte man denn eine Aequatorialsonnenuhr, so genannt, weil ihre Ebene mit der des Himmelsäquators parallel ist oder vielmehr mit ihr zusammenfällt (§. 546). Diese Sonnenuhr wäre in der einen Jahreshälfte auf der einen und in der andern Jahreshälfte auf der entgegengesetzten Seite beleuchtet. Da es aber sehr schwer wäre, die Sonnenuhr genau in der hier vorausgesetzten Lage zu erhalten, so führt man sie lieber auf einer unveränderlich festen Fläche, z. B. auf einer Tafel von Marmor, einer Mauer oder einem Pfeiler aus, wobei man in den graphischen Operationen folgendes Verfahren befolgt.

§. 553.

Nachdem man durch den Punkt, in welchem der Stift befestigt werden soll, eine Linie AOP in der Richtung gegen den Pol gezogen, dessen Lage in Beziehung auf den Horizont für jeden Ort der Erde bekannt ist, denke man sich eine auf diese Polaxe senkrechte Ebene und klappe sie sammt dem Punkte O, in welchem sie den Stift schneidet in die Ebene des Zifferblattes auf. Hierauf beschreibe man aus dem aufgeklappten Punkte O, als einem Mittelpunkte, mit beliebigem Halbmesser einen Kreis Obcd, welcher den Aequator der Sonnenuhr darstellen wird. Diesen Aequator theile man in 24 gleiche Theile durch die Halbmesser Ob, Oc, Od..., deren erster dem Meridiane des Ortes entspreche, und suche alsdann die Punkte, in welchen die Verlängerungen jener Halbmesser (die man sich wieder in die Ebene des eigentlichen Aequators erhoben denkt) die Ebene des Zifferblatts schneiden. Nun darf man nur noch diese Punkte mit dem Durchschnittspunkte des Stiftes AOP und des Zifferblatts verbinden, um die Durchschnitte des letztern mit den Stundenebenen, d. h. die Schattenlinien zu erhalten, welche der Stift in den verschiedenen Stunden des Tages auf das Zifferblatt wirft.

Ist die Fläche des Zifferblatts eine krumme, so muss man wieder die vorigen Operationen ausführen, durch welche man immer zwei Punkte von jeder Schattenlinie erhält; da aber diese Schatten nicht geradlinig sind, so müsste man durch die Mittel der darstellenden Geometrie die Durchschnitte der krummen Fläche mit den Ebenen suchen, welche man durch den Stift AOP und jeder der verschiedenen Halbmesser des Aequators sich gelegt denkt. Es würde hiebei meistens auf eine Combination von Ebenen mit Cylindern und Kugeln hinauslaufen, weil die krummen Flächen, auf welche Sonnenuhren construirt werden, entweder Säulen oder Nischen sind.

Der Anwendung dieses Verfahrens auf verschiedene Beispiele werden hier noch einige, in der Folge brauchbare Bemerkungen vorausgeschickt.

§. 554.

Die Bedingung, dass der Stift AOP mit der Axe der Pole parallel sei, ist nicht nur hinreichend, sondern unerlässlich, wenn jede Schattenlinie in allen Tagen des Jahres immer wieder dieselbe Stunde anzeigen soll. Denn hätte der Stift eine andere Richtung, so wären offenbar die Ebenen, welche man durch ihn und die beiden Standpunkte legen kann, welche die Sonne an zwei verschiedenen Tagen in derselben Stundenebene einnimmt, von einander verschieden und würden also auch das Zifferblatt in verschiedenen Linien schneiden, die einzige Stundenebene ausgenommen, welche den Stift enthält.

§. 555.

Ist der Stift vertikal, so heisst er ein Gnomon. Von diesem Instrumente hat die Kunst, Sonnenuhren zu construiren, ihren Namen, obgleich es nur dazu dienen kann, die Mittagsstunde anzugeben, indem man mittelst eines Gnomons auf einer Horizontalebene die Mittagslinie des Orts, mit einer für dergleichen Beobachtungen hinlänglichen Genauigkeit bestimmen kann, besonders wenn es zu einer von den Tag- und Nachtgleichen möglichst entfernten Zeit geschieht (§. 551). Man beschreibt zu diesem Zwecke einen oder mehrere Kreise, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt der Fusspunkt des Gnomons ist. Nun bezeichnet man die Punkte, wo die Kreislinien von der Schattenspitze des vertikalen Stiftes zu verschiedenen Zeiten des Morgens getroffen werden; und eben so auch diejenigen Punkte, in welchen jene Schattenspitze dieselben Kreislinien Nachmittags wieder trifft. Verbindet man hierauf durch Gerade diejenigen dieser Punkte, welche einem und demselben Kreise angehören, so erhält man parallele Sehnen, deren Mitten offenbar mit dem Fusspunkte des Gnomon in einer geraden Linie liegen müssen, und somit den Durchschnitt der Meridianebene mit der Horizontalebene, d. h. die Mittagslinie des Orts bestimmen.

Da die Kernschattengrenze des Gnomon (welche durch den nördlichen Saum der Sonnenscheibe gegeben ist) sich nie ganz deutlich darstellt, so befestigt man öfters oben an dem Stifte eine dünne Scheibe mit einer kleinen Oeffnung, welche das Sonnenbild durchlässt; alsdann bestimmt der Mittelpunkt dieses Bildes auf dem Boden mit Genauigkeit den Endpunkt des Sonnenstrahls. Aber man muss in diesem Falle als Mittelpunkt der concentrischen Kreise den Fusspunkt des Bleilothes annehmen, welches im Mittelpunkte der Oeffnung aufgehängt ist; die Richtung des Stifts, an welchem die Scheibe befestigt ist, kann nun eine ganz beliebige sein.

§. 556.

Man kann die Mittagslinie hinreichend genau auch dadurch bestimmen, dass man den Schatten bezeichnet, den ein Bleiloth um die Mittagsstunde auf den horizontalen Boden wirft. Zur Anzeige dieser Stunde müsste man sich einer guten Uhr bedienen, die man den Tag vorher nach dem wahren, von einer schon construirten Sonnenuhr angezeigten Mittage (§. 550) gerichtet hätte.

§. 557.

Man kann auch zwei Sterne anwenden, deren Rectascensionen (§. 545) um 180° verschieden sind, wobei es übrigens auf einen oder zwei Grade mehr oder weniger nicht ankommt; solche Sterne sind z. B. der Polarstern und das erste ε im Schwanze des grossen Bären. Man hängt an einer Schnur ein Brett von Holz oder ein wohl geebnetes Blatt von Metall auf, das durch sein eigenes Gewicht sich stets in einer vertikalen Ebene zu erhalten strebt. Hierauf dreht man es so lange herum, bis die Sehstrahlen, welche man nach den beiden gewählten Sternen zieht, in dem Augenblicke, da letztere durch den Meridian gehen, in die Ebene des aufgehängten Brettes oder Metallblattes fallen. Einige Versuche reichen zum Gelingen dieser Operation hin; und wird das Instrument nun in der bezeichneten Lage festgehalten, so bestimmt es die Meridianebene. Mittelst zweier in einiger Entfernung aufgehängter Bleilothe, welche man nach dem Instrumente abvisirt, kann man endlich auf einer Tafel oder auf dem horizontalen Boden die gesuchte Mittagslinie bezeichnen.

§. 558.

Ist einmal diese Linie auf einer Horizontalebene gezogen, so ist es leicht, sie auf eine vertikale oder geneigte Mauer überzutragen mittelst zweier über der horizontalen Mittagslinie aufgehängten Bleilothe, die

man gegen die Mauer hin abvisirt; denn man erhält auf diese Art den Durchschnitt der Meridianebene mit der Mauerfläche. Das bequemste Mittel ist aber immer die Anwendung des Schattens, den ein Bleiloth in dem Augenblicke des Mittags, den man durch eine nach der wahren Zeit gerichtete Uhr bestimmt hat, auf die Mauer wirft (§. 556).

§. 559.

Um nun den Stift der Sonnenuhr gehörig zu befestigen, muss man ihn zuerst in die Meridianebene bringen, deren Grundschnitte nach den §§. 555—557 gefunden werden, und ihm hierauf eine solche Neigung geben, dass er mit der Horizontalebene einen Winkel bildet, welcher der Polhöhe, oder was dasselbe ist, der Breite des Ortes gleich ist (§. 454, §. 544), die als bekannt vorausgetzt wird. Praktisch wird diesen Bedingungen gewöhnlich auf folgende Art genügt. Man nimmt einen hölzernen rechten Winkel, auf welchem man eine Gerade zieht, welche mit dem horizontalen Schenkel einen Winkel gleich der Breite des Ortes bildet; in den Punkten, wo diese Gerade die inneren Flächen beider Schenkel trifft, bringt man zwei Löcher an, in welche man die Endpunkte des Stiftes einfügt, der nun, in Beziehung auf den horizontalen Schenkel, die erforderliche Neigung hat. Nachdem man hierauf in der Mauer eine kleine dem Durchschnitte der Meridianebene entsprechende Rinne angebracht hat, fügt man in dieselbe den vertikalen Schenkel des Winkels ein, und ehe man diesen fest macht, versichert man sich: 1) ob die Ebene des Winkels mit der Meridianebene zusammen fällt, durch Abvisiren zweier über der horizontalen Mittagslinie aufgehängter Bleilothe; 2) ob der untere Schenkel des Winkels vollkommen horizontal ist, was man mittelst einer Wasserwaage prüft. Befestigt man hierauf den obern Theil des Winkels in der Mauer, so wird auch der Fusspunkt des Stiftes dadurch fest, und man darf jetzt nur noch den untern Schenkel wegsägen, um den Stift frei in der erforderlichen Lage zu erhalten.

§. 560.

Da man aber gewöhnlich statt des Stiftes eine einfache Scheibe mit einer kreisrunden Oeffnung anwendet, die von zwei oder drei in der Mauer befestigten eisernen Stangen getragen wird, so kann man damit anfangen, dass man der Scheibe eine beliebige, nur von den Forderungen der Symmetrie abhängige Lage gibt. Hierauf bestimmt man die Mittagslinie durch den Schatten, welchen ein im Mittelpunkte der kreisrunden Oeffnung aufgehängtes Bleiloth auf die Mauer wirft in dem Augenblicke des wahren Mittags, den ein Chronometer oder eine Tags zuvor nach einer andern Sonnenuhr gerichtete Uhr anzeigt. Endlich muss man noch auf der verlängerten Mittagslinie den Punkt suchen, in welchem der Stift, wenn ein solcher vorhanden wäre, diese Linie treffen würde. Nun ist es leicht die vom Mittelpunkte O der Scheibe auf die Mittagslinie gefällte Senkrechte zu messen und den Fusspunkt T derselben anzugeben. Zieht man hierauf durch den Punkt
Taf. 32. T eine Horizontale gleich der Senkrechten und construirt einen Winkel T O′ P gleich der Breite des Orts, so
Fig. 2. schneidet der Schenkel O′ P dieses Winkels die Mittagslinie in dem gesuchten Fusspunkte P des Stiftes.

Zweites Kapitel.

Construction einer horizontalen Sonnenuhr.

§. 561.

Es sei A B die Mittagslinie; soll die Zeichnung derselben unmittelbar auf dem Boden ausgeführt werden, so muss dieses nach einer in den §§. 555—557 angegebenen Verfahrungsweise geschehen; wird aber die

Sonnenuhr auf einer beweglichen Fläche construirt, so kann man A B nach Belieben ziehen, muss alsdann aber die Sonnenuhr, ehe sie in die Lage gebracht wird, in der sie bleiben soll, gehörig orientiren. Durch den Punkt A, in welchen der Stift eingefügt werden soll, ziehe man eine Gerade A O′, welche mit A B einen Winkel λ bilde, gleich der Polhöhe oder Breite des Orts, für welchen die Sonnenuhr bestimmt ist; hierauf ziehe man durch einen beliebigen Punkt dieser Geraden, z. B. durch ihren Endpunkt O′ eine auf ihr senkrecht stehende Linie O′ B. Erhebt man jetzt das rechtwinklige Dreieck A O′ B in die Vertikalebene des Meridians A B, so ist die Linie A O′ nach dem Himmelspol gerichtet und stellt daher genau die Lage des Stiftes dar; ferner ist O′ B die Projection des Aequators (§. 553) auf der Meridianebene, und der horizontale Grundschnitt der Ebene dieses Aequators ist offenbar die Gerade E B Q, welche die Aequinoctiallinie der Sonnenuhr heisst. Klappt man nun diesen Kreis um E Q in die Horizontalebene auf, so kommt der Mittelpunkt, der im Punkte O′ des Stiftes sich befindet, in den Punkt O zu liegen; und beschreibt man daher aus diesem Punkte mit einem beliebigen Halbmesser O b eine Kreislinie und theilt sie von dem in der Meridianebene liegenden Punkte b aus in 24 gleiche Theile, so erhält man die Halbmesser O b, O c, O d . . . als Grundschnitte der Stundenebenen auf dem aufgeklappten Aequator. Nun erhebe man diesen Kreis wieder in seine wahre Lage und bemerke: 1) dass hiebei die Punkte B, C, D . . . in welchen die verlängerten Halbmesser die Gerade E Q schneiden, unverändert bleiben; 2) dass diese Punkte auf der Horizontalebene liegen und als solche den Durchschnitten dieser letztern Ebene mit den Stundenebenen, welche alle durch den Punkt A gehen, angehören müssen. Hieraus aber erfolgt offenbar, dass diese Durchschnitte oder vielmehr die Stundenlinien auf der Sonnenuhr die Geraden A B, A C, A D . . . sind.

Man bemerke hier auch, dass die Abschnitte B C, B D, . . . nichts anderes sind, als die trigonometrischen Tangenten der Bögen von 15, 30, 45 . . . Graden in einem Kreise, dessen Halbmesser O B ist; die Winkel B A C, B A D . . . aber werden nicht durch die nämlichen Gradzahlen gemessen.

§. 561 bis.

Wenn ein Halbmesser des Aequators, wie z. B. O F, die Aequinoctiallinie E Q in einem zu entfernten Punkt schneiden sollte, so kann derselbe auf folgende Art ersetzt werden. Die durch den Halbmesser O F und den Stift A O′ (beide im erhobenen Zustande gedacht) gelegte Stundenebene muss die Vertikalebene M Q in einer mit dem Stifte parallelen Geraden schneiden, welche durch den in F aufgeklappten Punkt geht: führt man nun diesen letztern in F′ in die Projection O′ B des Aequators zurück und zieht parallel mit O′ A die Linie F′ G′, so ist diese die auf die Meridianebene bezogene Projection derjenigen Geraden, in welcher die Stundenebene die Vertikalebene M Q schneidet. Hieraus folgt, dass der horizontale Grundschnitt dieser Geraden in G ist, und da dieser Punkt offenbar dem Durchschnitte der Stundenebene mit der Horizontalebene angehört, so ist also A G dieser Durchschnitt.

§. 562.

Es wurden in Fig. 3 nur die Stundenlinien bis 6 Uhr Vor- und Nachmittags angegeben, und diese beiden letzteren sind offenbar die mit E Q parallelen Geraden A N und A M, weil die ihnen entsprechenden Stundenebenen durch den Durchmesser n O m gehen würden, der, in diesem Falle, parallel mit der Aequinoctiallinie ist. Um die übrigen Stundenlinien zu finden, darf man nur die vorhergehenden über A hinaus verlängern. Denn es macht z. B. um 5 Uhr Morgens die Stundenebene der Sonne mit dem untern Meridian einen Winkel, welcher demjenigen gleich ist, welchen sie um 5 Uhr Abends mit dem obern Meridian macht; der erste dieser Winkel aber liegt rechts, der zweite links von A B; folglich ist von beiden Stundenebenen die eine die Verlängerung der andern, und der Schatten des Stiftes wird also in diesen beiden Zeitpunkten auf dieselbe Gerade, aber von A aus in entgegengesetzten Richtungen fallen.

Um endlich die Schattenlinien für halbe Stunden zu erhalten, müsste man jeden der Bögen b c, c d . . . des Aequators in zwei gleiche Theile theilen und die den Theilpunkten entsprechenden Halbmesser bis zur Aequinoctiallinie E B Q verlängern, oder, wo diess nicht angeht, auf die nämliche Art verfahren, wie im vorigen Paragraph für die Linie A G.

§. 563.

Es soll nun die Curve gefunden werden, welche der Schatten des Endpunktes O′ des Stiftes täglich beschreibt. Der Sonnenstrahl S O′ α, welcher durch diesen Punkt geht, beschreibt an einem und demselben Tage die beiden Mäntel einer conischen Fläche, die ihre Spitze in O und zur Basis den Parallelkreis hat, den die Sonne um diese Zeit durchläuft. Da aber dieser Parallelkreis stets senkrecht auf dem Stifte ist, und seinen Mittelpunkt in dieser Geraden hat, so folgt, dass der Sonnenstrahl einen Umdrehungskegel um A O′ beschreibt, indem er mit letzterer Linie einen Winkel bildet, welcher dem Complement der Sonnen-Declination gleich und wie diese von einem Tage zum andern veränderlich ist. Die Tagescurve dieses Strahls auf der Sonnenuhr ist also ein Kegelschnitt, welcher, in unseren Klimaten, stets eine Hyperbel sein wird; denn da die Sonne nie 24 Stunden über dem Horizont bleibt, so muss dessen Ebene die beiden Mäntel des Kegels schneiden und also einen hyperbolischen Schnitt erzeugen.

Angenommen nun, man wolle die Schattencurve für den Tag des Sommersolstitiums construiren. Man ziehe in der Ebene des Dreiecks O′ A B eine Gerade O′ α, welche mit dem Aequator O′ B einen Winkel von 23° 27′ bilde, *) so stellt diese Gerade die Richtung des Sonnenstrahls um Mittag dar, und es ist also der Punkt α, in welchem sie die Mittagslinie A B trifft, die Schattengrenze des Stiftes um diese Stunde. Für einen andern Zeitpunkt desselben Tages, z. B. für zwei Uhr, macht der Sonnenstrahl mit dem Stifte noch immer einen Winkel gleich A O′ α, aber er befindet sich jetzt in der Stundenebene, welche durch A O′ und A D geht. Diese zwei Geraden bilden mit dem Durchschnitte O D derselben Ebene und des Aequators ein in O′ rechtwinkliges Dreieck; und klappt man dieses um A O′ in die Meridianebene auf, indem man A D′ = A D, oder auch O′ D′ = O D nimmt, so erhält man A O′ D′ als Aufklappung. In dieser wird der fragliche Sonnenstrahl die Lage O′ α erhalten, und der Durchschnitt dieser verlängerten Geraden mit A D′ gibt die Schattengrenze δ' des Stiftes, die man sofort durch einen Kreisbogen in den Punkt δ auf A D zurückführen muss. Wendet man dieselbe Construction auf andere Stundenlinien an, so erhält man eine Reihe von Punkten $\alpha, \delta, \gamma, \ldots$ welche, durch einen stetigen Zug vereinigt, die Curve darstellen, die der Schatten des Punktes O′ am Tage des Sommersolstitiums durchläuft.

§. 564.

Für einen andern Tag des Jahres macht man den Winkel B O′ ε gleich der Declination der Sonne an diesem Tage, und verfährt ganz auf dieselbe Art wie vorhin, wodurch man alsdann die Hyperbel $\varepsilon\,\varrho$. . als die von der Spitze O′ des Stiftes beschriebene Schattencurve erhält. Man sieht, dass diese Hyperbeln sich immer mehr öffnen, je mehr die Declination abnimmt, und an dem Tage des Aequinoctiums, da die Sonne in der Ebene O′ B Q des Aequators bleibt, bleibt auch der Schatten des Punktes O′ beständig in der Geraden E B Q, welche letztere desshalb die Aequinoctiallinie heisst. Nach diesem Zeitpunkte kehren die Hyperbeln ihre Concavität nach der entgegengesetzten Seite, und ist endlich im Wintersolstitium die Declination der Sonne gleich B O′ β = B O′ α geworden, so beschreibt der Schatten des Punktes O′ die Curve $\beta\,\varphi$, welche

*) Dieser Werth ist hinreichend genau für die nördlichste Declination der Sonne; aber er bezieht sich auf den Mittelpunkt der Sonnenscheibe und entspricht also der Anwendung einer Scheibe mit kreisförmiger Oeffnung; will man dagegen als Stift eine eiserne Stange anwenden, so muss obiger Werth um 16′, d. i. um den scheinbaren Halbmesser der Sonne, vermehrt werden, weil in diesem Falle der nördlichste Rand der Sonnenscheibe es ist, welcher den Kernschatten bestimmt.

der zweite Ast der Hyperbel $\alpha\delta\gamma$ ist. Denn da die beiden Sonnenstrahlen $O'\alpha$ und $O'\beta$ gleiche Winkel mit dem Stifte A O′ P bilden, so beschreiben sie bei ihrer Umdrehung um denselben innerhalb 24 Stunden die beiden entgegengesetzten Mäntel eines und desselben Kegels, welcher von der Ebene der Sonnenuhr in den beiden Aesten einer und derselben Hyperbel geschnitten wird. Diese Relation wiederholt sich für alle gleichen Declinationen der Sonne vor und nach dem Aequinoctium, und die Spitzen werden stets in der Mittagslinie A B O liegen.

Alle diese Hyperbeln heissen auch Declinationscurven und zeichnet man sie, von Monat zu Monat z. B. auf die Sonnenuhr, so kann man auf letzterer nicht nur die Tagesstunde, sondern auch die Jahreszeit, in welcher man sich befindet, ablesen. Zwar, was jede einzelne Hyperbel betrifft, so erleidet die Declination der Sonne, in Folge der Anziehung des Mondes gegen den Erdkörper, von Jahr zu Jahr eine kleine Aenderung, und wird erst nach 19 Jahren um dieselbe Jahreszeit wieder dieselbe; aber diese periodischen Aenderungen sind fast unmerklich und haben keinen Einfluss auf die graphischen Operationen.

§. 565.

Es ist interessant, die Schattenlinie zu suchen, welche für eine gegebene Declination, z. B. für $BO'\alpha$ dem Auf- oder Untergange der Sonne entspricht. In diesem Tageszeitpunkte ist der Sonnenstrahl S O′ horizontal, und schneidet die Ebene der Sonnenuhr in unendlicher Entfernung; es müssen also dieser Strahl und der horizontale Grundschnitt der ihm entsprechenden Stundenebene parallel mit der Asymptote der Hyperbel $\alpha\delta\gamma$ sein. Wollte man sich also die Mühe nehmen, diese Asymptote zu suchen, was wohl möglich ist, da man die reelle Axe $\alpha\beta$ und die Coordinaten eines Punktes der Curve kennt, und hieraus die imaginäre Axe vermittelst des Ausdrucks

$$b = \frac{a\,y}{\sqrt{(x-a)(x+a)}}$$

sich leicht graphisch darstellen lässt, so dürfte man nur durch A eine Parallele mit dieser Asymptote ziehen. Aber es ist einfacher und eleganter, die Schattenlinie des Untergangs zu suchen und aus ihr die Asymptote abzuleiten, indem man durch die Mitte von $\alpha\beta$ eine Parallele mit jener Schattenlinie zieht.

Um nun einen Punkt δ der täglichen Schattencurve zu finden (§. 563), musste man den Durchschnitt δ' der Geraden $O'\alpha$ mit der Aufklappung A D′ des Grundschnitts der Stundenebene suchen; hier also, wo dieser Durchschnittspunkt unendlich weit entfernt ist, muss der Grundschnitt A D′ im Augenblick des Sonnenuntergangs mit $O'\alpha$ parallel sein. Man ziehe daher aus A eine Parallele mit $O'\alpha$ und verlängere sie bis zu ihrem Durchschnitte x′ mit B O′; hierauf beschreibe man aus A, als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser A x′ einen Kreisbogen, welcher die Gerade BE in x schneidet, so ist die verlängerte Linie Ax, rechts von AB, die Stundenlinie für den Untergang der Sonne. Die für den Sonnenaufgang liegt links von AB symmetrisch mit der vorigen.

§. 566.

Um zu untersuchen, welche Stunde auf der Sonnenuhr der Schattenlinie des Untergangs entspricht, darf man nur den Halbmesser O x ziehen, welcher auf dem Aequator dieser Schattenlinie entspricht, und so kann man also graphisch die Aufgabe lösen: zu finden, um welche Stunde die Sonne an einem gegebenen Tage des Jahres auf- oder untergeht; denn man darf nur die nämlichen Constructionen für eine andere Declination $BO'\varepsilon$ der Sonne wiederholen.

Drittes Kapitel.

Vertikale, nicht declinirende Sonnenuhr (Mittagsuhr).

§. 567.

Taf. 31. Fig. 4. Man bezeichnet mit diesem Namen eine Sonnenuhr, welche auf einer senkrecht auf dem Meridian des Ortes stehenden Vertikalebene gezeichnet ist. Ist P der Punkt, in welchem der Stift befestigt werden soll, so ziehe man die Vertikale P B; diese ist offenbar die Mittagslinie der Sonnenuhr, d. h. der Durchschnitt der letztern mit der Meridianebene. Da nun diese Ebene den Stift enthält und zugleich auch die Sonne, wenn diese die Hälfte ihres Tagbogens zurückgelegt hat, so muss also P B die Stundenlinie des Mittags sein. Man klappe nun den Stift um P B in die Ebene der Sonnenuhr um, indem man den Winkel B P O′ gleich dem Complement der Breite λ des Ortes macht; hierauf ziehe man senkrecht auf P O′ die Gerade O′B, welche, wenn man das Dreieck P O′B in die Meridianebene erhebt, die Projection des Aequators darstellt. Der Durchschnitt dieses Aequators mit der Sonnenuhr, d. h. die Aequinoctiallinie ist also die Horizontallinie E B Q. Klappt man nun den Aequator um E B Q auf die Sonnenuhr auf, so fällt der Mittelpunkt O′ in O; und beschreibt man um den letztern Punkt einen beliebigen Kreis, theilt diesen in 24 gleiche Theile und zieht die Radien O b, O c, O d, . . . so bestimmen diese, wenn man sie bis zu ihren Durchschnitten B, C, D, . . . mit der Aequinoctiallinie verlängert, die Stundenlinien P B, P C, P D, ...

Was den Radius O f betrifft, dessen Durchschnitt mit E B Q über das Zeichnenblatt hinausfällt, so ersetzt man diesen Durchschnitt durch den Punkt G auf dieselbe Weise, wie es in §. 562 für die horizontale Sonnenuhr geschehen. Auch die Tagescurven, welche der Schatten des Punktes O′ beschreibt, werden hier eben so wie dort bestimmt.

§. 568.

Ueberhaupt wird jede weitere Erklärung überflüssig, wenn man bedenkt, dass das Dreieck P O′ B der gegenwärtigen Figur, dem Dreieck A O′ B der Figur 3, ähnlich ist; nur ist hier der am Stifte anliegende Winkel P das Complement von $A = \lambda$, so dass also die **vertikale** Sonnenuhr für eine Breite λ nichts anderes ist als die **horizontale** Sonnenuhr für die complementäre Breite $90-\lambda$. Es ist auch in der That a priori klar, dass, wenn zwei Punkte auf der Kugel, die unter einerlei Meridian liegen, um 90^0 von einander entfernt sind, der Horizont des ersten Punktes der Vertikalen des zweiten parallel ist, und umgekehrt; nur wird, weil diese zwei Punkte auf entgegengesetzten Hemisphären liegen, der Schatten des Sommersolstitiums der längste und der des Wintersolstitiums der kürzeste auf der vertikalen Sonnenuhr sein.

Viertes Kapitel.

Declinirende Vertikal-Sonnen-Uhr.

§. 569.

Taf. 32. Fig. 1. Hier befindet sich die Ebene der Sonnenuhr, welche mit der Ebene der Figur zusammenfallend angenommen wird, nicht mehr senkrecht auf der Meridianebene. Da aber beide Ebenen vertikal sind, so ist ihr Durchschnitt, oder die Mittagslinie, ebenfalls eine Vertikale P B Z, die man durch den Punkt P gezogen

annimmt, in welcher der Stift befestigt werden soll. Letztern klappe man um P B in die Ebene der Sonnenuhr auf, indem man die Gerade P O′ zieht, welche mit der Vertikalen einen Winkel gleich dem Complement der Breite λ bildet. Der Aequator, welcher stets senkrecht ist auf dem Stifte, wird dargestellt durch die Gerade O′B, welche man unter einem Rechten auf P O′ gezogen hat. Nur muss man sich jetzt das Dreieck P O′ B so lange um P B gedreht denken, bis es in die Meridianebene zu liegen kommt, und zu diesem Zwecke ist es nöthig, das Azimuth der Sonnenuhr oder ihre Abweichung von der West-Ostlinie zu bezeichnen. Denkt man sich desshalb durch B eine Horizontalebene, deren Grundlinie A′B ist, und zieht man in dieser Ebene eine Gerade B A″, welche mit der Horizontalen B Z einen Winkel A″ B Z, gleich der (hier westlich angenommenen) Abweichung der Sonnenuhr bildet, so ist offenbar B A″ der horizontale Grundschnitt der Meridianebene, und man muss daher das Dreieck P O′B in die Vertikalebene P B A″ zurückführen. Verlängert man ferner den Stift bis zum Punkte A′ der Grundlinie, und nimmt B A″ = B A′, so ist A″ der horizontale Grundschnitt des Stifts, und dieser leztere ist folglich vertikal in der Geraden P A projicirt, welche man auch die Substylarlinie nennt.

§. 570.

Nun wäre es leicht, die horizontale Sonnenuhr zu zeichnen. Man würde die Ebene des Aequators um ihren horizontalen Grundschnitt, der eine auf B A″ senkrechte und die Richtung von West nach Ost anzeigende Gerade wäre, umklappen, wodurch der Mittelpunkt O′ in O″ zu liegen käme; um diesen Punkt würde man einen Kreis beschreiben, hierauf dessen Radien bis zu der West-Ostlinie verlängern, und endlich die Durchschnittspunkte mit dem Fusspunkte A″ des Stiftes verbinden. Um nun aus dieser horizontalen Sonnenuhr die vertikale abzuleiten, müsste man die Stundenlinien der erstern bis zu ihrem Durchschnitte A′B A mit der vertikalen Sonnenuhr verlängern und hierauf die hier entstehenden Durchschnittspunkte mit dem Punkte P des Stiftes verbinden. Dieses allgemeine Verfahren aber, wodurch die Construction irgend einer ebenen Sonnenuhr von einer horizontalen abhängig gemacht wird, kann durch folgendes directe, einfachere und elegantere Verfahren ersetzt werden.

§. 571.

Man construire die Aequinoctiallinie der vertikalen Sonnenuhr, d. h. den Durchschnitt dieser letztern mit der Ebene des Aequators. Dieser ist in O′B aufgeklappt; führt man ihn aber in seine eigentliche auf dem Stifte senkrechte Lage zurück, so wird er die Vertikalebene in einer auf der Vertikalprojection P A des Stiftes senkrechten Geraden E B Q schneiden, welche somit also die gesuchte Aequinoctiallinie sein wird. Dreht man hierauf die Ebene des Aequators um diesen Durchschnitt E Q, bis sie in die Ebene der Sonnenuhr zu liegen kommt, so muss der Mittelpunkt O′, der vertikal in O projicirt ist, nothwendig in irgend einen Punkt der unbestimmten, auf E Q senkrechten Geraden P O A fallen; und da die Entfernung dieses Mittelpunktes von dem Punkte B der Umdrehungsaxe beständig gleich B O′ bleibt, so darf man also nur mit letzterer Distanz einen Kreisbogen beschreiben, dessen Durchschnitt ω mit P A sofort die Aufklappung des Aequatormittelpunktes auf der vertikalen Sonnenuhr bestimmt.

Nun beschreibe man aus ω mit beliebigem Halbmesser einen Kreis, theile ihn von dem im Meridiane liegenden Radius ωB an in 24 gleiche Theile, und verlängere die Halbmesser ωb, ωc, ωd, . . . bis zu ihren Durchschnitten mit der Aequinoctiallinie; hiedurch erhält man die Punkte B, C, D, . . welche während der Wiederaufrichtung des Aequators um E B Q unverändert bleiben, und mithin der Sonnenuhr und den verschiedenen Stundenebenen stets gemeinschaftlich sind, so dass man also als Durchschnitte der letzteren mit der Sonnenuhr die unbestimmten Geraden P B, P C, P D, . . erhält.

§. 572.

Wenn ein Halbmesser des Aequators, wie z. B. ω g, die Aequinoctiallinie in zu grosser Entfernung schneidet, so kann man diesen Durchschnittspunkt auf folgende Art ersetzen. Man denke sich eine mit der Meridianebene P B A″ parallel gelegte schneidende Ebene. Geht diese durch G, so schneidet sie die Stundenebene in einer mit dem Stifte parallelen Geraden, deren Aufklappung und Projection zugleich die mit P A ω parallel gezogene Linie G H ist. Die nämliche schneidende Ebene schneidet den Aequator in einer Geraden, deren Aufklappung G K parallel mit ω B ist und welche die Sonnenuhr in dem in der Aufklappungsaxe E Q liegenden Punkte K schneidet: mithin ist die Vertikale K H der Durchschnitt der Sonnenuhr mit der schneidenden Ebene, und da die Gerade G H die Sonnenuhr offenbar in dem Schnitte K H treffen muss, so geschieht diess also in dem Punkte H. Da nun die Gerade G H in der durch den Halbmesser ω g gelegten Stundenebene liegt, so muss also der Punkt H, in welchem sie die Sonnenuhr trifft, dem Durchschnitte jener Stundenebene mit der Sonnenuhr angehören; dieser Durchschnitt ist also P H.

§. 573.

Will man die Tagescurve construiren, welche der Schatten der Spitze O′ des Stiftes (§. 563) z. B. am Tage des Sommersolstitiums durchläuft, so ziehe man in der aufgeklappten Meridianebene eine Gerade O′ β, welche mit dem Aequator O′ B einen Winkel von 23° 27′ bildet *), alsdann ist der Punkt β, in welchem O′ β die Mittagslinie trifft, der Schatten jener Spitze um die Mittagsstunde. Zu einer andern Tagesstunde, um 11 Uhr z. B., bildet der durch O′ gehende Sonnenstrahl mit dem Stifte noch immer den Winkel β O′ P, aber er befindet sich nun in der Stundenebene, welche den Halbmesser ω f F des Aequators enthält. In dieser Ebene nun liegt ein in O′ rechtwinkliges Dreieck, das P F zur Hypotenuse hat, und das, um den Stift in die Meridianebene aufgeklappt, offenbar P O′ F′ wird, wo P F′ = P F genommen ist. Verlängert man aber diese Hypotenuse P F′ bis zu dem ebenfalls aufgeklappten Sonnenstrahl O′ β, so erhält man φ' als den Endpunkt des Schattens, den man nun durch einen aus P beschriebenen Kreisbogen in φ auf P F zurückführen muss. Auf diese Weise erhält man die Hyperbel $\varphi \beta \ldots$; den zweiten Ast $\alpha \delta \ldots$ derselben, welcher sich auf den Tag des Wintersolstitiums bezieht (§. 565), erhält man auf eine ähnliche Art, indem man die nördliche Abweichung B O′ α gleich B O′ β nimmt. Da das ganze Verfahren im Einzelnen dem in §. 563 ähnlich ist, so wird nur noch bemerkt, dass hier die beiden Scheitel jeder Tageshyperbel nicht auf der Mittagslinie, sondern auf der Substylarlinie P A ω liegen, und dass man sie unmittelbar erhalten kann, wenn man auf letztere Gerade, indem man sie als eine Stundenlinie betrachtet, die bei Construction der auf der Stundenlinie P F liegenden Punkte φ und δ befolgte Methode anwendet. Die Asymptoten erhält man wie in §. 565.

§. 574.

Für einen andern Tag als den des Solstitiums bildet man einen Winkel B O′ γ gleich der jeweiligen Declination der Sonne, und indem man nun von der Geraden O′ γ denselben Gebrauch macht, wie vorhin von der Linie O′ β, erhält man jeden Punkt ϱ der Hyperbel, welche der Schatten des Punktes O′ an diesem Tage

*) Dieser Werth der Declination bezieht sich auf den Mittelpunkt der Sonnenscheibe und wird angewendet, wenn der Stift durch eine Scheibe mit kreisförmiger Oeffnung ersetzt ist; bedient man sich aber als Stift einer eisernen Stange, so muss jener Werth um 16′ vermindert werden, weil alsdann der **südliche** Rand der Sonnenscheibe den Kernschatten auf der **Vertikal**uhr bestimmt, während auf einer **horizontalen** Uhr dieser Schatten durch den **nördlichen** Rand jener Scheibe hervorgebracht wird.

durchläuft. Diese verschiedenen Hyperbeln heissen die **Declinationscurven**, und an beiden Aequinoctien reduciren sie sich auf den Durchschnitt E B Q des Aequators mit der Sonnenuhr.

Vervielfacht man diese Declinationscurven und schreibt jeder den Jahrespunkt bei, auf welchen sie sich bezieht, so kann man also auf der Sonnenuhr nicht nur die Tagesstunde, sondern auch den Monat und sogar die Monatstage ablesen.

§. 575.

Damit die Vertikal-Sonnenuhr erleuchtet werde, muss die Sonne nicht bloss über dem Horizonte, sondern auch **vor** der Sonnenuhr sich befinden; diese doppelte Bedingung gibt zu folgender Aufgabe Veranlassung: **Welches ist die dem Mittage fernste Stunde, welche noch von der Sonnenuhr angezeigt werden kann, und an welchem Tage des Jahres wird solches geschehen?**

Es sei A Y B der Horizont, Y Z X der grösste Kreis, in welchem die Ebene der Sonnenuhr enthalten ist, P der Pol und P Y, P Y′, P Y″ seien verschiedene Stundenebenen; ferner seien Y V, Y′ V′, Y″ V″ verschiedene Parallelkreise des Aequators E R Q, welcher den Horizont in E Q schneidet. Man sieht nun, dass die Sonne, wenn sie den Parallelkreis Y V durchläuft, die Sonnenuhr von dem Augenblicke ihres Aufgangs an beleuchtet, welcher in Y stattfindet, d. h. zu einer Tageszeit, welche dem Stundenkreise P Y entspricht. Durchläuft die Sonne den weiter südlich liegenden Parallelkreis Y′ V′, so geht sie erst im Punkte Y′ auf, welcher einem Stundenkreise angehört, der näher beim Mittage liegt als P Y. In dem Parallelkreise Y″ V″ geht die Sonne zwar bälder auf, nämlich im Punkte Y″, welcher im Stundenkreise P Y″ liegt; aber in diesem Zeitpunkte ist die Sonne hinter der Vertikalebene Y Z X der Sonnenuhr, und ist noch hinter derselben, wenn sie im Punkte u des Stundenkreises P Y ankommt. Daher wird die Sonne, wenn sie den Parallelkreis Y V durchläuft, die Sonnenuhr in der frühesten Stunde zu beleuchten anfangen, und diese Stunde lässt sich aus dem zwischen P Y und dem obern Meridiane P Z A enthaltenen Flächenwinkel finden. Taf. 31. Fig. 5.

Man sieht zugleich, dass die späteste Stunde, in welcher die Sonne aufhören wird, die Sonnenuhr zu beleuchten, dann eintritt, wenn sie im Punkte X untergeht, welcher in der Verlängerung P X des Stundenkreises P Y liegt; so dass also diese späteste und jene früheste Stunde stets um 12 Stunden differiren, aber beide nicht in demselben, sondern in solchen Jahreszeitpunkten eintreten, wenn die Sonne entgegengesetzte aber gleiche Abweichungen hat.

§. 576.

In dem sphärischen Dreiecke A P Y nun, das in A rechtwinklig ist, kennt man die Seite A P, welche gleich 180^0 weniger der Breite, und die Seite A Y, welche gleich $90^0 \mp$ dem Azimuth der Sonnenuhr ist; hieraus also kann man leicht den Winkel P und die Hypotenuse P Y berechnen. Will man aber nur graphische Mittel in Anwendung bringen, so nehme man statt des sphärischen Dreiecks A P Y das körperliche Dreieck, dessen Kanten O A, O P, O Y sind, und in welchem man zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel, der ein Rechter ist, kennt; hieraus kann man leicht (darst. Geom. §. 62) den Flächenwinkel P und die Seite P O Y oder den Bogen P Y finden, dessen graphische Grösse man in Grade und Minuten verwandeln muss.

Hat man z. B. gefunden $P = 68^0\,45'$, so muss man, da die gerade aufsteigende Bewegung in 24 Stunden 360 Grade, mithin in jeder Stunde 15 Grade beträgt, den Werth von P durch 15^0 dividiren, wodurch man 4 Stunden 35 Minuten als Zeitwerth des Stundenwinkels A P Y erhält. Zieht man nun diesen letzten Werth von 12 Stunden ab, so erhält man 7 Uhr 25 Minuten als den frühesten Zeitpunkt, um welchen die Sonnenuhr erleuchtet zu werden anfängt, und diess an einem gewissen Tage, der nun noch bestimmt werden muss.

Zu diesem Zwecke bemerke man, dass der Bogen $PY = 90 \pm mY$, welcher letztere Bogen die Declination des fraglichen Parallelkreises YV ist; zieht man daher 90° von dem für PY gefundenen Werthe ab, so zeigt der Ueberrest die gesuchte Declination, welche südlich oder nördlich ist, je nachdem jener Rest positiv oder negativ ausfällt. Nun kann man aus den astronomischen Jahrbüchern ersehen, welcher Jahrestag jener *Declination* der Sonne entspricht, und man wird offenbar zwei solche Tage finden.

§. 577.

Taf. 32. Fig. 1. Aber der erste Theil der Aufgabe, welcher auch der interessanteste ist, kann auf eine weit einfachere Art und auf der Sonnenuhr selbst gelöst werden. Da nämlich zu der gesuchten Stunde die Sonne sich im Horizonte und zugleich in der Ebene der Sonnenuhr befinden muss (§. 576), so folgt, dass die Sonnenstrahlen, welche den Stift der Fig. 1 bestreifen, horizontal und parallel mit der Sonnenuhr sind, daher denn die Stundenebene, welche diese Strahlen enthält, das Zifferblatt in der Horizontalen Px schneiden muss; diese ist also die erste der Stundenlinien, welche Morgens wirklich von einem Schatten getroffen wird. Will man ferner auch wissen, welcher Stunde sie entspricht, so verlängere man sie bis zu ihrem Durchschnittspunkte mit der Aequinoctiallinie EQ, und verbinde diesen Punkt mit dem Mittelpunkte ω des Aequators; also dann erhält man einen Halbmesser dieses Kreises, durch welchen ein Bogen $bfgx'$ bestimmt wird, den man zuerst in Graden ausdrücken und hierauf in Zeitmass verwandeln muss.

Die letzte Stundenlinie, welche Abends vom Schatten getroffen wird, ist wieder die Horizontale Py, und sie muss nothwendig einem Zeitpunkte entsprechen, der von der gefundenen Frühstunde um 12 Stunden entfernt ist. Aber der Schatten erreicht diese beiden äussersten Stundenlinien nicht in derselben, sondern in von einander verschiedenen Jahreszeiten.

§. 578.

Man zeichnet gewöhnlich auf die Sonnenuhr auch noch die Mittagslinie der **mittleren Zeit**, d. h. die Curve, welche von der Schattenspitze täglich wieder getroffen würde im Augenblicke, des von einer das ganze Jahr hindurch gleichförmig gehenden Uhr angezeigten, Mittags. Diese Linie weicht von der Mittagslinie $PB\theta$ der **wahren Zeit** ab, weil durch die im §. 550 erwähnten Ursachen die mit dem Aequator parallel gehende Bewegung der Sonne bald langsamer, bald schneller ist; so dass die Sonne also einer richtig gehenden Uhr bald vor-, bald nachgeht. Diese von einem Tage zum andern nur wenig merklichen Differenzen wachsen bis zu 14 und 16 Minuten an, und werden durch astronomische Formeln voraus berechnet; man findet sie für jeden Tag in der *Connaissance des temps* oder im *Annuaire du Bureau des longitudes*, überhaupt in allen astronomischen Jahrbüchern und Kalendern aufgezeichnet.

§. 579.

Für den 3. November z. B. findet man im *Annuaire*, dass im Augenblicke des wahren Mittags es nur $11^h\ 44^m$ mittlere Zeit ist *); daraus also folgt, dass der Mittag mittlerer Zeit 16 Minuten nach dem wahren eintritt. Man nehme also auf dem Aequator, östlich vom Punkte b, einen Bogen br von 4° **); hierauf construire man vermittelst des Halbmessers $\omega r R$ auf der Sonnenuhr die Stundenlinie PR, welche im Augenblicke

*) Die Secunden, + oder —, werden hier vernachlässigt; sie wechseln überdiess von einem Jahre zum andern aus verschiedenen Ursachen, so dass nach einem Jahrhunderte eine Mittagslinie mittlerer Zeit merklich ungenau wird.

**) Denn weil die Sonne in 24 Stunden 360 Gerade parallel mit dem Aequator durchläuft, so entspricht eine Stunde 15 Graden und eine Zeitminute 15 Bogenminuten; mithin entsprechen 16 Zeitminuten 4 Graden.

des mittlern Mittags den Schatten des Punktes O' aufnehmen wird. Um aber den Ort des Schattens genau zu bestimmen, verfahre man wie in §. 573, als man die Punkte φ und δ der Curve des Tagschattens construirte; nachdem man nämlich den Sonnenstrahl $O'\gamma$ so gezogen, dass er den Winkel $B\,O'\gamma = 15^0$ bildet, welches die Declination der Sonne am 3ten November ist, denke man sich diesen Strahl so lange um den Stift gedreht, bis er in die durch P R gehende Stundenebene kommt; hierauf klappe man das in dieser Ebene enthaltene Dreieck, das in O' rechtwinklig ist und PR zur Hypotenuse hat, in die Meridianebene auf, wo es sich als P O' R' darstellt; nun bestimmt der Durchschnitt von P R' mit O' y einen Punkt ϱ', den man mittelst eines aus P beschriebenen Kreisbogens in ϱ auf PR zurückführen muss. Dieser Punkt ϱ, in welchem der Schatten des Stiftes am 3. November im Augenblicke des mittleren Mittags endigt, gehört also der Mittagslinie der mittlern Zeit an, und ist sogar eine ihrer Seitengrenzen, da um die hier gewählte Zeit die Voreilung der Sonne ihr Maximum erreicht hat. Die anderen Punkte dieser Curve werden auf die nämliche Art construirt, nach den numerischen Angaben des *Annuaire* für jeden Jahreszeitpunkt. Um aber die Figur nicht zu überladen, wurden diese Constructionen weggelassen; statt dessen folgt hier eine Angabe der merkwürdigsten Punkte dieser Mittagslinie der mittlern Zeit.

§. 580.

Im Wintersolstitium, d. h. gegen den 22. December, tritt der wahre Mittag um $11^h\ 58^m$ mittlerer Zeit ein; die Sonne ist also noch voraus und der entsprechende Punkt der Mittagscurve befindet sich auf der Hyperbel $\delta\,\alpha$, aber ein klein wenig rechts von der Vertikalen $P\,\alpha\,B$.

Am 25. December ist die Differenz zwischen dem wahren, und dem mittlern Mittage Null, und mithin entspricht dieser Zeitpunkt dem Punkte, wo die Mittagscurve die Vertikale $P\,\alpha\,B$ schneidet; dieser Durchschnittspunkt muss aber ein klein wenig unter der Hyperbel $\delta\,\alpha$ liegen, weil die Declination der Sonne vom 22. bis zum 25. December abgenommen hat.

Von diesem Zeitpunkte an bleibt die Sonne hinter der mittlern Zeit zurück, und gegen den 10. Februar erreicht diese Verspätung ihr Maximum mit 14 Minuten. Auf der Figur entspricht diesem Zeitpunkte der Punkt ε, den man, wie den Punkt ϱ, mittelst der Declination der Sonne am 10. Februar erhält.

Von hier an nähert sich der mittlere Mittag dem wahren, und im Frühlingsäquinoctium, gegen den 21. März, bleibt die Sonne nur noch um 7 Minuten zurück. Diesem Zeitpunkte entspricht auf der Figur der Punkt, wo die Mittagscurve die Aequinoctiallinie E B schneidet, links der Vertikalen P B.

Gegen den 15. April wird die Differenz zwischen der wahren und mittlern Zeit wieder Null, welcher Zeitpunkt dem Punkte μ entspricht, wo die Meridiancurve die Vertikale $P\,\alpha\,B$ schneidet. Man construirt diesen Punkt unmittelbar, indem man aus dem Mittelpunkte O' des Aequators einen Sonnenstrahl zieht, welcher mit O' B einen Winkel bildet, gleich der Declination der Sonne am 15. April.

Nach diesem Zeitpunkte eilt die Sonne der mittlern Zeit voran, und diese Voreilung erreicht ihr Maximum von 4 Minuten gegen den 15. Mai, welcher Zeitpunkt dem Punkte v der Mittagscurve entspricht; von jetzt an aber nähert sich der wahre Mittag immer mehr dem mittlern.

Gegen den 15. Juni ist die Differenz Null, und nun schneidet die Meridiancurve die Vertikale $P\,B\,\theta$ in einem Punkte, der ein wenig über der Hyperbel $\varphi\,\theta$ liegt, weil die Sonne noch nicht im Solstitium angekommen ist. In letzterm Zeitpunkte, d. h. am 22. Juni, liegt der entsprechende Punkt der Mittagscurve auf der Hyperbel $\varphi\,\theta$, aber ein wenig links von der Vertikalen $P\,B\,\theta$, weil der wahre Mittag 1 oder 2 Minuten nach dem mittlern eintritt: die Sonne beginnt also wieder hinter der mittlern Zeit zurückzubleiben.

Dieses Verspäten nimmt bis zum 25. Juli immer zu, wo es mit 6 Minuten sein Maximum erreicht, das auf der Mittagscurve dem Punkte π entspricht. Von jetzt an beträgt die Verspätung der Sonne immer weniger

und wird Null gegen den 1. September, welcher Zeitpunkt dem Punkte φ entspricht, wo die Mittagscurve die Vertikale PB6 schneidet. Dieser Punkt liegt ein wenig höher als der schon gefundene Durchschnittspunkt μ, weil am 1. September die Declination der Sonne kleiner ist, als am 15. April.

Vom 1. September an eilt die Sonne der mittlern Zeit wieder vor, und im Herbst-Aequinoctium, gegen den 23. September, beträgt diese Voreilung 7 Minuten, und entspricht dem Punkte, wo die Meridiancurve die Aequinoctiallinie BQ rechts vom Punkte B schneidet. Am 3. November endlich erreicht die Voreilung der Sonne ihr Maximum von 16 Minuten, welches dem bereits zu Anfange construirten Punkte ϱ entspricht.

§. 581.

Taf. 32. Fig. 2. Um dem Leser ein Beispiel zu geben, wie die Resultate der bisherigen graphischen Operationen verwendet werden können, wurde in Fig. 2 die Sonnenuhr dargestellt, welche Herr *Girard* am Palaste Bourbon ausführte, als die polytechnische Schule dahin verlegt wurde. Der Astronom *Méchain* bestimmte selbst die Mittagslinie der wahren Zeit auf folgende Art, wie sie in einer Abhandlung im 12ten Hefte des *Journal de l'Ecole Polytechnique* zu lesen ist.

„An der Spitze eines aus 3 eisernen Stäben gebildeten Dreiecks wurde eine kreisförmige, in ihrer Mitte mit einer kleinen runden Oeffnung versehene Scheibe befestigt. Die Lage der Grundlinie dieses Dreiecks an der Mauer und die Höhe der Scheibe wurden dergestalt gewählt, dass das Sonnenbild, welches man um die Mittagsstunde durch die Oeffnung erhielt, beinahe auf die Linie fiel, welche den für die Sonnenuhr bestimmten Raum in zwei symmetrische Theile theilte. Nun wurde mittelst einer Seeuhr das Sonnenbild 10 Secunden vor dem wahren Mittag, im Augenblicke des Mittags selbst und 10 Secunden nachher beobachtet, und mit jeder Beobachtung zugleich der elliptische Umriss des Bildes gezeichnet. Der Mittelpunkt der mittlern Ellipse gab schon einen Punkt der Mittagslinie; um sich aber seiner Richtigkeit zu versichern, wurde an die höchsten Punkte dieser Ellipsen eine tangirende Curve gezogen, und eine andere tangirende Curve an ihre tiefsten Punkte; hierauf wurde in gleichem Abstande von diesen beiden noch eine dritte Curve gezogen, und der zwischen den Mittelpunkten der äussersten Ellipsen liegende Bogen dieser dritten Curve in zwei gleiche Theile getheilt. Auf diese Art erhielt man also einen Punkt der Mittagslinie und mithin diese Linie selbst, indem man durch den gefundenen Punkt eine Vertikale von unbestimmter Länge zog.

„Nachdem man auf diese Art die Mittagslinie construirt hatte, konnte der Stift (oder die Parallele mit der Erdaxe) dessen einer Endpunkt das Centrum der Scheibe war, leicht bestimmt werden. Man fällte nämlich von der Projection O der Stiftspitze eine Senkrechte TOO' auf die Mittagslinie; auf diese Senkrechte trug man von T nach O' die Entfernung der Spitze des Stiftes von Punkt T; hierauf wurde durch O' eine Gerade O'P gezogen, welche mit O'T einen Winkel gleich der Breite von Paris (48° 50') bildete; dadurch erhielt man im Durchschnitte P der Geraden O'P mit der Mittagslinie das Centrum der Sonnenuhr, oder vielmehr den Punkt, in welchem die durch den Mittelpunkt der Scheibe mit der Erdaxe parallel gezogenen Gerade die Ebene der Sonnenuhr schneiden musste."

Vierter Abschnitt.

Steinschnitt.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Bemerkungen.

§. 582.

Die Stereotomie lehrt feste Stoffe, wie Holz, Stein, Blei etc. so behauen und schneiden, dass die hiedurch erhaltenen verschiedenen Theile, wenn man sie in einer gewissen Ordnung wieder zusammensetzt, ein Ganzes bilden, dessen Form zum Voraus bestimmt war. Bei der Anwendung der Stereotomie auf den Steinschnitt nun, wovon dieser Abschnitt handeln soll, wird fast einzig von Gewölben die Rede sein, weil diese nicht nur Gelegenheit zur Behauung ebener und krummer Flächen jeder Art darbieten, sondern auch andere einfachere Constructionen, wie die der scheitrechten Bögen und der ebenen, schrägen oder Böschungsmauern, in sich enthalten.

§. 583.

Bei der Construction eines Gewölbes nun wäre zuerst die Frage zu untersuchen, welche Form und welche Dimensionen für ein solches Bauwerk die vortheilhaftesten wären, so dass es den Bedingungen einer grossen Stabilität und zugleich den Forderungen entspräche, welche der Platz, wo es aufgeführt wird, und der Gebrauch, zu welchem es bestimmt ist, an dasselbe machen. Eine solche Untersuchung aber beruht eines Theils auf den Gesetzen der Mechanik und den Regeln der Architektur, andern Theils auf den Erfahrungen über den Widerstand des Materials und über die Art, wie gewöhnlich der Einsturz der Gewölbe zu geschehen pflegt, und gehört daher nicht in die Stereotomie, sondern vielmehr in ein Lehrbuch der Baukunde, aus welchem man also jene Einzelnheiten, welche zum Theil weitläufige Darstellungen und Entwickelungen erfordern, studiren muss. Hier wird stets angenommen, Form und Dimensionen des auszuführenden Gewölbes seien gegeben, und somit besteht die Aufgabe der Stereotomie in folgenden drei Operationen:

1) zu finden, auf welche Art sich ein solches Gewölbe am vortheilhaftesten in **Gewölbesteine** *(voussoirs)* theilen lässt, d. h. in Theile von ziemlich geringen Volumen, so dass jeder derselben leicht aus einem einzigen Steine bearbeitet werden kann, und welche eine solche Form haben, dass sie, wenn man sie in einer gewissen Ordnung einfach neben einander setzt, sich gegenseitig unterstützen, wie wenn sie nur einen einzigen Körper bildeten;

2) die Umrisse und Dimensionen aller Seitenflächen eines jeden Gewölbesteines zu bestimmen, deren Grenzen die Durchschnitte verschiedener aus dem Vorhergehenden bekannten Flächen sind;

3) den Stein zu bearbeiten, d. h. dem rohen Materiale, das man anwendet, die Formen zu geben, welche man für die Seitenflächen der Gewölbesteine gefunden hat.

§. 584.

Da die erste dieser Operationen, oder die Theilung in Gewölbesteine, sich offenbar mit der Form des Gewölbes ändern muss, so wird bei jedem einzelnen Beispiele gezeigt werden, welche Theilungsmethode die vortheilhafteste ist. Es gibt jedoch eine Hauptregel, die man immer beobachten muss, und von welcher man sich nicht ohne sehr gewichtige Gründe und nur bei weniger bedeutenden Constructionen entfernen darf; die Regel nämlich, dass die **Fugen** *(joints)* d. h. die Berührungsflächen der Gewölbesteine unter sich, normal auf der innern und sichtbaren Wölbungsfläche stehen müssen. Wäre nämlich diese Bedingung nicht erfüllt, so würde von zwei an einander liegenden Gewölbesteinen der eine nothwendig einen stumpfen, der andere einen spitzigen Winkel darbieten. Da nun letzterer keines so grossen Widerstandes fähig wäre, als der erstere, so könnte, wenn das Bogengerüste weggenommen und das Gewölbe der Wirkung seiner Last überlassen wird, durch die gegenseitigen Reactionen der Gewölbesteine der schwächere Winkel gesprengt werden was nicht nur der Schönheit, sondern auch der Stabilität des Gewölbes Schaden bringen würde.

Um die zweite Operation auszuführen, wählt man eine wohlgeebnete Mauer, oder man richtet eine so zu, indem man eine Lage Gyps auf dieselbe aufträgt und sie nach dem Richtscheit ebnet. Auf diese Ebene zeichnet man die gegebenen Stücke der Figur, und zwar in denjenigen Dimensionen, wie sie für das projectirte Gewölbe gefordert werden. Hierauf bestimmt man nach den Methoden der darstellenden Geometrie die Linien, welche den Umriss aller Seitenflächen jedes Gewölbsteins bilden, zuerst in ihren Projectionen und hierauf in der wahren Grösse, indem man die ebenen Seitenflächen umklappt und die entwickelbaren entwickelt; auf diese Weise erhält man alle für die Bearbeitung des Steines nöthigen Elemente.

Was die dritte Operation betrifft, so kann sie in ihren Einzelnheiten nur an bestimmten Beispielen genau und verständlich erläutert werden; desshalb unterbleiben hier alle allgemeinen und desshalb sehr unbestimmten Angaben; dagegen werden am Ende jeder Aufgabe die Verfahrungsarten, welche für den gerade vorliegenden Fall des Steinschnittes angewendet werden müssen, sorgfältig erklärt werden.

§. 585.

Taf. 34. Fig. 1. Es ist schon gesagt worden, dass der Name **Gewölbestein** jedem der Steine beigelegt wird, aus denen ein Gewölbe besteht. Bei jedem Gewölbestein heisst **Wölbung** *(douelle)* diejenige Seitenfläche, welche einen Theil der innern, sichtbaren Fläche des Gewölbes ausmacht. **Lagerfugen** *(joints de lit)* heissen diejenigen Seitenflächen Mm, Nn, durch welche ein Gewölbestein mit dem Gewölbesteine der untern und mit dem der obern Schichte in Verbindung steht; **Stossfugen** *(joints d'assise, joints montants)* hingegen sind die Berührungsflächen zweier Gewölbesteine derselben Schichte, wenn die Länge dieser letzteren es erfordert, dass sie aus mehreren Steinen bestehe. Die sichtbare Fläche endlich, mit welcher eine Schichte

endigt, und welche also einen Theil der Aussenseite *(parement)* des Gewölbes ausmacht, heisst das Haupt des Gewölbesteins.

§. 586.

Was das Gewölbe auch für eine Form haben mag, so heisst die innere und sichtbare Fläche A B D desselben die innere Wölbungsfläche *(l'intrados, la douelle)*. Unter der äussern Wölbungsfläche *(l'extrados)* oder dem Rücken versteht man die äussere Fläche a b d, wenn nämlich, wie hier, das Gewölbe isolirt steht. Denn wenn es, wie z. B. ein Thor in einer Mauer, mit anderen Bauwerken in Verbindung steht, so ist keine äussere Wölbungsfläche im eigentlichen Sinne mehr vorhanden; doch gibt man auch jetzt noch diesen Namen der idealen Fläche a R P b (Fig. 2), welche alle Fugen der Gewölbesteine begrenzt. Unter den Pfeilern *(pieds-droits)* eines Gewölbes versteht man die Mauern, welche, bis zum Anlaufe *(naissance)* des Gewölbes sich erhebend, den ersten Gewölbesteinen als Unterlage dienen.

§. 587.

Da in dem Steinbruche die Steine in Schichten liegen, deren Scheideflächen nahezu parallele Ebenen sind, so werden sie in der Form senkrechter Prismen herausgeschafft, deren Grundflächen die beiden Lagerflächen des Bruches sind. Bei ihrer Anwendung nun zu irgend einem Verbande muss man Sorge tragen, dass diese beiden Lagerflächen so viel als möglich senkrecht auf die Last gerichtet seien, welche sie zu tragen haben, weil in dieser Richtung der Stein dem auf ihn einwirkenden Druck den meisten Widerstand entgegenzusetzen vermag. Bei einer Mauer also muss man die Lagerflächen horizontal legen: bei einem Gewölbe, wo die beiden Fugen eines und desselben Gewölbesteines nicht parallel sein können, muss man wenigstens dafür sorgen, dass die Lagerfläche mit einer der Fugen zusammenfalle, oder dass ihre Richtung nahezu gleiche Winkel mit beiden Fugenflächen bilde.

Der Werkmeister *(l'appareilleur)*, welcher die Zeichnung entwirft, und ihre Ausarbeitung in Stein leitet und überwacht, muss dem Steinversetzer *(poseur)* durch besondere Zeichen (Taf. 33, Fig. 3) die obere und untere Lagerfläche jedes Steines bemerklich machen.

Zweites Kapitel.

Von den Mauern und scheitrechten Bögen.

§. 588.

Von den Mauern ist hier nur desshalb die Rede, um Gelegenheit zu haben, einige gebräuchliche Benennungen zu erklären und einige praktische Verfahrungarten beim Steinschnitte anzugeben.

Die Aussenseite *(parement)* eines Steines ist die sichtbare Fläche desselben, welche einen Theil der äussern oder innern Mauerfläche ausmacht. Steine, welche ihrer Länge nach durch die ganze Mauerdicke hindurchreichen, wie B, B′, heissen Binder *(boutisses)*, und ihre beiden (meist quadratischen) Aussenseiten Häupter *(têtes)*; Steine hingegen, welche mit ihrer Breite durch die ganze Mauerdicke hindurchgehen und deren Länge also in den beiden Aussenseiten sich darstellt, heissen Strecksteine *(parpaings)*, wie P, P′, P″. Steine endlich, welche nicht durch die ganze Mauerdicke hindurchreichen und nur eine Aussenseite zeigen, Taf. 33. Fig. 1 u. 2.

heissen im Allgemeinen Quadersteine (*carreaux*), und in dem Falle, wenn, wie beim Strecksteine, ihre Länge in der Aussenseite sich darstellt, Läufer *). Diejenigen Steine, welche, wie L, L' L'', dazu dienen, die von den Quadern oder Läufern leergelassenen Räume in den Mauern zu erfüllen, heissen Füllsteine (*libages*). Diese bestehen oft aus Bruchsteinen, welche mit Mörtel gemauert, festgeschlagen und nach der Höhe der Quadern abgeglichen sind.

§. 589.

Besteht eine Mauer ganz aus Strecksteinen, wie in Fig. 1, so muss man zu festerer Verbindung der Steine unter sich diese so legen, dass die vertikalen Fugen der einen Steinschichte die Steine der nächst-obern und untern Schichte nahezu in der Mitte ihrer Längen treffen. Da aber ein Verband dieser Art sehr kostspielig ist, sowohl wegen des beträchtlichen Abfalls, den er verursacht, als auch wegen des bedeutenden Volumens der Steine, welche man dazu verwenden muss, so verbindet man gewöhnlich Strecker mit Bindern, und noch häufiger Binder mit Quadern, wobei man sehr darauf zu achten hat, dass bei zwei auf einander folgenden Schichten keine Vertikalfugen auf einander treffen (Fig. 2).

Soll durch zwei zusammenstossende Mauern eine Ecke gebildet werden, so müssen die Steine, welche in den auf einander folgenden Schichten die vertikale Eckkante M bilden, so gesetzt werden, dass ihre längsten Seitenflächen abwechslungsweise in die Richtungen M N und M Q fallen, damit die Mauern um so fester mit einander verbunden werden. Die innere Ecke A darf keine Fuge bekommen; desshalb müssen die Steine, von welchen sie gebildet wird, knieförmig zugehauen werden, wie E A F, und man hat wohl darauf zu achten, dass in den auf einander folgenden Schichten die ungleichen Seiten A E und A F wieder mit einander abwechseln.

§. 590.

Taf. 33. Fig. 4. Eine Mauer heisst gerade (*droit*), wenn sie sich zwischen zwei vertikalen und parallelen Ebenen befindet; schräge (*biais*) hingegen, wenn jene beiden Ebenen convergiren. Weicht eine der beiden Ebenen von der vertikalen Richtung ab, so entsteht eine anlaufende oder Böschungsmauer (*mur en talus*), wie in Fig. 4, wo die Mauer zwischen den Ebenen G' G U und A' A F enthalten ist.

Man merke sich aber, dass die Böschung nach dem Winkel F A Z gemessen wird, welchen die geneigte Ebene mit der Vertikalen A Z bildet, und nicht nach ihrem Neigungswinkel F A X gegen den Horizont, weil, wenn letzterer 90 Grade betrüge, die Böschung im Gegentheile Null wäre. Es ist gebräuchlich, die Böschung nicht in Graden, sondern durch einen Bruch $^1/_4$, $^1/_5$, ... $^1/_{10}$ anzugeben, welcher das Verhältniss des Anlaufs F Z zur Höhe A Z ausdrückt.

§. 591.

Diese Böschungsmauer wird durch Horizontalebenen wie G A, H L, I K ... in Schichten abgetheilt. Wollte man nun die horizontalen Schnitte bis zur geneigten Ebene verlängern, so würden die Lagerflächen mit der Böschungsseite spitzige Winkel bilden, was vermieden werden muss, wenigstens wenn die Böschung bedeutend ist, weil ein solcher Winkel wenig Widerstand zu leisten vermag und bald schadhaft wird. Man muss desshalb jene horizontalen Schnitte nicht weiter gehen lassen, als bis auf eine Entfernung von 5—8

*) Die deutschen Werkmeister nennen jeden durch die Mauerdicke hindurch reichenden Stein einen Binder, und jeden, der nur eine Aussenseite hat und also nur einen Theil der Mauerdicke ausmacht, einen Läufer. A. d. Ü.

Centimetern von der Böschungsseite, und hierauf die Schnitte L D, K E, ... senkrecht auf die Böschung richten. Die erste Schichte könnte man durch eine Vertikalebene begrenzen, die man durch den Punkt C, wo die Böschung den Boden x y trifft, legte; um aber die Dicke der Mauer an der Grundfläche nicht zu vermindern, ist es besser, die vertikale Seite A B und die horizontale B C anzuwenden.

§. 592.

Auch in der Folge muss man stets, bei allen Steinverbänden, die spitzigen Winkel zu vermeiden trachten, wenigstens so lange diess möglich ist, ohne dass man in noch grössern Nachtheil geräth. Hier z. B. entsteht durch die gebrochene Fuge H L D eine vorspringende Ecke in der zweiten, und eine einwärtsgehende Ecke in der ersten Steinschichte. Die letztere Ecke lässt sich aber nicht so leicht behauen, auch ist es sehr selten, dass die beiden an einander liegenden Steine vollkommen in einander passende Ecken erhalten, wenn diese nicht rechtwinklig sind, was zur Folge hat, dass sie sich nur in der kleinen Anzahl von Punkten, welche allein den entsprechenden Seiten gemeinschaftlich sind, berühren. Diess hätte wenig zu sagen, wenn es sich um eine vertikale Fuge handelte, in welcher die neben einander gesetzten Steine sich einfach berührten; wenn diese aber in der gebrochenen Fuge auf einander ruhen, und die allgemeine Last bedeutend ist, so wird der Druck, statt sich auf die ganze Berührungsfläche gleichmässig zu vertheilen, nur auf einzelnen Punkten lasten, wodurch die einwärts gehende Ecke auf Kosten der Festigkeit des Steinverbandes Schaden leiden muss. Diese Bemerkung verdient besonders Beachtung bei Gewölben, welche, wie z. B. Brückenbögen, grosse Lasten zu tragen bestimmt sind.

Es folgt nun eine Beschreibung des praktischen Verfahrens beim Behauen der Steine einer solchen Böschungsmauer; und zwar wird zuerst gezeigt werden, wie man auf einem rohen Steine eine Seitenfläche ausarbeitet, die genau eben ist.

§. 593.

Es sei A B D E F G ein Steinblock, der, wie er aus dem Steinbruche gekommen, eine nahezu prismatische Form hat. Auf der hinteren Seitenfläche A B C, etwas unterhalb des obern Randes, zieht der Steinhauer mittelst des Lineals oder Richtscheits einen schwarzen Strich B C, der, wegen der vielen Unebenheiten dieser Seite, keine Gerade sein kann, aber doch wenigstens eine ebene Linie ist. Hierauf nimmt er, mittelst Schlageisen und Klöpfel, nach und nach von der über B C befindlichen Steinmasse weg, und arbeitet einen Schlag oder ebenen schmalen Streifen B C c b aus, dessen Breite B b 1 bis 2 Centimeter beträgt. Bei einer so geringen Breite ist es leicht, eine Ebene herzustellen; die Unterkante des Richtscheites dient als Prüfungsmittel. Ist diess nun geschehen, so setzt der Steinhauer das Richtscheit R mit der Unterkante auf den geebneten Streifen B C c b; hierauf begibt er sich auf die vordere Seite des Steines, legt an dieselbe ein zweites Richtscheit R′ an, und dreht dasselbe so lange hin und her, bis die Unterkante X Y des ersten mit der Oberkante X′ Y′ des zweiten Richtscheites, beide von der Seite mit einem Auge angesehen, eine gerade Linie zu bilden scheinen. Nun zieht der Steinhauer längs der Oberkante des zweiten Richtscheites wieder einen schwarzen Strich B′ C′, der, nach diesem Verfahren, mit dem ersten B C in derselben Ebene liegen muss. Fig. 5.

Natürlich geht diese erstere Operation schneller von Statten, wenn zwei Arbeiter die Richtscheite R und R′ zugleich auf den entgegengesetzten Seiten des Steines anlegen und auf der Seite nach den Oberkanten visiren, bis sie dieselben in einerlei Ebene gebracht haben; alsdann können zu gleicher Zeit die beiden Striche B C und B′ C′ gezogen werden.

Hat nun der Steinhauer diese beiden Striche durch einen dritten B B′ vereinigt, so arbeitet er wie

vorhin einen Schlag längs B′C′ und einen andern längs BB′ aus, ebnet dieselben zuerst mit der Zweispitze, dem Krönel- und Scharrireisen u. s. w. und prüft, indem er parallel mit BB′ fortschreitet, immer wieder, ob das aufgelegte Richtscheit die zu bearbeitende Fläche in allen Punkten innig berühre und ob es zugleich sich auf die beiden Leitlinien B C und B′C′ auflege, welche Bedingung nothwendig erfüllt werden muss, wenn eine Ebene hergestellt werden soll.

Der Leser wird nun ohne weitere Details begreifen, wie der Arbeiter eine neue, auf ersterer senkrechte ebene Fläche ausarbeitet, wozu er sich eines eisernen Winkelmasses bedient, dessen zwei Schenkel senkrecht auf einander sind.

§. 594.

Fig. 4 u. 6. Was nun die Construction der Böschungsmauer betrifft, so betrachte man insbesondere die erste Steinschichte derselben, deren Projectionen ABCDLMN und A′A″ N″N′ sind. Man muss einen Stein auswählen, der wenigstens dem Parallelepiped gleich ist, welches das Rechteck A′A″ N″N′ zur Grundfläche und AP zur Höhe hat. Dieser braucht aber nicht auf allen Seiten viereckig behauen zu werden, weil mehrere derselben ganz oder zum Theile zerstört werden müssen. Der Steinhauer richtet zuerst die untere Seite, welche das Unterlager bilden soll, her, und zeichnet auf derselben ein Rechteck a′a″ n″n′ gleich A′A″ N″N′, indem er die Seiten des letztern misst und mittelst des Winkelmasses die rechten Winkel herstellt. Hierauf arbeitet er eine ebene Seitenfläche a′n′q′p′ aus, welche senkrecht auf dem Unterlager ist, und durch die Kante a′n′ geht. Diess geschieht leicht mittelst des Winkelmasses. Auf dieser zweiten Seitenfläche wird nun ein Umriss a′b′c′d′l′m′n′ gezeichnet, welcher der Figur ABCDLMN genau gleich ist. Die rechtwinkligen Ecken erhält man leicht, indem man auf Figur 4 ihre Seiten misst, und um die Spitze d′ zu bestimmen, nimmt man mit dem Cirkel die Entfernungen DM und DB, und beschreibt mit diesen, aus den Punkten m′ und b′ Kreisbögen, welche sich in d′ scheiden werden. Man könnte auch, um d′ zu erhalten, die Seite a′p′ verlängern, bis sie gleich AP würde, und hierauf die Entfernung p′d′ gleich PD nehmen.

Nun kann der Steinhauer alle senkrecht auf a′b′c′d′l′m′ stehenden Seitenflächen ausarbeiten, indem er längs dieses Umrisses den Stein wegschlägt, wobei er stets mit dem Winkelmasse untersuchen muss, ob, wenn der eine Schenkel desselben an der Fläche a′b′c′d′l′m′ anliegt, der andere mit der auszuarbeitenden Seite zusammenfalle. Alle diese neuen Seitenflächen müssen die Länge A′A″ erhalten.

§. 595.

Diese wenigen gegebenen Stücke reichen zur Bearbeitung des Steines hin; um grösserer Genauigkeit willen ist es aber rathsam nicht allein die Fläche a′p′q′n′, sondern auch die Fläche a″p″q″n″ winkelrecht auf das Unterlager auszuarbeiten und auf letzterer den Umriss a″b″c″d″l″m″n″ gleich a′b′c′d′l′m′n′ zu zeichnen; denn alsdann hat der Arbeiter für jede Seitenfläche, welche auf a′b′c′d′l′m′ senkrecht stehen soll, zwei in einerlei Ebene liegende Leitlinien, wie m′l′ und m″l″, l′d′ und l″d″, d′c′ und d″c″, ... auf welche er stets sein Richtscheit anlegen kann. Auf diese Art wird er die ebene Fläche genauer und leichter ausarbeiten.

Gewöhnlich besorgt der Werkmeister die Zeichnung (den Riss) auf dem Steine, wenigstens wenn dieselbe nicht sehr einfach ist. Häufig bedient er sich auch einer Brettung oder Schablone, welche er nach dem Risse ABCDLMN aus Carton, Holz oder Eisenblech ausgeschnitten hat; diese gibt er dem Arbeiter, damit er sie auf die Stirnfläche des Steines auflegen und die Kanten desselben danach bearbeiten kann.

Dieses Mittel ist besonders dann anzuwenden, wenn mehrere Steine von gleicher Vertikalprojection behauen werden sollen.

Alles was hier von der ersten Steinschichte der Böschungsmauer gesagt worden, lässt sich leicht auch auf die andern Schichten M L D E K, I K E F anwenden.

§. 596.

Ein scheitrechter Bogen ist eine Art Gewölbe, dessen innere Wölbungsfläche A B eben und horizontal ist; man wendet ihn gewöhnlich als Sturz (*linteau*), d. h. als den obern Theil einer Thüre oder eines Fensters an; die Pfeiler sind A a X und B b y; die letzte Steinschichte jedes Pfeilers, wie V A T I, heisst Widerlager oder Anfänger (*sommier*). Die vertikalen Seitenflächen A′A″ und B′B″ bilden das Geläufe (*tableau*) der Thüre; die rechtwinklige Vertiefung C′C″D″D′, in welche die Thürflügel kommen, heisst der Spunten oder Falz (*feuillure*), und C′A″ oder D′B″ ist der Anschlag (*recouvrement*). Die vertikalen Seitenflächen C″E″ und D″F″ endlich bilden die Schmiege oder Leibung (*embrasure*); gewöhnlich divergiren sie ein wenig, um den Thürflügeln mehr Lauf zu gestatten und den Raum der Thüröffnung zu vergrössern. Taf. 33. Fig. 7.

§. 597.

Damit die verschiedenen Steine, aus welchen der scheitrechte Bogen gebildet wird, sich gegenseitig unterstützen, lässt man die Fugen A F, M Q, N P, ... nach einem Punkte O zulaufen, der gewöhnlich die Spitze des über A B construirten gleichseitigen Dreiecks ist. Diese Breite A B muss immer in eine ungerade Anzahl gleicher Theile getheilt werden, damit nicht in die Mitte O Z der Thüre eine Fuge komme, wodurch das Herabgleiten und Drehen der Steine und somit der Einsturz des scheitrechten Bogens erleichtert würde. Der, nach dieser Eintheilung, in die Mitte kommende Stein heisst der Schlussstein (*clef*).

§. 598.

Die Erfahrung lehrt, dass wenn ein scheitrechter Bogen unter der Last, die er trägt, zusammenstürzt, diess nicht sowohl durch ein Herabrutschen der Steine, als vielmehr durch eine Art Rotationsbewegung geschieht, welche die beiden Fugen am Schlusssteine nach unten und die am Widerlager liegenden nach oben öffnet, und welche ferner den Pfeiler hebt, indem sie eine seiner Fugen nach innen öffnet, wie solches in Fig. 9 dargestellt ist. Um nun diesem Streben nach Einsturz einen Widerstand zu setzen, gibt man den beiden ersten oder Ecksteinen des Bogens eine Verkröpfung (*crossette*) T S R, hier Hacken genannt, mittelst welcher sie auf dem Widerlager aufliegen. Nun verhindert die auf der Ecke R liegende Last, dass der Stein die in Fig. 9 angedeutete Drehung mache. Man könnte dem zweiten Steine jeder Seite einen ähnlichen Hacken E F G H (Fig. 8) geben; es ist aber nicht rathsam die Zahl derselben zu mehren, oder gar wie manche Werkmeister thun, gebrochene Fugen r q m anzuwenden, weil die ein- und auswärtsgehenden Winkel nie vollkommen gleich ausgearbeitet werden können und hieraus die in §. 592 bezeichneten nachtheiligen Folgen hervorgehen. Ist die Last bedeutend, welche der scheitrechte Bogen zu tragen hat, und sind die Pfeiler nicht stark genug, so thut man am besten, alle Bogensteine mit den Widerlagern durch eine Eisenstange T T′ (Schlauder) zu verbinden (Fig. 8), welche durch ein in die letzteren gebohrtes Loch geht, am einen Ende einen Kopf hat und am andern durch eine Schraube oder Schliesse festgemacht ist. Diese Stange läuft ferner durch einen in jedem Bogensteine angebrachten Falz, der tief genug sein muss, damit die Steine nicht auf der Stange aufliegen; denn das Eisen dient vortrefflich, um Ziehkräften Widerstand zu leisten, aber Lasten, die senkrecht auf seine Länge wirken, darf man ihm nie anvertrauen. (?)

§. 599.

Wenn der scheitrechte Bogen eine etwas beträchtliche Breite hat, so bilden die den beiden Widerlagern zunächst liegenden Fugen ziemlich spitzige Winkel mit der innern Bogenfläche, und die Kanten dieser Fugen können durch den Druck leicht zerstört werden. Um diess zu verhindern, zeichnet man (Fig. 8) eine Gerade a b parallel mit der innern Bogenfläche und 3 oder 4 Centimeter oberhalb derselben; hierauf fällt man aus den Punkten m, n, ... in welchen diese Gerade von den Fugen geschnitten wird, Vertikalen m M, n N, ... Man muss jedoch solche gebrochene Fugen nie am Schlusssteine anwenden, weil man denselben, wenn man ihn setzt, seinem eigenen Gewichte überlassen und so weit abwärts dringen lassen muss, bis er mit den Fugen der beiden Nebensteine, welche (Fugen) vollkommen eben sein müssen, in innigster Berührung sich befindet. Wenn man daher den Schlussstein behaut, so lässt man seine vertikalen Dimensionen vorerst unbestimmt, und nimmt erst, wenn der Stein an seinem Platze ist, den Vorsprung, falls er zu bedeutend sein sollte, weg; öfters aber lässt man auch diesen Stein etwas hervorragen.

§. 600.

Fig. 7 u. 10. Als Beispiel, wie diese Steine behauen werden müssen, diene der Bogenstein A M Q R S T der Fig. 7. Man wählt einen Stein aus, dessen Länge wenigstens der Dicke R′ R″ der Mauer gleich ist und dessen beide anderen Dimensionen gross genug sind für das Haupt A M Q R S T. Hierauf bearbeitet man sorgfältig (§. 593) die Lagerfläche x m m′ x′, welche, aus den Gründen des §. 587, zur Fuge M Q bestimmt ist, und zeichnet auf dieselbe den Umriss q q′ m′ m″ g′ g″ h″ q, indem man den Schenkeln der rechten Winkel folgende Längen gibt:

$$q h'' = Q H, \; q q' = R' R'', \; q' m' = Q M, \; m' m'' = M' M'', \; m'' g' = M G, \; g' g'' = G' G''.$$

Hierauf führt man, winkelrecht auf diese erste Seitenfläche, die beiden parallelen Ebenen x m y z und x′ m′ y′ z′ aus, welche die beiden Häupter des Steins werden sollen, und zeichnet auf ihnen die Umrisse a m q r s t und a′ m′ q′ r′ s′ t′ gleich A M Q R S T. Nun kann der Arbeiter die untere Fuge a t t′ a′ ausführen, weil er zwei in dieser Ebene liegende Leitlinien a t und a′ t′ kennt, und hierauf auch die Seitenflächen s t t′ s′, s r r′ s′, r q q′ r′, womit sodann seine Arbeit geendigt ist.

§. 601.

Was die innere Bogenfläche a m m′ a′ betrifft, so könnte der Arbeiter diese ebene Fläche im Ganzen behauen, mittelst der beiden Leitlinien a m, a′ m′, welche schon bezeichnet sind, und hierauf würde er wegnehmen, was zur Bildung des Falzes nöthig ist. Diess ist das Verfahren, wie es gewöhnlich vorgeschrieben wird; aber es verursacht eine unnöthige Mühe, die man leicht ersparen kann. Hat man nämlich die untere Fuge a t t′ a′ behauen, so zeichnet man auf diese den Umriss t t′ a′ a″ l′ l″ k″ t, indem man rechte Winkel bildet und den Schenkeln derselben folgende Längen gibt:

$$a' a'' = A' A'', \; a'' l' = A L, \; l' l'' = G' G''.$$

Nun hat der Arbeiter zur Ausführung des Theiles a′ a″ m″ m′ der Bogenfläche, welche dem Geläufe entspricht, die beiden Leitlinien a′ a″ und m′ m″; für den Anschlag a″ l′ g′ m″ die zwei Leitlinien a″ l′ und m″ g′; für den Spunten oder Falz die beiden l′ l″ und g′ g″ und so fort, so dass er also nur die wirklich anwendbaren Theile aller dieser ebenen Flächen ausarbeiten darf.

§. 602.

Bemerkungen über das Setzen oder Legen der Steine.

Um eine Mauer zu errichten, setzt man zuerst die verschiedenen Steine in der ganzen Länge einer und derselben Schichte, und untersucht hierauf mittelst des Richtscheits und der Setzwage, ob ihre oberen Lagerflächen auch alle in einer und derselben Horizontalebene liegen; ist diess nicht der Fall, so muss der Steinhauer nachhelfen, nacharbeiten (*raser le tas*). Ohne diese Vorsicht würden die Steine der folgenden Schichte, durch welche die Fugen der untern überdeckt werden, nicht senkrecht auf ihre Unterlage zu stehen kommen, was mit der Zeit Risse und Brüche veranlassen würde. Beim Setzen dieser zweiten Schichte legt man häufig jeden Stein auf vier sehr dünne Holzspäne, die man so gewählt hat, dass der daraufgelegte Stein in's Niveau kommt; hierauf erhebt man den Stein um seine hintere Kante, zieht unter demselben eine kleine Schichte feinen und hellen Mörtels auf, und lässt auf diese den Stein zurückfallen, der nun, auf den Holzspänen aufliegend, den Mörtel rings herum gegen die horizontale Fuge drängt. Endlich streicht man auch in die vertikalen Fugen einen recht flüssigen Mörtel und verstopft damit sorgfältig alle Spalten.

§. 603.

Dieser Gebrauch, den Steinen kleine Unterlagen von Holz zu geben, ist allerdings ein sehr bequemes und leichtes Mittel für die Arbeiter, durch eine grössere oder geringere Dicke der Späne die beim Behauen der Lagerflächen gemachten Fehler wieder auszugleichen; es kann aber für Bauwerke, welche eine grosse Festigkeit und lange Dauer haben sollen, sehr nachtheilige Folgen haben. Da nämlich der Mörtel durch Austrocknen an Volumen immer abnimmt, so ruht der Stein endlich nur noch auf den vier Punkten, wo die Unterlagen sind, und kann alsdann durch das Gewicht der auf ihm lastenden Masse springen. Man könnte zwar einwenden, dass die unterlegten Späne durch die Last selbst ein wenig zusammengedrückt werden und dem Stein also wieder eine Berührung mit dem Mörtel gestatten; aber da der Widerstand dieses letztern viel geringer ist, als der des Steines, so ist die Berührung mit dem Mörtel eine ungenügende Stütze.

Besser ist es, die Steine ohne Unterlagen zu setzen und nur die vertikalen Fugen mit Mörtel zu bestreichen, weil so die Wirkung der Last, welche immer die anfänglichen Niveaus wieder in Unordnung bringt, unmerklich oder gar Null wird. In diesem Falle müssen aber die Fugen mit äusserster Sorgfalt bearbeitet und geebnet werden, wie die Römer es machten, welche auf die Aussenseiten der Steine häufig sehr wenig Fleiss verwendeten, mit desto grösserer Genauigkeit aber die Fugen bearbeiteten. Am *Pont du Gard* *) z. B. sind die Lagerfugen einander so nahe, dass man Mühe hat, zwischen denselben eine Mörtelschichte wahrzunehmen. Einige, welche gewisse innere Theile dieses Monuments untersucht haben, sind sogar der Meinung, die Fugenseiten der Steine seien abgeschliffen worden, um eine recht innige Berührung möglich zu machen.

§. 604.

Der Gebrauch, die Steinhauerarbeit nach dem Quadratmeter der Aussenseite zu bezahlen, hat einen für die Festigkeit der Bauwerke schädlichen Missbrauch herbeigeführt. Der Arbeiter behaut mit vieler Sorgfalt die sichtbaren Theile des Steins; die Fugen aber bearbeitet er nur rings am Rande herum mit Fleiss nach dem Richtscheite; hierauf behaut er die Mitte der Fläche, angeblich, damit sie den Mörtel besser annehme,

*) Pont du Gard, 4 Stunden von Nismes und 1 Stunde nördlich von Beaucaire, ist eine von den Römern erbaute Wasserleitung, unter deren einem Bogen der Fluss Gard durchfliesst. A. d. Ü.

bloss mit dem Schlageisen, und oft mit solcher Eile, dass er statt einer Ebene concave Flächen hervorbringt; diess aber hat zur Folge, dass der Stein, wenn er einmal gesetzt ist, nur auf seinen Rändern und höchstens auf einigen inneren Punkten der Fugenfläche ruht, welche Lage für den Widerstand, den der Stein leisten soll, offenbar höchst ungünstig ist.

Einer ähnlichen Ursache schreibt man die Unfälle zu, welche der St. Genovevenkirche (jetzt Pantheon genannt) begegnet sind, und in Folge deren die Säulengruppen, welche die Kuppel trugen, durch vier Pfeiler ersetzt werden mussten, deren compacte Massen den malerischen Effect, welchen der ursprüngliche Plan Sufflot's bewirkte, zerstören. Die Schuld lag nicht daran, dass die Dicke der Säulen und inneren Pfeiler zu gering war, um die Last des Thurmes und der Kuppel tragen zu können *); denn die Schichten, welche Risse bekamen, bestanden aus dem härtesten Steine, während andere aus weicherm Steine gut Widerstand leisteten. Man muss jene Risse vielmehr der fehlerhaften Weise zuschreiben, wie die Steine gesetzt wurden, in Folge deren die Last sich nicht gleichmässig auf die Punkte der Fugenflächen vertheilen konnte. Man glaubt sogar, dass der Werkmeister die Steine zu den Säulenschaften so habe behauen lassen, dass die obere Lagerfläche ein wenig concav wurde, in Form einer conischen Fläche, damit die darauf gelegten sich an den Rändern genauer anschliessen, und somit die Fugen für das Auge des Beobachters unmerklich gemacht werden sollten. Da aber auf diese Art die Last nur von einer schmalen Zone der obern Lagerfläche jedes Schaftsteines getragen wurde, während in der Mitte desselben sich nur Mörtel befand, dessen Widerstand gegen den Druck weit geringer ist, als der des Steines, so erfolgte daraus der Riss einiger Schichten und das Sinken der Säulen.

§. 605.

Die Anwendung des Mörtels und der Unterlagen (§. 602) sollte man hauptsächlich bei grossen Gewölben verbieten; denn der bedeutende Druck, welcher nach Wegnahme des Bogengerüstes eintritt, kann diejenigen Gewölbesteine, welche nur in einzelnen Punkten auf den andern ruhen, sprengen; oder es kann auch die Einwirkung dieses Drucks auf die Unterlagen Setzungen veranlassen, wodurch die Form des Ganzen geändert und den Gewölbesteinen gestattet wird, sich um ihre Kanten zu drehen, was die gewöhnliche Ursache des Einsturzes ist. Bei wichtigen Bauwerken, besonders bei Brückenbögen, ist es daher am Besten, die Gewölbsteine zuerst mit ihren nackten Fugen auf einander zu legen, vorausgesetzt freilich, dass dieselben zuvor von den Arbeitern sorgfältig und unter strenger Einhaltung der vorgezeichneten Dimensionen behauen worden seien; um hierauf die kleinen leeren Räume auszufüllen, welche wegen der Unvollkommenheit des Behauens nicht ganz vermieden werden konnten, lässt man einen feinen und recht flüssigen Mörtel dazwischen laufen, mittelst einiger kleinen vertieften Schläge oder Rinnen, die man oben in der Fuge angebracht hat.

§. 606.

Ueber die Aufrichtung der Gewölbe hier nur so viel: man errichtet mittelst starker Stützbalken zwei oder mehrere hölzerne Bogengerüste, deren äussere Umfläche der innern Wölbungsfläche des Gewölbes parallel ist. Diese Bögen verbindet man durch Bretter oder Dielen (*couchis*), welche von einem Bogengerüste zum andern gehen und die Verschaalung bilden, auf welche die Gewölbsteine gelegt werden. Bei jedem Steine muss sorgfältig geprüft werden, ob die Kante der Bogenfläche den gehörigen Vorsprung, und ob die Fuge die durch den Musterriss bestimmte Neigung habe: ist diess nicht der Fall, so muss die eine oder

*) S. *l'Art de bâtir*, von Rondelet, und *Traité de la construction des ponts*, von Gauthey; pag. xxij. 268. 274.

auch beide Fugen noch einmal überarbeitet werden. Jene Prüfung erfordert gewisse Verfahrungsarten, welche aber hier nicht beschrieben werden können; ebenso auch nicht die Vorsichtsmassregeln, welche man beim Wegnehmen des Bogengerüstes zu nehmen hat, indem diese Details nicht in die Stereotomie gehören.

Drittes Kapitel.

Von den Tonnengewölben und Thorbögen.

§. 607.

Mit dem Namen Tonnengewölbe (*berceau*) bezeichnet man jedes Gewölbe, dessen innere Wölbungsfläche cylindrisch ist, was auch die Form der Leitlinien sein mag. Wenn aber die Erzeugenden nur eine geringe Länge haben, etwa gleich der Dicke einer Mauer, wie in Fig. 2, so heisst das Gewölbe ein Thorbogen (*porte*), und Alles, was also von den Thorbögen gesagt werden wird, gilt auch von den Tonnengewölben, welche von jenen sich nur durch die mehr oder minder grosse Verlängerung der Erzeugenden unterscheiden. Taf. 34. Fig. 1.

§. 608.

Das Tonnengewölbe ist im vollen Bogen (*en plein cintre*), wenn der gerade Schnitt (d. h. der auf den Erzeugenden senkrechte Schnitt, welcher von einigen Praktikern auch Grundbogen (*cintre principal*) genannt wird) ein Halbkreis ist, wie in den Figuren 1, 2, 4. Es heisst gedrückt (*surbaissé*), wenn die Höhe O B unter dem Schlusssteine kleiner ist, als die Hälfte des Gewölbedurchmessers A D, wie in Fig. 5, wo der Grundbogen eine Halbellipse ist, deren kleine Axe vertikal steht, und in Fig. 6, wo der Grundbogen eine gedrückte, aus drei Mittelpunkten beschriebene Curve, ein Korbbogen (*anse de panier*), ist *). Das Tonnengewölbe heisst ferner übervoll (*surhaussé*), wenn die Höhe unter dem Schlusssteine grösser ist, als der halbe Gewölbedurchmesser, wie z. B. in dem Falle, wenn der Grundbogen eine halbe Ellipse und die grosse Axe derselben vertikal wäre. Hieher gehört auch der Spitzbogen (*cintre en ogive*), auch Ohrgewölbe genannt, in Fig. 7, welcher aus zwei Kreisbögen besteht, die aus den Mittelpunkten A und D mit Halbmessern von der Grösse der Thoröffnung A D beschrieben wurden; dadurch entstand ein gleichseitiges Dreieck, dessen Spitze B in der Mitte des Schlusssteines sich befindet.

Kreisbogen-Gewölbe (*voûte en arc de cercle*) heisst endlich dasjenige Tonnengewölbe, dessen gerader Schnitt ein Bogen ist, kleiner als der Halbkreis, wie in Fig. 8; bei einem solchen Gewölbe muss die letzte Steinschichte des Pfeilers S A R T, welche Widerlager oder Anfänger (*sommier*) heisst, eine geneigte Seitenfläche A R bekommen, um den ersten Gewölbestein aufzunehmen. Man sieht leicht ein, dass der horizontale Druck eines solchen Gewölbes grösser ist, als wenn der Bogen beim Anlaufe vertikal wäre; aber

*) Die vortheilhafteste Methode, eine Ellipse zu beschreiben, ist hier diejenige, bei welcher man die beiden um die Axen beschriebenen Kreise anwendet, wie in Fig. 9; denn durch dieses Verfahren erhält man mit einem Punkte M der Ellipse zugleich auch die ihm entsprechende Tangente M T, welche man braucht, um der Fuge eine auf dem Bogen normale Richtung zu geben. Was die gedrückten Bögen betrifft, so kann man sie nach verschiedenen, durch Fig. 10, 11, 12, 13, 14 dargestellten Methoden zeichnen. Die nähere Erklärung dieser Methoden findet man in Note A am Ende dieses Werkes.

man wendet es doch manchmal bei Brückenbögen an, weil man, ohne den Schlussstein erhöhen zu müssen, den Anlauf über den hohen Wasserstand setzen kann und auf diese Art also einen beträchtlichern Durchgang erhält, als mittelst der Ellipse oder des gedrückten Bogens. Das Kreisbogen-Gewölbe wird auch am Obertheile der Thüren und Fenster angewendet; es hat mehr Stabilität, als der scheitrechte Bogen, führt aber die Unbequemlichkeit mit sich, dass die Fenster- oder Thürrahmen oben bogenförmig sein müssen.

§. 609.

In allen Fällen muss der gerade Schnitt A B D der innern Wölbung in eine ungleiche Anzahl gleicher Theile getheilt werden, damit immer einer von den Gewölbesteinen zum Schlusssteine werde, der, oben an seine gehörige Stelle gesetzt und ein wenig eingetrieben, auf die beiden Hälften des Gewölbes gleiche und, in Beziehung auf die Schwere, symmetrisch gerichtete Reactionen ausüben wird. Hierauf ziehe man durch die Theilpunkte L, M, N.... Normalen auf den geraden Schnitt der innern Wölbungsfläche, so bilden die durch diese Normalen und die entsprechenden Erzeugenden des Cylinders gelegten Ebenen die Gewölbesteinfugen, welche somit also normal auf der Wölbungsfläche stehen, wie die Regel des §. 584 es fordert.

§. 610.

Was die Dicke der Gewölbesteine oder die Breite der Fugen betrifft, so hängt die genaue Bestimmung dieser Dimension nothwendig mit der Frage vom Druck der Gewölbe zusammen; da aber die Theorie hierüber noch keine genaue Regeln geliefert hat, und andererseits die empirischen Formeln, welche einige Baumeister aufgestellt haben, gar nicht mit einander übereinstimmen oder sich als falsch erweisen, wenn man sie auf wirklich vorhandene Bauwerke anwendet, welche anders construirt sind, als diejenigen, für welche jene Formeln gemacht wurden, so wird hier nur das Verfahren angegeben, welches für gewöhnliche Tonnengewölbe hinreicht.

Fig. 1 u. 5. Hat man die Dicke B b, welche der Schlussstein erhalten soll, nach der Grösse der Oeffnung A D bestimmt, ferner auch die Last, welche das Gewölbe tragen soll, und den Grad des Widerstandes, den der anzuwendende Stein leistet *), so nehme man die Vertikale B O′ gleich $^2/_3$ oder $^3/_4$ der Oeffnung A D und beschreibe mit dem Halbmesser O′b einen Kreisbogen a b c, der zur Begrenzung der Fugen dient, wie auch zur Bestimmung der äussern Wölbungsfläche, welche ebenfalls ein Cylinder ist. Hieraus ergibt sich, dass die Dicke des Gewölbes gegen die Pfeiler hin zunimmt; und überdiess gibt man den ersten, am Anlaufe liegenden Gewölbesteinen eine noch beträchtlichere Grösse, damit ihre Masse dem Gewölbedrucke besser widerstehen könne, der sie in der Taf. XXXIII, Fig. 9 dargestellten Art zu drehen strebt.

§. 611.

Soll eine Thüre mit einem Bogen in einer Mauer angebracht werden, so macht man den Rücken des Bogens parallel mit der innern Wölbungsfläche, wie in Fig. 2, indem man das Haupt jedes Gewölbesteines durch einen Kreisbogen p q begrenzt, der concentrisch ist mit der innern Wölbung; auf diese Art erhält man eine sichtbare Einfassung. Einfacher ist es, jeden Gewölbestein durch eine horizontale Seitenfläche P Q und eine vertikale Q R zu begrenzen, wenigstens wenn die Mauer nicht massiv ist, sondern bloss aus Bruch- oder Backsteinen besteht. Ist hingegen die Mauer aus Werksteinen aufgeführt, so müssen die Fugen der Gewölbe-

*) Siehe die Erfahrungstabellen in Rondelet's *Art de bâtir*, und die Bemerkungen Gauthey's in seinem *Traité des pontes* I, pag. 268 u. 278.

steine sich an die Mauerschichten anschliessen, wie in Fig. 4, wobei es nicht darauf ankommt, dass jene Fugen gleich seien. Man pflegt auch Hacken wie R S, P Q anzuwenden, und Gewölbesteine dieser Art heissen Hackensteine. Eine Behauung dieser Art ist bequem für den Steinsetzer, weil sie dazu beiträgt, den Gewölbestein im Gleichgewicht zu erhalten, während das Gewölbe aufgerichtet wird; aber sie hat auch grosse Nachtheile, von denen nachher die Rede sein wird. Auch darf sie nie für den Schlussstein angewendet werden, welcher immer durch zwei ganz ebene Fugen G H, I K begrenzt sein muss. Denn dieser Stein wird erst gesetzt, wenn alle anderen Gewölbesteine bereits links und rechts ihre symmetrische Lage auf dem Bogengerüste erhalten haben (§. 606); man setzt ihn alsdann zwischen beide Nebenschlusssteine und treibt ihn etwas gewaltsam ein, was nicht geschehen könnte, wenn er gebrochene Fugen hätte. Oft wartet man sogar mit dem Behauen des Schlusssteins, bis die Gewölbesteine alle gelegt sind, damit man um so genauer die Grösse des noch zu erfüllenden Raumes messen könne.

§. 612.

Wenn man Hackensteine anwendet, so erzeugt die gebrochene Fuge M R S einen auswärts gehenden Winkel auf dem untern, und einen einwärts gehenden Winkel auf dem obern Gewölbestein. Nun werden aber sehr selten diese Winkel vollkommen gleich hergestellt, wenigstens wenn sie keine Rechte sind, und so geschieht es alsdann, dass die Stossfuge des obern Gewölbesteins nicht vertikal auf der untern Schichte steht. Man kann zwar durch hölzerne Unterlagen nachhelfen, deren schädlicher Gebrauch (§. 603, 605) in der neuern Zeit allgemein geworden ist; aber dieses Mittel hilft nur für den Augenblick. Denn nach der Wegnahme des Bogengerüstes, welche oft eine bedeutende Setzung veranlasst, ruht die Last, statt dass sie auf der ganzen Fugenfläche gleich vertheilt sein sollte, nur auf denjenigen Theilen derselben, welche mit den Unterlagen in Berührung sind, und da der Stein in dieser Lage keines so grossen Widerstandes fähig ist, so kann es kommen, dass er bricht und zwar so, dass dadurch die Stabilität des Bauwerkes gefährdet ist. Man sollte daher bei grossen Gewölben und besonders bei Brückenbögen die Anwendung von Hackensteinen und gebrochenen Fugen verbieten und die Gewölbesteine mit den Schichten der daran fortlaufenden Mauer gut verbunden in Uebereinstimmung bringen, wie Fig. 6 es zeigt.

Gerader Thorbogen.

§. 613.

Ein Tonnengewölbe, in einer Mauer angebracht, welche von zwei, senkrecht auf den Erzeugenden des Cylinders stehenden Ebenen begrenzt ist, heisst ein gerader Thorbogen. Um den Riss eines solchen Gewölbes zu zeichnen, nimmt man eine Vertikalebene senkrecht auf der Axe des Thorbogens an, und zeichnet auf dieselbe den geraden Schnitt des Cylinders, der hier ein Halbkreis A B D ist. Hat man diesen in eine ungleiche Anzahl gleicher Theile getheilt, so vollendet man die weitere Darstellung des Gewölbes nach §§. 609 u. 611, und projicirt einen der Gewölbesteine vertikal auf das Vieleck M N P Q R. Diese einzige Projection reicht zur völligen Bestimmung des Steines hin, weil er hier die Form eines geraden Prisma hat, dessen Länge gleich der Dicke A′ A″ der gegebenen Mauer ist. Da diese Länge in Centimetern gegeben sein kann, so lässt man gewöhnlich die Horizontalprojection weg; hier ist sie nur zur Vervollständigung der graphischen Darstellung mit in die Figur aufgenommen worden. Taf. 34. Fig. 2.

§. 614.

Um nun nach diesem Risse den Stein zu behauen, wähle man einen Steinblock aus, der gross genug ist, um z. B. den Gewölbestein MNPQR daraus formen zu können, übrigens kein rechtwinkliges Parallelepiped zu sein braucht; es ist hinreichend, wenn der Block nahezu die Form eines geraden Prisma hat, dessen Länge wenigstens der Länge A′ A″ des Gewölbesteines gleich sein muss, und dessen Basis k n″ l i, die Brettung M N P Q R des Hauptes, wenn diese gehörig aufgelegt wird, in sich aufnehmen kann: wenn es möglich ist, so lasse man die Seite N P einer der Fugen mit der Lagerfläche k n″ n′ h zusammenfallen, aus dem in §. 587 angeführten Grunde. Diess vorausgesetzt, so muss jetzt die Seitenfläche k n″ l i von dem Steinhauer vollkommen eben hergestellt werden (§. 593); alsdann wird der Umriss m″ n″ p″ q″ r″ identisch mit M N P Q R darauf gezeichnet, indem man die Gerade n″ p″ = N P macht, und die anderen Ecken nach ihren Entfernungen von den Punkten N und P bestimmt; endlich ziehe man den Bogen n″ α″ m″ mit demselben Halbmesser, wie M N. Wenn aber mehrere gleiche Gewölbesteine vorkommen, wie in gegenwärtigem Falle, wo es sich um einen vollen Bogen handelt, so ist es bequemer, ein für allemal ein Brett oder ein Stück Carton nach der Form R M N P zu einer Schablone zuzuschneiden; diese legt man alsdann auf die ebene Fläche k n″ l i gehörig an und zeichnet nach ihr den Umriss m″ α″ n″ p″ q″ r″ des Gewölbesteinhauptes.

Nun wird durch die Gerade n″ p″, und senkrecht auf die Seitenfläche des Hauptes eine Ebene k n″ n′ h gelegt, die der Steinhauer mittelst des Winkeleisens ausführt. Auf diese wird sodann der genaue Umriss der obern Fuge N P gezeichnet, indem man rechte Winkel construirt, deren Schenkel

$$n'' n' = N'' N', \quad p'' p' = P'' P'$$

sind. Auf die nämliche Art erhält man die untere Fuge M R, indem man durch die Seite m″ r′ eine auf dem Haupte senkrechte Ebene legt und auf diese den Umriss jener Fuge zeichnet, welcher ein Rechteck m″ r″ r′ m′ wieder von der Länge M′ M″ ist. Nun kann der Arbeiter leicht die zweite Hauptfläche m′ n′ p′ q′ r′ als Ebene ausarbeiten, weil er, aus dem Vorhergehenden, zwei Gerade n′ p′ und m′ r′ kennt, welche in dieser Ebene liegen, die noch überdiess senkrecht auf beiden Fugen sein muss, was mittelst des Winkeleisens geprüft werden kann. Auf diese Ebene legt er alsdann die Schablone M N P Q R an, und zeichnet nach ihr den Umriss m′ n′ p′ q′ r′ dieses zweiten Hauptes des Gewölbesteins.

Was die cylindrische Wölbung betrifft, so lässt sie eine geradlinige Erzeugende zu, und kann also wie eine Ebene bearbeitet werden; nur muss man dem Arbeiter die Punkte bezeichnen, an welche er die Kante seines Lineals anlegen muss. Theilt man nun die beiden schon auf den Stein gezeichneten Bögen m″ α″ β″ n″, m′ α′ β′ n′ in dieselbe Anzahl gleicher Bogen, so entsprechen offenbar die Punkte α′ und α″, β′ und β″, ... einer und derselben Lage der geradlinigen Erzeugenden des Cylinders.

Für jede der Seitenflächen p″ q″ q′ p′ und q″ r″ r′ q′ endlich hat man aus den vorhergehenden Operationen drei Gerade erhalten, was mehr als hinreichend ist, um jene Ebenen zu behauen, welche überdiess senkrecht auf dem Haupte des Gewölbsteins sind. Gewöhnlich werden diese zwei Seitenflächen nur aus dem Gröbsten gehauen, wenigstens wenn die Mauer aus Bruchsteinen aufgeführt ist, wie hier vorausgesetzt wird.

§. 615.

Wenn die Vertikalprojection des Gewölbesteins die Form m n p q der Fig. 2 gehabt hätte, oder die Form M N P Q S R der Fig. 4, so wäre die Aufeinanderfolge der Operationen und die Bearbeitung der verschiedenen Seiten die nämliche gewesen, nur hätte die B r e t t u n g d e s H a u p t e s eine andere, nach der Vertikalprojection bestimmte Form erhalten.

Gerades Tonnengewölbe.

§. 616.

Die Zurüstung eines solchen, in Fig. 1 dargestellten Gewölbes, oder seine Theilung in Gewölbesteine wird auf die in den §§. 609, 610 erklärte Art ausgeführt; nur muss hier jede Schichte, weil sie eine zu grosse Länge hat, als dass sie aus einem einzigen Steine gebildet werden könnte, in verschiedene Theile getheilt werden, welche eine fortlaufende Reihe von Gewölbesteinen bilden. Diess geschieht mittelst der Vertikalebenen M′N′, M″N″, R′P′, T′Q′, ... welche alle senkrecht auf den Erzeugenden des Cylinders und folglich normal auf der innern Wölbungsfläche stehen. Man muss aber Sorge tragen, dass diese Vertikalfugen in solcher Ordnung zu liegen kommen, wie die Horizontalprojection es zeigt, indem man sie so mit einander abwechseln lässt, dass nur die von zwei zu zwei Schichten einander entsprechen.

§. 617.

Was das Behauen eines jeden Gewölbesteines betrifft, z. B. desjenigen, welcher vertikal in MNnm projicirt und zwischen den Vertikalebenen M′N′, M″N″ enthalten ist, so verfährt man genau, wie in §. 614, indem man sich hier der Hauptschablone MNnm bedient; nur muss die obere oder Rückenfläche mn, welche cylindrisch ist, auf dieselbe Art behauen werden, wie es am Schlusse des §. 614 für die innere Wölbungsfläche angegeben wurde, indem man auf den beiden gleichen Bögen mn, welche man auf den beiden Häuptern des Gewölbesteins gezogen hat, eine hinreichende Anzahl Punkte bezeichnet. Diese obere Fläche wird übrigens nur aus dem Groben gehauen, wenn man sie nicht ganz roh lässt.

Schräges Thor in eine anlaufende Mauer und in ein gemauertes Tonnengewölbe.

§. 618.

Um sich eine klare Vorstellung von vorliegender Aufgabe zu machen, stelle man sich ein grosses Tonnengewölbe vor, dessen gerader Schnitt ein vertikaler Halbkreis GXD″ ist, und das zu Pfeilern zwei Mauern hat, deren innere Wand D″d″ eine vertikale Ebene ist, während die äussere Wand D′d′ eine Böschung hat und schräge ist in Beziehung auf das Tonnengewölbe, d. h. der horizontale Grundschnitt d′c′ dieser geneigten Ebene ist nicht parallel mit der Erzeugenden D″C″ des Cylinders. In dieses Tonnengewölbe nun soll ein Thor angebracht werden, das zwischen zwei vertikalen Ebenen aa′a″ und bb′b″, die senkrecht auf dem Tonnengewölbe sind, enthalten sei, und das zur innern Wölbung einen Cylinder habe, dessen gerader Schnitt der vertikale Halbkreis AZB sei: der Anlauf AB dieses kleinen Gewölbes sei in der nämlichen Höhe, wie der des Tonnengewölbes. Der kleine Cylinder muss also die Böschungswand in einer Ellipse A′Z′B′ und den grossen Cylinder in einer Curve A″Z″B″ von doppelter Krümmung schneiden, zwischen welchen Curven alle Gewölbesteine des auszuführenden Thores enthalten sind. Taf. 35. Fig. 1.

Man bemerke hier, dass alles nun Folgende sich in gleicher Weise auf die Oeffnungen anwenden lässt, welche man oben in einem Tonnengewölbe anbringt, um das Innere zu erhellen, wie z. B. die Fenster im Schiffe einer Kirche; denn diese kleinen Gewölbe sind alle unter dem allgemeinen Namen Thore *(portes)* begriffen.

§. 619.

Es sei hier ein für allemal bemerkt, dass die Schrägen, Böschungen u. s. w., welche im

Folgenden öfters unter den gegebenen Stücken einer Aufgabe vorkommen, nicht als Beispiele einer regelmässigen Architektur dienen sollen; es wäre vielmehr unzweckmässig, derartige Constructionen in einen Bauplan aufzunehmen, dessen Entwurf ganz dem freien Willen des Baumeisters überlassen wäre. Manchmal aber ist man dazu gezwungen, besonders wenn es sich darum handelt, schon bestehende Bauwerke mit einander zu verbinden; und dann kommt es in vorliegendem Werke darauf an, die Probleme der Stereotomie in ihrer ganzen Allgemeinheit und mit allen nur möglichen Schwierigkeiten zu behandeln; denn man wird alsdann mit einer Aufgabe nur um so leichter zu Stande kommen, wenn sie solche Verwicklungen nicht enthält. Uebrigens stellen sich Schrägen und Böschungen als nothwendig dar in der Fortification und bei anderen Arten öffentlicher Arbeiten, z. B. bei den Verkleidungsmauern der Kais, bei den Wasserleitungen, Brücken und Viaducten der Eisenbahnen.

§. 620.

Taf. 36. Bei der Zeichnung des Risses zu vorliegender Aufgabe wird gänzlich abstrahirt von den Pfeilermauern, welche keine Schwierigkeit darbieten und in den Fall des §. 594 gehören. Als Horizontalebene wird die Ebene des dem Thorbogen und Tonnengewölbe gemeinschaftlichen Anlaufs angenommen und als Vertikalebene eine senkrecht auf der Axe $O\,O'\,O''$ des Thorbogens stehende Ebene. Auf dieser letztern zeichne man den Halbkreis $A\,M\,B$, welcher den geraden Schnitt der innern Wölbung jenes Bogens darstellt; und auf der Horizontalebene sei $C'\,A'\,B'\,D'$ der Grundschnitt der Böschungsmauer und $C''\,A''\,B''\,D''$ die erste Erzeugende des Tonnengewölbes, mit welchem der Thorbogen verbunden werden soll *). Nachdem man nun den Kreis $A\,M\,B$ in eine ungerade (§. 609) Anzahl gleicher Theile getheilt hat (deren Zahl hier auf f ü n f beschränkt wurde, um Wiederholungen in der Construction zu vermeiden, welche das Studium der Figur erschwert hätten), lege man durch die Theilpunkte und durch die Axe $O\,O'$ des Cylinders die Ebenen $M\,O\,O'$, $N\,O\,O'$, ... durch welche die Stossfugen der Gewölbsteine bestimmt werden. Diese Fugen stehen normal auf der innern Wölbungsfläche, wie es in §. 584 gefordert wurde, und schneiden offenbar auch jene Fläche in geradlinigen Erzeugenden, welche die K a n t e n der B o g e n f l ä c h e heissen. Hierauf begrenze man die Fugen $M\,R$, $N\,P$... durch einen mit dem ersten concentrischen Kreise $C\,R\,D$, und jeden Gewölbstein durch eine horizontale Seitenfläche $R\,Q$ und eine vertikale $P\,Q$. Diese einfachste Zurüstungsart wird hier desshalb gewählt, weil angenommen wird, das Tonnengewölbe, mit welchem der Thorbogen verbunden werden soll, sei gemauert, d. h. aus Bruchsteinen, Ziegeln u. s. w. zusammengesetzt und nur das Thorgewölbe und seine Pfeiler $A'\,A''\,C''\,C'$, $B'\,B''\,D''\,D'$ werden in Stein ausgeführt. Wäre es anders, so müsste die Zurüstung etwas geändert werden, wie §. 639 es zeigen wird.

§. 621.

Hienach wird also einer der Gewölbsteine vertikal auf das Fünfeck $M\,N\,P\,Q\,R$ projicirt, und er nimmt in dem geraden Prisma, welches dieses Fünfeck zur Basis hat, den Theil ein, welcher zwischen der durch $A'\,B'$ gehenden geneigten Ebene und dem Gewölbecylinder enthalten ist, der mit der Erzeugenden $A''\,B''$ anfängt. Um also diesen Gewölbestein, der hier insbesondere zum Beispiel genommen wird, zu bestimmen, muss man die Durchschnitte aller Seitenflächen des Prisma 1) mit der geneigten Ebene $A'\,B'$, und 2) mit dem Cylinder des Tonnengewölbes suchen.

*) Es wird hier im Steinschnitte häufig vorkommen, dass die vertikale Projection durch Buchstaben ohne Accent bezeichnet wird, weil man gewöhnlich auf die Vertikalebene die ersten gegebenen Stücke des Risses zeichnet. Es wird übrigens bei jeder Aufgabe Sorge getragen werden, dass die auf einerlei Art accentuirten Buchstaben sich auf eine und dieselbe Projectionsebene beziehen.

§. 622.

Durch einen beliebigen Punkt C′ des Grundschnittes A′B′ der Böschungsmauer lege man zwei Vertikalebenen C′E′, C′F′, die eine senkrecht auf diesen Grundschnitt, die andere parallel mit den Erzeugenden des Thorbogencylinders. Diese Ebenen schneiden die Böschungsmauer in zwei geneigten Geraden, welche mit der Vertikalen C′ zwei ungleiche Winkel bilden, deren erster offenbar das genaue, durch die Aufgabe bestimmte Mass der Böschung sein wird (§. 590), und der auf der Vertikalebene in Y C Z sich aufgeklappt darstellt. Um aus ihm auch den andern in der Vertikalebene C′F′ enthaltenen Winkel abzuleiten, nehme man auf den Schenkeln C′E′, C′F′ zwei in gleicher Höhe liegende Punkte, indem man nach Belieben die Gerade E′F′ parallel mit C′A′ zieht; hierauf drehe man beide Winkel so lange um die Vertikale C′, bis sie mit der Vertikalebene parallel werden. Alsdann muss der in E′ projicirte Punkt sich in E auf der Geraden C Y aufklappen; und der in F′ projicirte Punkt wird sich, weil er mit dem vorigen in gleicher Höhe sich befindet, auf der durch E gezogenen Horizontalen E Z aufklappen und daher in den Punkt F fallen, welcher durch den mit C′F′ beschriebenen Bogen bestimmt wird. Verbindet man nun F mit C, so erhält man die wahre Grösse F C Z des durch den Schnitt C′F′ gebildeten Winkels, auf welchen die folgenden Operationen begründet werden.

§. 623.

Diejenige Gewölbekante, welche von M ausgeht, ist horizontal in G α' M′ projicirt. Um nun die Projection M′ desjenigen Punktes zu erhalten, in welchem sie die geneigte Ebene A′B′ schneidet, denke man sich durch diese Kante eine Vertikalebene G α' M′ gelegt: diese schneidet die Böschungsmauer in einer Geraden, welche mit der Vertikalen α' einen Winkel bildet, der offenbar gleich F C Z ist, und es ist leicht einzusehen, dass dasjenige Stück der Kante, welches innerhalb dieses Winkels liegt, genau der Entfernung des Punktes α' von der gesuchten Projection M′ gleich sein muss. Dieses Kantenstück aber ändert seine Länge nicht, wenn man jenen Winkel auf die Vertikalebene aufklappt und nach F C Z versetzt, weil alle seine Punkte, eben so wie M, dieselbe Höhe behalten, wie vorher. Zieht man daher die Horizontale M I K und trägt den Abschnitt I K von α' nach M′, so erhält man die Horizontalprojection M′ des Punktes, in welchem die von M ausgehende Wölbungskante die Böschungsmauer trifft.

Zieht man ebenso die Horizontale N J L und nimmt β' N′ = J L, so erhält man den Punkt N′, wo die von N ausgehende Wölbungskante die Mauer trifft; und verfährt man auf gleiche Weise in Beziehung auf die anderen Theilungspunkte des Kreises A M N B, so wie auch auf die dazwischen liegenden Punkte, wie z. B. die Mitten der Bögen B N, M N, ... so kann man die Curve A′M′N′B′ zeichnen, welche die Horizontalprojection des Stirnbogens auf der Böschungsmauer ist.

§. 624.

Dieses Verfahren lässt sich offenbar auch auf die horizontalen Kanten der Fugenflächen anwenden. Für diejenige z. B., welche von R ausgeht und horizontal in S γ' R′ projicirt ist, ziehe man durch R eine Horizontale, welche den Winkel F C Z schneidet, und trage den zwischen letzterem enthaltenen Abschnitt von γ' nach R′; nun ist M′R′ der Durchschnitt der Fugenebene M R mit der Böschungsmauer. Als Probe bietet sich hier ein einfaches Mittel dar: die so erhaltene und verlängerte Gerade M′R′ muss durch O′ gehen, weil in diesem Punkte sich die horizontalen Grundschnitte der Fugenebene M O O′ und der geneigten Ebene A′B′ schneiden.

Auf ähnliche Weise erhält man den Durchschnitt N′ P′ der untern Fuge N P mit der Böschungsmauer. Was die horizontale Seitenfläche R Q betrifft, so schneidet sie eben diese Mauer in der mit A′ B′ parallelen Geraden R′ Q′, und die vertikale Seitenfläche P Q erzeugt einen geneigten Schnitt, der sich in P′ Q′ projiciren muss, so dass das äussere Haupt des Gewölbesteines, der als Beispiel genommen wurde, nun vollständig in M′ N′ P′ Q′ R′ projicirt ist.

§. 625.

Um das andere Haupt des Gewölbesteines zu bestimmen, welches einen Theil der Cylinderfläche des Tonnengewölbes ausmacht, das mit der Geraden C″ D″ anfängt, so denke man sich wieder durch die Wölbungskante (M, G M′ α'' M″) eine Vertikalebene: diese schneidet das Tonnengewölbe in einem Halbkreise, welcher gleich ist dem durch die Aufgabe bestimmten geraden Schnitte dieses Gewölbes, der, auf die Vertikalebene aufgeklappt, sich als Bogen D X darstellt. Dasjenige Stück der Kante nun, welches zwischen diesem Halbkreise und der ihn berührenden Vertikalen α'' enthalten ist, muss offenbar gleich sein der Entfernung des Fusspunktes α'' dieser Vertikalen von der Projection M″ des Punktes, in welchem die Kante die Gewölbefläche trifft. Zieht man daher die Horizontale M T U und trägt den Abschnitt T U von α'' nach M″, so ist letzterer Punkt der Durchschnitt des Tonnengewölbes mit der von M ausgehenden Wölbungskante.

Zieht man ebenso durch N die Horizontale N t u und nimmt $6''$ N″ = t u, so erhält man den Punkt N″ als Durchschnitt des Tonnengewölbes mit der von N ausgehenden Wölbungskante; und verfährt man auf die nämliche Weise für alle Theilpunkte des Kreises A M N B, so wie auch für die Mitten der Bögen B N, M N, ... so erhält man die Curve A″ M″ N″ B″, welche die Horizontalprojection des Durchschnittes des Thorbogencylinders mit dem Cylinder des Tonnengewölbes darstellt *).

§. 626.

Denkt man sich auch durch die Rückenkante (R, S R′ γ'') eine Vertikalebene gelegt, so muss man wieder von γ'' nach R″ den Abschnitt V X der Horizontalen R V X tragen, um den Punkt R″ zu erhalten, in welchem die Kante das Tonnengewölbe schneidet. Da aber hier die Fugenebene M R den Gewölbecylinder in einer Curve R″ M″ schneidet, welche ein Ellipsenbogen ist, so muss man mehrere zwischen R″ und M″ liegende Punkte suchen, indem man das vorige Verfahren wenigstens für die Mitte von M R wiederholt. Der verlängerte Ellipsenbogen muss durch O″ gehen und muss in diesem Punkte seiner Projection von der Geraden

*) Diese Projection A″ M″ N″ B″ ist ein Stück einer gleichseitigen Hyperbel; denn bezieht man die beiden Cylinder auf drei rechtwinklige Axen O z, O x, O y, und bezeichnet durch δ die Entfernung O O″, so sind die Gleichungen der Cylinder

$$x^2 + z^2 = r^2 \text{ und } (y - \delta - R')^2 + z^2 = R'^2;$$

aus welchen man durch Subtraction erhält:

$$(y - \delta - R')^2 - x^2 = R'^2 - r^2,$$

eine Gleichung, welche einer gleichseitigen Hyperbel zukommt, deren Mittelpunkt ω auf der Achse O y liegt, in einer Entfernung $O\omega = \delta + R'$; d. h. die Axen dieser Hyperbel sind die Axen beider Cylinder. Man bemerke auch, dass der vollständige Durchschnitt dieser beiden Flächen aus zwei von einander abgesonderten Aesten bestehen würde, deren jeder eine geschlossene Curve von doppelter Krümmung wäre; da aber für die Eintrittscurve z. B. die beiden über und unter der Anlaufsebene liegenden Bögen vollkommen symmetrisch wären, so würden beide sich auf das Hyperbelstück A″ M″ B″ projiciren, während der zweite Ast dieser Hyperbel die Projection des obern und untern Theiles der, hier nicht angewendeten, Austrittscurve aufnehmen würde. In dem besondern Falle, da die beiden Cylinder gleich sind, stellt die vorhergehende Gleichung zwei Gerade dar, woraus hervorgeht, dass die Cylinder sich alsdann in zwei ebenen Curven schneiden: ein Fall, der bei Kreuzgewölben vorkommt, von denen später die Rede sein wird.

O″ B″ berührt werden, weil diese der horizontale Grundschnitt einer Vertikalebene ist, welche das Gewölbe in seinem Anlaufe berührt.

Verfährt man ebenso in Beziehung auf die untere Fuge N P, so findet man, dass sie das Tonnengewölbe in dem Ellipsenbogen P″ N″ schneidet; ferner erzeugt die vertikale Seitenfläche P Q mit diesem Tonnengewölbe einen kreisförmigen, in der Geraden P″ Q″ projicirten Schnitt, und die horizontale Seitenfläche Q R schneidet das Gewölbe in der Erzeugenden R″ Q″. Somit ist M″ N″ P″ Q″ R″ die vollständige Projection des innern Gewölbestein-Hauptes und der Gewölbestein ist nun völlig bestimmt. Man darf jetzt nur noch ähnliche Constructionen für jeden der übrigen Gewölbesteine ausführen, wie solches die Figur hinlänglich anzeigt.

§. 627.

Von den Tangenten.

Es ist gut, sich in der Construction der Tangenten an den Hauptcurven, welche in der Stereotomie vorkommen, zu üben, weil diess nicht selten ein nützliches Hilfsmittel ist, um die Zeichnung dieser Curven, ehe man sie auf den Stein bringt, zu prüfen und zu berichtigen. Taf. 36.

Die Tangente der ersten Curve A′ M′ B′ für einen beliebigen Punkt (M, M′) erhält man durch Verbindung des horizontalen Grundschnittes A′ B′ der Böschungsebene mit dem der Berührungsebene an dem Thorbogencylinder, welche durch die Tangente am Kreise A M B geht; diese Construction ist aber so leicht, dass es überflüssig schien, sie auf der Figur auszuführen.

Was die Hauptcurve A″ M″ B″ auf dem Tonnengewölbe betrifft, so könnte man ihre Tangente für einen beliebigen Punkt (M, M″) durch Verbindung der Berührungsebene des Cylinders A M B mit der Berührungsebene des Tonnengewölbes erhalten; um letztere zu finden, müsste man die Tangente an den Punkt U des Bogens D X ziehen, und die Entfernung des Fusspunktes dieser Tangente von D auf die Gerade D″ D über D″ tragen, wodurch man offenbar einen Punkt des horizontalen Grundschnittes der Berührungsebene erhielte; der Grundschnitt selbst wäre alsdann die durch diesen Punkt mit A″ D″ gezogene Parallele. Dieses Verfahren ist aber weniger einfach, als das folgende, und könnte überdiess nicht auf die Anlaufspunkte A″ und B″ angewendet werden; denn da für letztere die Berührungsebenen vertikal sind und sich in einer Vertikalen schneiden, deren Horizontalprojection sich auf einen Punkt reducirt, so würde man also durch das angegebene Verfahren keine Tangente der ebenen Curve am Punkte B″ z. B. erhalten können.

§. 628.

Man wende daher die Methode der Normalebene an (Darst. Geom. §. 214). Die Normale des Cylinders A M B im Punkte (M, M″) projicirt sich offenbar auf die senkrecht auf der Axe O O″ stehende Gerade M″ ε, und schneidet die Horizontalebene im Punkte ε, wo sie diese Axe trifft. Was das Tonnengewölbe betrifft, das zur ersten Erzeugenden A″ B″ und zur Axe die Gerade $\omega\,\xi$ hat, welche man in einer dem bekannten Halbmesser des Bogens D X gleichen Entfernung O″ ω gezogen hat, so projicirt die Normale im Punkte (M, M″) sich auf M″ λ, und ihr horizontaler Durchgang ist in λ, wo sie die Axe $\omega\,\xi$ trifft. Mithin ist die Gerade $\varepsilon\,\lambda$ der Grundschnitt der Normalebene auf dem Durchschnitte beider Cylinder, und man darf daher nur auf diesen Grundschnitt eine Senkrechte M″ θ ziehen, um die Tangente an der Projection A″ M″ B″ zu erhalten.

Es scheint zwar anfänglich, als ob diese Methode, eben so wie die andere, für den Anlaufspunkt B″ nicht ausreiche, weil für diesen die Ebene der beiden Normalen mit der Horizontalebene zusammenfällt und

mithin der Grundschnitt der erstern auf der zweiten unbestimmt bleibt. Betrachtet man aber das für den Punkt M'' erhaltene Resultat an sich und unabhängig von den räumlichen Verhältnissen, die zu seiner Herstellung dienten, so bleibt immer wahr, dass die ebene Curve A'' M'' B'', unabhängig von der Linie mit doppelter Krümmung, deren Projection sie ist, folgende Eigenschaft besitzt: wenn man von jedem Punkte M'' zwei Senkrechten $M''\varepsilon$ und $M''\lambda$ auf die Linien $O\omega$ und $\omega\xi$ fällt, so ist stets die Gerade $\varepsilon\lambda$ senkrecht auf der Tangente an M''. Diese Eigenschaft nun ist es allein, an welche man sich zu halten hat, wenn man die Tangente an B'' construiren will; von dem Grundschnitte der Normalebene dieses Punktes braucht dabei gar keine Rede zu sein. Man verlängert also B B'' um eine Länge, welche dem Halbmesser des Bogens D X gleich ist und verbindet den Endpunkt dieser Länge mit dem Punkte O'', so erhält man die Gerade, auf welcher die Tangente an B'' senkrecht sein muss. Die Ausführung dieser sehr einfachen Construction bleibt dem Leser überlassen.

§. 629.

Entwickelte (verstreckte) Brettungen.

Taf. 36. Es sind jetzt alle Gewölbsteine bestimmt; aber von den meisten ihrer Seitenflächen sind nur die Projectionen bekannt, und um den Riss auf den Stein zu bringen, muss man, wenigstens von den Fugen und Wölbungsflächen, die wahre Grösse haben. Die Wölbungsflächen nun gehören alle einer Cylinderfläche an, deren orthogonaler Schnitt A M B bei der Entwicklung des Cylinders geradlinig wird, wie man in der darstellenden Geometrie gesehen hat. Man rectificire also diese Curve (gewöhnlich die Directionslinie genannt), indem man auf der unbestimmten Geraden a b die Distanzen b n, n m, ... gleich den Längen der Bögen B N, M N, ... nimmt, was im Allgemeinen mittelst sehr kleiner Zirkelöffnungen geschieht, die man auf dem Bogen B N so oftmal herumträgt, als nöthig ist; nachdem man hierauf in allen Theilpunkten n, m... Senkrechte auf a b errichtet hat, nehme man die Distanzen

$$bb' = BB',\ nn' = HN',\ mm' = GM',\ \ldots\ldots\ aa' = AA'.$$

Dieses nämliche Verfahren muss man auch auf diejenigen Erzeugenden anwenden, welche von den Mitten der Bögen B N, N M, ... ausgehen, damit man genug Punkte erhalte, um mit hinlänglicher Genauigkeit die Curve a' m' n' b' zeichnen zu können, welche die Verwandelte (*transformée*) des in A' M' N' B' projicirten Bogens ist.

Eben so nehme man die Distanzen

$$bb'' = BB'',\ nn'' = HN'',\ mm'' = GM'',\ \ldots\ aa'' = AA'',$$

so erhält man die Curve a'' m'' n'' b'' als die Verwandelte des Bogens auf dem Tonnengewölbe, der in A'' M'' N'' B'' projicirt ist. Man bemerke, dass diese Curve a'' m'' n'' b'' die Gerade a'' b'' in ihren beiden Endpunkten berühren muss. Denn es ist in §. 627 gesagt worden, dass die Tangente am Punkte B'' der in A'' M'' B'' projicirten Linie von doppelter Krümmung vertikal sei, wesshalb sie also einen rechten Winkel mit der Erzeugenden B B'' bildet; da dieser Winkel aber constant bleibt bei der Entwicklung des Cylinders (Darst. Geom. §. 162), so wird die Tangente der Linie a'' m'' b'' noch immer senkrecht auf der Erzeugenden b b'' sein.

Was die Curve a' m' b' betrifft, so bildet ihre Tangente an a' mit a' a'' noch immer den nämlichen Winkel, den die Tangente an dem in A' M' B' projicirten Bogen mit der Erzeugenden A' A'' bildete; dieser letztere Winkel ist aber offenbar gleich dem Complemente desjenigen, der im §. 622 in F C Z aufgeklappt wurde.

§. 630.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die innere Wölbungsfläche des Steines MNPQR in der Brettung m′n′n″m″ sich entwickelt darstellt; was die Fugen betrifft, so sind sie eben, und man darf sie daher nur um die Kanten m′m″ und n′n′, welche sie mit der Wölbungsfläche gemein haben, aufklappen. Man nehme daher die Distanzen mr und np gleich den Breiten MR und NP der beiden Fugen; hierauf errichte man die Senkrechten

$$rr' = SR',\ rr'' = SR'',\ pp' = WP',\ pp'' = WP'',$$

so sind die Geraden m′r′ und n′p′ die äusseren Seiten der Fugen. Die beiden anderen Seiten m″r″ und n″p″ sind Curven, und man muss sich desshalb wenigstens einen Punkt zwischen m″ und r″, und einen zwischen n″ und p″ verschaffen, was durch dasselbe Verfahren geschieht, das man oben für die Mitten der Fugen MR, NP angewendet hat, mittelst welcher man bereits die Projectionen M″R″, N″P″ eben dieser Curven erhalten hat.

§. 631.

Es kommt noch eine andere Curve $\alpha'\alpha_2\beta_2 b'$ auf der Figur vor, deren Bedeutung folgende ist. Wenn die äussere Mauer keine Böschung hätte, so würden alle Häupter der Gewölbesteine sich auf den Grundschnitt A′B′ jener Vertikalebene projiciren, so dass also die verschiedenen Constructionen der §§. 622, 623, 624 wegfielen; und was die Entwicklung betrifft, so müsste man die Distanzen

$$bb' = BB',\ n\beta_2 = H\beta',\ m\alpha_2 = G\alpha', \ldots,\ aa' = AA'$$

nehmen, um die Verwandelte des Hauptbogens zu erhalten; es würden also die Schablonen der Wölbungsfläche sich bis zu dieser Curve $\alpha'\alpha_2\beta_2 b'$ erstrecken. Die Fugen müssten auch verlängert werden, denn man müsste

$$p\delta_2 = W\delta',\ r\gamma_2 = S\gamma', \ldots$$

nehmen, um die äusseren Seiten $\beta_2\delta_2$, $\alpha_2\gamma_2$ der Schablonen dieser Fugen zu erhalten.

§. 632.

Als Probe für eine richtige Construction kann folgendes Verfahren gelten. Dreht man die Fugenebene MOO″, welche die Axe OO″ des Cylinders enthält, um die Wölbungskante (M, M′M″), so kommt diese Axe in eine Lage, welche leicht auf der Entwicklungsebene (Fig. 3) zu finden ist. Man nehme mo = MO, so stellt oo″ die neue Lage der Cylinderaxe dar; und nimmt man ferner oo′ = OO′, so erhält man den Punkt o′, in welchem die Verlängerungen der Seiten m′r′ und $\alpha_2\gamma_2$ der obern Fuge MR zusammenlaufen müssen, wenn die äussere Mauerfläche das eine Mal mit, das andere Mal ohne Böschung angenommen wird. Ferner ist die Seite m″r″ dieser nämlichen Fuge ein Ellipsenbogen, dessen Verlängerung durch O″ gehen und in diesem Punkte die Gerade a″b″ berühren muss, wie solches offenbar aus der Projection R″M″O″ dieses nämlichen Bogens hervorgeht. Aehnliche Proben kann man auch für die übrigen Fugen anstellen.

§. 633.

Bearbeitung des Steines nach dem Musterrisse.

Um die Gewölbesteine zu behauen, z. B. denjenigen, dessen Projection MNPQR ist, kann man zwei verschiedene Methoden anwenden. Die erste, die winkelrechte Behauungsmethode (*par équarrissement* oder *par dérobement*) verlangt, dass man zuerst ein gerades Prisma herstelle, dessen Raum den fraglichen Gewölbestein fassen könne. Prisma heisst hier jeder Körper, dessen Seiten-Umfläche durch eine

Gerade erzeugt wurde, welche, indem sie einer gegebenen Richtung parallel blieb, den Umfang eines Vielecks $RM\psi NPQ$ von geraden oder krummen Seiten bestreifte. Die krummen Seiten, wie $M\psi N$, liefern cylindrische Seitenflächen. Diese Methode lässt im Allgemeinen mehr Präcision zu und liefert genauere Resultate als die Behauung mittelst der Schmiege (*par biveaux*), von welcher nachher die Rede sein wird; aber sie erfordert dafür auch Steine von grösserem Volumen, und veranlasst daher auch mehr Abfall; überdiess verlangt sie öfters die Behauung von Seitenflächen, welche später wieder zerstört werden müssen, so dass also manche Zeit und Mühe verloren geht. Man hat jedoch die Mängel dieser Methode übertrieben, wenn man behauptete, sie verlange die vollständige Herstellung eines rechtwinkligen Parallelepipeds; es genügt ihr die Anwendung eines geraden Prisma, von welchem nur die Basis mit 3 Seitenflächen ausgearbeitet werden dürfen. Ueberdiess gibt es Fälle, wie später sich zeigen wird, wo man ihrer gar nicht entbehren kann.

§. 634.

Behauung des Steins mittelst Winkelmass und Brettung.

Taf. 35 u. 36. Fig. 4.

Man denke sich ein gerades Prisma, das zur Grundfläche die Verticalprojection $RM\psi NPQ$ des fraglichen Gewölbesteines (Taf. 36) und zur Länge die grösste Dimension $P'Q''$ der horizontalen Projection habe. Nun wähle man einen Steinblock (Fig. 4), welcher diesem Prisma wenigstens gleich sei, richte die Basis zu einer genauen Ebene her (§. 593) und zeichne darauf den Umriss $m_1\ n_1\ P_1\ q_1\ r$, mittelst einer nach der Vertikalprojection $MNPQR$ (Taf. 36) ausgeschnittenen Brettung (§. 614). Man muss Sorge tragen, diese Brettung so zu drehen, dass die Seite MR von einer der Fugen so viel wie möglich mit dem Steinlager $m_1\ r_1\ R_2$ zusammenfalle, aus dem in §. 587 angeführten Grunde. Hierauf muss der Stein längs der Geraden $m_1\ r_1$ ausgeviert werden, d. h. es wird mittelst des Winkelmasses eine durch $m_1\ r_1$ gehende Ebene ausgearbeitet, welche senkrecht auf der bereits behauenen Basis steht. Auf diese Ebene wird sodann die Brettung $m'r'\ r''m''$ (Fig. 3) der obern Fuge angelegt in den Entfernungen $m_1 M_1 = G'M'$, $r_1 R_1 = R'S'$, und nach dieser Brettung zeichnet man den Umriss $R_1\ M_1\ M_2 R_2$ der wahren Fuge. Eben so verfährt man in Beziehung auf die Fugenebene, welche durch die Gerade $P_1\ n_1$ geht und welche auch senkrecht auf der Basis des Prisma ist; man legt, nachdem sie gehörig bearbeitet worden, die Brettung $n'p'\ p''n''$ der Fig. 3 auf und zeichnet nach dieser den Umriss $P_1\ N_1\ N_2\ P_2$ der untern Fuge.

Die Wölbungsfläche ist ein Theil des durch $m_1\, n_1$ gehenden Cylinders, dessen Erzeugende senkrecht auf der Ebene dieses Bogens stehen; das Winkelmass reicht also zur Behauung dieses Cylinders hin, und ist der Schenkel des Winkelmasses nicht lang genug, so wendet der Arbeiter eine nach der Krümmung des Bogens MN ausgeschnittene Lehre *) (*cerce*) an, die er so auf den beiden bereits gezeichneten Geraden $m_1 M_2$, $n_1\ N_2$ hin- und herführt, dass sie immer durch zwei in gleicher Entfernung von dem geraden Schnitte $m_1\ n_1$ genommene und auf dem Stein bemerkte Punkte geht; auf diese Art wird er leicht mit dieser Cylinderfläche zu Stande kommen. Endlich muss er die Wölbungsbrettung $m'n'\ n''m''$ der Fig. 3 darauf legen; diese muss in Carton oder Eisenblech ausgeführt und also biegsam sein, dass man sie genau auf die concave Fläche $M_1\ N_1\ N_2\ M_2$ aufdrücken kann; in diesem Zustande werden alsdann die beiden Curven $M_1\ N_1$ und $M_2\ N_2$ auf den Stein gezeichnet **).

*) Unter einer Lehre versteht man ein dünnes Brettchen von Holz, dessen Rand nach dem convexen oder concaven Umrisse einer bestimmten Curve (Fig. 6 und 7) ausgeschnitten ist, und das man, als ein bewegliches Muster, auf den verschiedenen Theilen einer auszuführenden krummen Fläche hin- und herführt.

**) Man könnte, um zu diesen nämlichen Resultaten zu gelangen, den ganzen zweiten Theil der Taf. 36, nämlich Fig. 3,

Die Seitenfläche $P_1\ q_1\ Q_2\ P_2$ endlich und die obere Fläche $q_1\ r_1\ R_2\ Q_2$ sind Ebenen, deren jede durch zwei bekannte Gerade geht, und welche überdiess senkrecht auf der Basis des Prisma stehen: es ist daher leicht, sie zu behauen; und nachdem man hierauf die Distanzen $q_1\ Q_1 = P'\ Q'$, $q_1\ Q_2 = P'\ Q''$ genommen, ziehe man die Geraden $R_1\ Q_1$, $Q_1\ P_1$ und den Kreisbogen $Q_2\ P_2$ mittelst einer Lehre, welche nach der auf Taf. 36 gegebenen Krümmung des geraden Schnittes D X des Tonnengewölbes ausgeschnitten wurde.

§. 635.

Da nun der Umriss $R_2\ M_2\ N_2\ P_2\ Q_2$ des Gewölbesteinhauptes in Beziehung auf das Tonnengewölbe völlig auf dem Prisma bestimmt ist, so kann man jetzt diese cylindrische Seitenfläche behauen, indem man das Richtscheit so anlegt, dass es nach einander den Lagen $\alpha\ \beta$, $\alpha'\ \beta'$, $M_2\ \beta''$ entspreche, welche durch je zwei auf einer und derselben Erzeugenden liegende Punkte bestimmt und auf dem Steine bemerkt sind. Diese Punkte aber findet man leicht, indem man auf der Basis des Prisma verschiedene mit $q_1\ r_1$ parallele Gerade zieht, wie $\alpha_1\ \beta_1$, und hierauf durch Horizontallinien die Punkte α_1 und β_1 auf α' und β' bezieht. Was das andere Haupt $R_1\ M_1\ N_1\ P_1\ Q_1$ betrifft, so ist dasselbe eine Ebene, deren Umriss aus dem Vorhergehenden völlig bekannt ist, und kann also durch Auflegung des Richtscheits auf beliebige Punkte dieses Umrisses hergestellt werden. Hat man endlich den Stein, welcher diese Grenze links überragt, weggenommen, so erhält man als Gewölbestein den Körper

$$M_1\ N_1\ P_1\ Q_1\ R_1\ R_2\ M_2\ N_2\ P_2\ Q_2.$$

§. 636.

Bearbeitung des Steines mittelst der Schmiege.

In Fig. 4 wurde mit Behauung des geraden Schnittes $m_1\ n_1\ P_1\ q_1\ r_1$ angefangen: da aber wegen der hier stattfindenden Schräge und Böschung diese Seitenfläche wieder zerstört werden muss, so kann man diesem Verluste an Zeit und Material auf folgende Art entgehen. Nachdem man eine der Lagerflächen hergerichtet und den Umriss $M_1\ R_1\ R_2\ M_2$ der obern Fuge darauf gezeichnet hat, lege der Arbeiter durch die Gerade $M_1\ M_2$ eine Ebene, welche mit dieser Fuge einen Winkel mache gleich dem Winkel $R\ M\ \varphi$ auf Taf. 36. Diess ist die Ebene der platten Wölbung, welche durch die Sehne $M\ \varphi\ N$ und die beiden Wölbungskanten des Steines ginge, und welche vorläufig an die Stelle der wahren cylindrischen Wölbungsfläche gesetzt wird. Um diese platte Wölbung zu behauen, gibt man dem Arbeiter eine Schmiege *), deren Winkel dem Winkel $R\ M\ \varphi$ gleich ist; und indem er diese Schmiege nun in einer stets auf der Kante $M_1\ M_2$ Taf. 35. Fig. 5.

d. h. die Wölbungs- und Fugenbrettungen entbehren, wenn der Werkmeister sich die Mühe nehmen wollte, die Umrisse der Seitenflächen auf den Stein selbst zu zeichnen. Es dürfte aber in diesem Falle der Zeichnungsort des Musterrisses nicht von dem Bauplatze entfernt sein, oder der Werkmeister müsste auf einer flüchtig hingeworfenen Figur die Längen der verschiedenen Geraden $G'M'$, $G'M''$, $S'R'$, $S'R''$, $H'N'$, $H'N''$, ... und einiger anderen dazwischen liegenden Linien, wie sie auf der ersten Figur bemerkt sind, in Millimetern notirt haben. Wenn alsdann der Arbeiter das gerade Prisma, welches $m_1\ n_1\ P_1\ q_1\ r_1$ (Fig. 4) zur Basis hat, hergerichtet hätte, so würde der Werkmeister auf dem Steine selbst die Distanzen $r_1\ R_1$, $r_1\ R_2$, $m_1\ M_1$, $m_1\ M_2$, ... bemerken, hierauf aus freier Hand die Curven $R_2\ M_2$, $M_2\ N_2$... mittelst einiger zuvor bestimmter, dazwischen liegender Punkte zeichnen, und so also die nämlichen Operationen vornehmen, welche die Ausführung der Fig. 3 auf Taf. 36 erfordert hätte.

*) Eine Schmiege (*biveau*, *beuveau*) oder Schrägmass ist eine Art Winkelmass (Fig. 8), welches aus zwei hölzernen oder eisernen Linealen besteht, die durch einen Bolzen wohl mit einander verbunden sind und einen spitzen oder stumpfen Winkel zwischen sich enthalten. Es gibt auch Schmiegen, deren einer Schenkel krummlinig ist (Fig. 9) und welche dazu dienen, einer Ebene die gehörige Neigung gegen eine krumme Fläche zu geben, wie z. B. auf Taf. 36 $R\ M\ \psi$ den Winkel darstellt, welchen die Gewölbefuge mit der cylindrischen Wölbungsfläche bildet.

normalen Ebene hält, bedient er sich derselben als eines gewöhnlichen Winkelmasses, um die verlangte Ebene auszuführen. Auf diese unbestimmte Ebene wird hierauf der Umriss $M_1\ \varphi_1\ N_1\ N_2$ der platten Wölbung gezeichnet, welcher ein leicht aus Taf. 36 abzuleitendes Trapez ist *).

Mit einer Schmiege, deren Winkel gleich φ N P ist (dieser Winkel ist hier derselbe, wie R M φ), und deren einer Schenkel auf die platte Wölbung aufgelegt wird, während die Ebene der Schmiege stets normal auf der Kante $N_1\ N_2$ bleibt, wird nun auf ähnliche Weise auch die untere Fuge hergestellt und sodann auf diese der Umriss $N_1\ N_2\ P_2\ P_1$ mittelst der dieser Fuge entsprechenden Brettung aufgezeichnet. Nun kann das Haupt des Steines auf der Böschungsseite bearbeitet werden, weil dasselbe eine Ebene ist, welche durch die drei bereits bekannten Geraden $R_1\ M_1$, $M_1\ N_1$, $N_1\ P_1$ geht; auf diese Ebene wird alsdann der Umriss $M_1\ \psi_1\ N_1\ P_1\ Q_1\ R_1$ dieses Hauptes gezeichnet, welcher auf Taf. 36 zwar nur in seiner Projection vorkommt, dessen Aufklappung aber leicht zu finden ist. Hierauf muss die cylindrische Wölbung, welche mit dem Bogen $M_1\ \psi_1\ N_1$ anfängt, ausgehöhlt werden, wobei man sich einer nach der Krümmung des Bogens M ψ N auf Taf. 36 ausgeschnittenen L e h r e (§. 634) bedient; mittelst der Wölbungsbrettung, die sofort auf diese Cylinderfläche angelegt wird, kann man endlich die andere Grenze $M_2\ \psi_2\ N_2$ aufzeichnen.

Was die beiden ebenen Seitenflächen $R_1\ Q_1\ Q_2\ R_2$ und $P_1\ Q_1\ Q_2\ P_2$ betrifft, so kennt man bereits von jeder 2 Gerade, und es ist daher leicht, sie auszuarbeiten oder wenigstens aus dem Groben zu hauen. Auf die zweite dieser Seitenflächen wird mittelst einer nach dem geraden Schnitte D X des Tonnengewölbes ausgeschnittenen Lehre die Curve $P_2\ Q_2$ gezeichnet; und da alsdann der Umriss $M_2\ \psi_2\ N_2\ P_2\ Q_2\ R_2$ des zweiten Hauptes ganz bekannt ist, so kann diese cylindrische Fläche leicht behauen werden mittelst eines Richtscheites, das stets parallel mit $R_2\ Q_2$ angelegt wird.

§. 637.

Diese zweite Methode wird von den Steinhauern vorgezogen, welche, weil sie gewöhnlich nach dem Quadratmeter der s i c h t b a r e n A u s s e n s e i t e bezahlt werden, auf alle mögliche Weise ihre Zeit zu sparen suchen; es kann aber nicht verhehlt werden, dass sie weniger genaue Resultate liefert, als die vorige Methode (§. 634). Denn 1) behalten die S c h m i e g e n oder schiefen Winkel, welche man anwendet, sehr selten die Eröffnung bei, welche man ihnen anfänglich gegeben hat, während das feste Winkelmass zur Herstellung eines geraden, den Gewölbestein in sich fassenden Prisma hinreicht. 2) Da man die verschiedenen zusammenstossenden Seitenflächen (die platte Wölbungsfläche und die beiden Fugen) nach einander und zwar die eine aus der andern mittelst ihrer gegenseitigen Neigungen bestimmt, so hat dieses Verfahren die nämliche Unsicherheit, wie wenn man ein Vieleck A B C D E (Fig. 12) aus den auf einander folgenden Seiten A B, B C, C D, ... und den dazwischen liegenden Winkeln, ohne Anwendung der Diagonalen, construirt; es ist bekannt, dass hiebei die kleinen Fehler sich anhäufen, und selten wird es der Fall sein, dass die letzte Spitze E die verlangte Distanz vom Anfangspunkte A hat. Behaut man also einen Stein nach der Methode des §. 636, so läuft man Gefahr, nicht ganz auf einander passende Fugen zu erhalten, was ein Fehler ist, dem man entweder gar nicht, oder wenigstens nur durch Unterlagen nachhelfen kann; was aber letzteres Mittel bei bedeutenden Bauwerken für grosse Nachtheile bringe, ist in den §§. 603, 605 gezeigt worden.

Ueberdiess heben die der winkelrechten Behauungsmethode vorgeworfenen Mängel sich häufig von selbst auf, weil gewöhnlich der Gewölbestein M′ N′ P′ Q″ R″ der Taf. 36 eine zu beträchtliche Länge hat,

*) Diese platte Wölbung schneidet zwar das Tonnengewölbe in einer Curve und nicht in der Geraden $M_2\ \varphi_2\ N_2$; es ist aber unnöthig, diese Curve zu suchen, da die platte Wölbung doch wieder zerstört werden muss.

als dass er aus einem einzigen Steine gehauen werden könnte; in diesem Falle theilt man ihn durch eine auf P′ Q″ senkrechte Vertikalebene in zwei, so dass man also zwei Gewölbesteine erhält, deren jeder ein Haupt oder eine Stossfuge, identisch mit dem geraden Schnitt M N P Q R, erhält; und geht man alsdann von dieser Seitenfläche aus, um die Methode des §. 634 anzuwenden, so findet weder ein Verlust an Zeit noch an Material statt.

§. 638.

Bemerkung 1. Es ist in §. 592 gesagt worden, dass man so viel als möglich die spitzigen Winkel bei den zusammenstossenden Seitenflächen eines Gewölbesteines vermeiden müsse; auf Taf. 36 nun bildet die horizontale Seitenfläche R Q, welche das Tonnengewölbe in der Erzeugenden R″ Q″ schneidet, mit dem in der Wölbungsfläche dieses Gewölbes liegenden Haupte des Gewölbesteines einen um so spitzigern Winkel, je näher der Gewölbestein dem Schlusse liegt: diess ist besonders merklich, wenn der Halbmesser des Tonnengewölbes nicht viel grösser ist, als der des Thores. In diesem Falle wäre es zweckmässig, den Gewölbestein durch eine normal auf dem Tonnengewölbe stehende und durch die Erzeugende (R Q, R″ Q″) gehende Seitenfläche zu begrenzen; diese Seitenfläche würde die aufgeklappte Ebene V D X in der Normalen X π'' schneiden und, wenn sie eine Breite von 8—10 Centimetern erhielte, durch die Horizontalebene $\pi\, \varrho$ begrenzt werden, welche sofort die obere Seitenfläche des Gewölbesteines würde. Auf der horizontalen Projection würde dadurch eine neue mit R″ Q″ parallele Kante sichtbar werden, und die Fuge M′ M″ R″ erhielte eine vertikale Seitenfläche weiter; da aber diese Abänderungen sehr leicht zu verstehen sind und in der Behauungsweise des Steines keinen bemerkenswerthen Unterschied veranlassen, so werden sie hier nur angedeutet und ihre weitere Ausführung dem Leser überlassen.

Eben so wäre auch der spitzige Winkel B′ D′ D″ zu vermeiden, den die vertikale Seitenfläche D′ D″ des ersten Gewölbesteines mit der Böschungsmauer bildet, indem man diesen Gewölbestein durch eine auf A′ D′ senkrechte Ebene D′ Δ' begrenzte, die man nur zu einer Breite von 8—10 Centimetern verlängerte. Auf ähnliche Art würde man auch, in Beziehung auf die anderen Gewölbesteine, in P′, in C′, ... verfahren, aber nicht in A′, weil dadurch die Thoröffnung und der vordere Gewölbebogen auf eine das Auge beleidigende Art geändert würden. Wenn jedoch die Schräge bedeutend wäre, so müsste man zwei Thorgewölbe anwenden, das eine senkrecht auf A′ B′, das andere auf A″ B″, wie man es in Fig. 10 der Taf. 35 angedeutet sieht. Diese beiden gleichen Tonnengewölbe würden bei ihrem Durchschnitte einen elliptischen Grathbogen bilden, der auf der Geraden a m n b projicirt ist; dieser Fall aber gehört unter die Kreuzgewölbe, von denen später (§. 724) die Rede sein wird.

§. 639.

Bemerkung 2. Es wurde am Ende des §. 620 angenommen, das Tonnengewölbe, zu welchem das Thor führt, sei bloss gemauert; diese Annahme geschah aus folgendem Grunde. Bei einem aus Stein erbauten Tonnengewölbe werden die Theilungslinien der innern Wölbungsfläche (§. 616) von horizontalen Geraden und vertikalen Kreisbögen gebildet, während auf Taf. 36 die Fugen des Thorgewölbes die innere Fläche des Tonnengewölbes in mehr oder minder schiefliegenden elliptischen Bögen N″ P″, M″ R″, ... schneiden, deren Verbindung mit den vorhin genannten Theilungslinien einige Vorsicht erfordert. Ferner verlangt es die Dauerhaftigkeit der Gewölbe, dass ein und derselbe Stein mit seiner einen Aussenseite an der Wölbungsfläche des Thorgewölbes und mit der andern an der Wölbungsfläche des Tonnengewölbes Theil nehme, so dass also für jede Schichte ein zusammengesetzter Gewölbestein nothwendig wird mit doppelten Fugen, welche im

Innern des Körpers sich schneiden. Die Annahme eines aus Stein gebauten Tonnengewölbes führt also auf eine neue Art von Gewölben (*lunettes*), von welchen im §. 738 ausführlich die Rede sein wird.

Schräges Thor in einem runden Thurme, aussen anlaufend und innen mit Kuppelgewölbe.

§. 640.

Dieser runde Thurm ist nichts Anderes, als eine kreisförmige Mauer, welche aussen durch eine kegelförmige Umdrehungsfläche und innen durch einen vertikalen Cylinder begrenzt wird. Letzterer wird von einer Halbkugel überwölbt, wie man auf Taf. 35, Fig. 10 sieht, wo ein durch die Axe $\omega\,\zeta$ gehender, ebener Schnitt des Thurmes dargestellt ist. Die Böschung wird durch den Winkel Y E Z gemessen, den die Erzeugende E Y des Umdrehungskegels mit der Vertikalen bildet. Das Thor, welches in diesem Thurme angebracht werden soll, ist ein kleines, volles Tonnengewölbe, dessen Anlauf sich mit dem des Kugelgewölbes in derselben Ebene befindet.

§. 641.

Taf. 37. Um den Riss auf Taf. 37 auszuführen, nehme man die Vertikalebene senkrecht auf der Axe des Thores an, und zeichne auf ihr den Halbkreis A M B gleich dem senkrechten Durchschnitte dieses Tonnengewölbes; hierauf nehme man, indem man vorerst von den Pfeilern abstrahirt, zur Horizontalebene die Ebene des Anlaufes, auf welcher man die Axe O O′ O″ des Thores und die Projection ω' der vertikalen Thurmaxe bemerkt; diese beiden Axen schneiden sich hier nicht und eben desshalb heisst das Thor ein schräges. Aus dem Punkte ω' beschreibe man mit den durch die Aufgabe bestimmten Halbmessern ω'E′, ω'F′ die beiden Kreise E′A′B′, F′A″B″, welche die Grundschnitte des Kegels und des Cylinders auf der Anlaufebene darstellen (die zweite dieser Kreislinien ist auch der horizontale grösste Kreis der Kugel, die den Cylinder überwölbt); und um den Kegel völlig zu bestimmen, bemerke man noch auf der Vertikalebene den Winkel Z D Y, den jede seiner Erzeugenden mit der Vertikalen bildet; dieser Winkel ist das Mass der Böschung, welche die Aussenwand des Thurmes darbietet.

Nun theile man den Halbkreis A M B in eine ungerade Anzahl gleicher Theile, und bilde die Fugen mittelst der Ebenen N O O′, M O O′, ... welche man durch die Axe des Tonnengewölbes gelegt hat, und welche normal auf der innern Wölbungsfläche stehen: diese Fugen N P, M R, ... begrenze man durch einen mit der innern Gewölbefläche concentrischen Kreis C R D; ausser diesem wird jeder Gewölbestein noch durch eine vertikale Seitenfläche P Q und eine horizontale R Q (§. 620) begrenzt. Derjenige Gewölbestein nun, welcher in M N P Q R projicirt ist, und den wir hier zum Beispiel nehmen, ist ein Theil von einem geraden Prisma, welches jenes Fünfeck zur Basis hat, und zwar derjenige Theil, welcher zwischen der conischen und der Kugelfläche enthalten ist. Es handelt sich also darum, die Durchschnitte dieser beiden krummen Flächen mit den verschiedenen Seiten des Prisma zu bestimmen.

§. 642.

Man denke sich durch die Gewölbekante ($M, M_2\, M'$) eine horizontale Ebene gelegt; diese schneidet den Kegel in einem Kreise von kleinerem Halbmesser als ω' E′, weil letzterer in der Anlaufebene A B liegt; der Unterschied ist aber leicht zu finden. Zeichnet man nämlich den schon bestimmten Böschungswinkel Y D Z so, dass er seine Spitze in irgend einem Punkte der A B erhält, und zieht die Horizontale M G H, so ist der zwischen die Schenkel des Böschungswinkels fallende Abschnitt dieser Horizontalen offenbar der

gesuchte Unterschied. Zieht man diesen von $\omega' E'$ ab, so gibt der Rest $\omega' H'$ den Halbmesser des Kreises, welcher durch seinen Durchschnitt mit der Geraden $M_2 M'$ die Projection M' des Punktes liefert, in welchem diese Kante $M_2 M'$ die Aussenseite des runden Thurmes schneidet. Wiederholt man diese Construction für alle anderen Gewölbekanten, so erhält man die Projection $A' M' N' B'$ des äussern Thorbogens, welcher eine aus dem Durchschnitte eines Cylinders mit einem Kegel hervorgehende windschiefe Curve ist.

Das nämliche Verfahren auch auf die Horizontale (R_1 R_2 R') angewendet, welche die Fuge M R begrenzt, liefert den Punkt R', wo die Horizontale die Böschungsmauer schneidet; und man erhält nun als Durchschnitt der letztern mit der Fugenfläche M R eine Curve $R' M' O'$, welche offenbar durch den Punkt O' gehen muss, in welchem der Grundschnitt des Kegels von dem Grundschnitte der Ebene $R\ O\ O'$ geschnitten wird. Andere dieser Curve angehörige Punkte findet man leicht, indem man das vorige Verfahren z. B. auf die Mitte der Seite M R anwendet. Auf eine ähnliche Art erhält man die Curve $P' N' O'$ als Durchschnitt des Kegels und der Fuge N P. Die horizontale Seitenfläche R Q schneidet den Kegel in einem Kreisbogen $R' Q'$, welcher die Verlängerung desjenigen Bogens ist, den man zur Bestimmung des Punktes R' braucht. Die vertikale Seitenfläche P Q endlich erzeugt einen hyperbolischen, hier in der Geraden $P' Q'$ projicirten Schnitt. Somit ist also das äussere Haupt des betrachteten Gewölbesteines völlig bestimmt, und in $M' N' P' Q' R'$ projicirt.

§. 643.

Um das innere, der Kugelfläche angehörige Haupt des Gewölbesteines zu construiren, schneide man jene Fläche wieder mittelst einer durch die Gewölbekante (M_1 M_2 $M' M''$) gelegte Horizontalebene: der Durchschnitt wird *ein* Kreis sein von einem kleinern Halbmesser als $\omega' F'$. Um den Unterschied zu finden, beschreibe man auf der Vertikalebene den Meridian C X der Kugel und ziehe die Horizontale M I K, so ist das zwischen dem Meridian und seiner vertikalen Tangente C V enthaltene Stück I K der gesuchte Unterschied, den man von $\omega' F'$ abziehen muss, um den Halbmesser $\omega' K'$ des gesuchten kleinern Kreises zu erhalten. Dieser mit $\omega' K'$ beschriebene Kreis schneidet die Gerade $M_2 M' M''$ in dem gesuchten Punkte M'', welcher die Projection desjenigen Punktes ist, in dem die Kugelfläche von der Gewölbekante geschnitten wird. Durch ähnliche Operationen, auf die anderen Gewölbekanten angewendet, findet man die Projection $A'' M'' N'' B''$ derjenigen Curve, in welcher der Cylinder des Thorbogens die Kugel schneidet. *)

§. 644.

Was die Fuge M R betrifft, so durchschneidet die horizontale Kante (R_1 R_2 $R' R''$) die Kugel in einem Punkte, dessen Projection R'' wie oben construirt wird, indem man die Horizontale R V X zieht; der durch diese Fuge erzeugte Schnitt projicirt sich auf den Ellipsenbogen $R'' M'' O''$, dessen Punkte man finden kann, wenn man auf die einzelnen Punkte von M R, z. B. auf die Mitte, das vorige Verfahren anwendet. Die untere

*) Diese Projection $A'' M'' N'' B''$ ist der Bogen einer Parabel, deren Hauptdurchmesser die Gerade $\omega' x$ ist, und deren Scheitel, in Beziehung auf den Mittelpunkt ω', auf derselben Seite liegt, wie die Axe $O\ O''\ \delta$ des Thores. Denn bezieht man den Cylinder und die Kugel auf drei Coordinatenaxen, deren eine $\omega' x$, die andere die Vertikale $\omega' z$ ist, und auf welchen beiden die dritte $\omega' y$ senkrecht steht, und setzt man ferner die Distanz $\omega' \delta = a$, so sind die Gleichungen beider Flächen

$$(x - a)^2 + z^2 = r^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$$

und zieht man sie von einander ab, so erhält man für die Projection des Durchschnittes die Gleichung

$$y^2 = - 2ax + R^2 - r^2 - a^2$$

Man sieht, dass mit dem Verschwinden der Schräge, d. h. wenn $a = o$, die Projection sich auf zwei parallele Gerade reducirte; woraus hervorgeht, dass alsdann der Cylinder die Kugel in zwei kleinen in Vertikalebenen liegenden Kreisen durchschneiden würde.

Fuge N P liefert die Curve P″ N″ O″; die horizontale Seitenfläche R Q den Kreisbogen R″ S″, welcher die Verlängerung desjenigen Bogens ist, den man zur Construction des Punktes R″ brauchte. Die vertikale Seitenfläche P Q endlich würde die Kugel in einem Kreisbogen schneiden, der sich auf der verlängerten P′ P″ projicirte. Da aber diese Ebene die Kugel sehr schief schnitte, so ändert man diesen Theil des Gewölbesteines ein wenig ab, indem man durch den Punkt (P, P″) eine Meridianebene P″ S″ ω′ legt: diese schneidende Ebene reducirt die Projection des Hauptes auf M″ N″ P″ S″ R″, und veranlasst die Entstehung einer neuen vertikalen Seitenfläche P″ S″, deren Aufklappung in Fig. 3 das Dreieck p q s ist, in welchem die Seite p s der Bogen eines mit dem verlängerten Kreise F′ A″ B″ zusammenfallenden grössten Kreises ist, und wo die Gerade p q offenbar der auf der Vertikalebene bestimmten Höhe P Q gleich ist.

§. 645.

Taf. 37. Um nun den Riss auf den Stein zu bringen, muss man die Form der etwas veränderten Seitenfläche P′ Q′ P″ genau kennen. Man zeichne daher ihre rechtwinklige Aufklappung p′ p″ q″ q′ (Fig. 2), welche von einem hyperbolischen Bogen p′ t′ q′ begrenzt wird, den man erhält, wenn man aus den verschiedenen Punkten P′, T′, Q′ der Horizontalprojection Perpendikel errichtet gleich den Ordinaten der Punkte P, T, Q über der Projectionsaxe A B. Man bemerke jedoch, dass, wenn der beliebige Punkt T in der Mitte von P Q genommen wurde, alsdann die Projection T′ nicht auch die Mitte von P′ Q′ sein wird, sondern man muss sie mittelst eines horizontalen, in der Höhe des Punktes T durch den Kegel gemachten Schnittes construiren, wie es in §. 642 bei Construction der Punkte M′ R′ und Q′ geschehen ist.

§. 646.

Man betrachte nun die unterhalb der Anlaufebene A B befindlichen Pfeiler, von denen hier aber nur ein kleiner, der Höhe A α entsprechender Theil beibehalten wurde. Nachdem man diese Höhe in mehrere gleiche Theile getheilt hat, lege man durch die Theilpunkte Horizontalebenen, welche die Lager der verschiedenen Schichten bilden (§. 591) und die Kegelfläche in Kreisen schneiden, deren Halbmesser man finden muss. Um z. B. denjenigen zu finden, der horizontal in $\alpha\,\beta$ projicirt ist, nehme man das Stück $\varepsilon\,\gamma$ dieser Geraden, welches in der Verlängerung des Böschungswinkels Y D Z enthalten ist, und verlängere um dasselbe den Halbmesser ω' E′, alsdann erhält man den Halbmesser ω' E′ ε', mit welchem man den Kreis $\varepsilon'\ \alpha'\ \beta'$ ziehen muss. Ebenso verfährt man auch in Beziehung auf die anderen Kreise, und hierauf theilt man jede dieser Schichten in mehrere gleiche Theile mittelst vertikaler in Meridianebenen liegender Fugen; diese Fugen müssen aber zuerst auf der Horizontalebene gezeichnet, und daraus erst ihre vertikalen Projectionen abgeleitet werden, wie die Figur es zeigt.

Um endlich die genaue Form der Pfeiler-Aussenseite, welche in A′ α' projicirt ist, kennen zu lernen, construire man die Aufklappung oder Brettung $A_1\ \alpha_1\ \beta_1$, indem man durch die Punkte α', α'', α''', ... Senkrechte zieht gleich den Höhen der verschiedenen auf der Vertikalebene gemessenen Schichten; die Curve $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ A_1$, welche man hiedurch erhält, ist ein hyperbolischer Bogen. Auf eben diese Art erhält man die Brettung $B_1\ \mathit{6}_1$ in Beziehung auf die vertikale Seitenfläche B′ $\mathit{6}'$ des andern Pfeilers.

§. 647.

Von den Tangenten.

Die Tangente an irgend einen Punkt M′ der Stirncurve A′ M′ B′ erhält man durch Combination der Berührungsebene des Cylinders A M B mit der des Kegels, dessen horizontaler Grundschnitt E′ A′ B′ ist; von

letzterer Ebene braucht man nur den horizontalen Grundschnitt zu kennen, den man erhält, wenn man die Erzeugende ω' M′ zieht, und sie bis zu ihrem Durchschnitte mit dem Kreise A′ O′ B′ verlängert. Diess Alles ist so leicht auszuführen, dass es an der blossen Andeutung genügt.

Was die Curve A″ M″ B″ betrifft, in welcher der Cylinder die Kugel durchdringt, so könnte man ihre Tangente an einem beliebigen Punkte (M, M″) ebenfalls durch die Combination der Berührungsebenen beider Flächen finden; es ist aber einfacher, die Normalebene anzuwenden (Darst. Geom. §. 214). Denn die Normale des Cylinders projicirt sich auf die Gerade M″ φ, die man senkrecht auf die Axe O O″ gezogen hat, und schneidet die Horizontalebene im Punkte φ: die Normale der Kugel schneidet letztere Ebene im Mittelpunkte ω'; mithin ist ω' φ der Grundschnitt der Ebene dieser beiden Normalen, und folglich ist die aus M″ auf diesen Grundschnitt gefällte Senkrechte die verlangte Tangente.

Wenn es sich um einen der Punkte A″ oder B″ des Anlaufes handelt, so ist die Methode mittelst der Berührungsebenen ungenügend aus dem in §. 627 angeführten Grunde, und auch die Anwendung der Normalebene scheint dem nämlichen Anstande zu unterliegen, weil die Ebene beider Normalen alsdann mit der Anlaufebene zusammenfällt, und mithin der Durchschnitt beider Ebenen unbestimmt bleibt. Trennt man aber das im vorigen Paragraphen für den Punkt M″ allgemein erhaltene Resultat ganz von den auf die drei Dimensionen des Raumes bezüglichen Betrachtungen, welche darauf geführt haben, so bleibt es nichts desto weniger erwiesen, dass die ebene Curve A″ M″ B″ folgende Eigenschaft besitzt: die Tangente in jedem Punkte M″ ist senkrecht auf der Geraden, welche den Punkt ω' mit dem Fusspunkte φ der Senkrechten M″ φ verbindet, die man auf die Linie O O″ gefällt hat. Führt man daher die Construction für B″ ganz so aus, wie die vorige, was immer möglich und sehr einfach ist, so erhält man die Tangente an diesem Punkte der Projection A″ M″ B″.

§. 648.

Entwickelung der Wölbungsflächen. Nach dem, was im §. 629 gesagt worden, zeichnet man eine Gerade a b, auf welcher man die Längen b n, m n, ... gleich den rectificirten Bögen B N, N M, ... nimmt; hierauf trägt man auf die in den Theilpunkten errichteten Perpendikel die Distanzen Taf. 37. Fig. 4.

$$b\,b' = B_2 B',\quad n\,n' = N_2 N',\ \ldots,\quad a\,a' = A_2 A',$$

und wendet ähnliche Constructionen wenigstens noch auf die Mitten der Bögen B N, N M, ... an, so erhält man die Curve a′ m′ n′ b′ als die Verwandelte des in A′ M′ N′ B projicirten Stirnbogens. Auf dieselbe Art erhält man die Verwandelte a″ m″ n″ b″ des Hauptbogens auf der Kugel, indem man die Distanzen

$$b\,b'' = B_2 B'',\quad n\,n'' = N_2 N'',\ \ldots,\quad a\,a'' = A_2 A'',$$

nimmt.

Die Aufklappungen der ebenen Fugen erhält man, indem man die Breiten n p = N P, m r = M R, ... nimmt und die Perpendikel

$$p\,p' = P_2 P',\quad p\,p'' = P_2 P'',\quad r\,r' = R_2 R',\quad r\,r'' = R_2 R'',\ \ldots$$

errichtet, und auf ähnliche Weise in Beziehung auf die Mitten wenigstens der Seiten N P und M R verfährt; denn die Linien n′ p′, n″ p″, m′ r′, ... sind hier Curven, zu deren Zeichnung man sich mehr als 2 Punkte verschaffen muss.

§. 649.

Ausführung des Risses in Stein. Nach Allem dem, was in den §§. 614 und 634 ausführlich angegeben worden, wird hier Folgendes genügen. Man arbeitet zuerst ein gerades Prisma (§. 533) aus, dessen Basis Fig. 5.

$M_1\ n_1\ p_1\ q_1\ r_1$ der Brettung M N P Q R identisch ist, und in dessen Länge die der horizontalen Projection $M' N' P' P'' S''$ des Gewölbesteines enthalten ist. Die zweite Basis dieses Prisma auszuarbeiten, ist unnöthig, da dieselbe durch die späteren Operationen doch wieder zerstört würde. Hierauf lege man auf die durch die Seite $M_1\ r_1$ gehende Seitenfläche die Brettung $m'\ m''\ r''\ r'$ der Fig. 4, um den Umriss $M_1\ M_2\ R_2\ R_1$ der ersten Fuge zu zeichnen. Auf die obere Seitenfläche zeichne man den Umriss $R_1\ Q_1\ P_2\ S_2\ R_2$ identisch mit $R'\ Q'\ P''\ S''\ R''$, und auf die anliegende Seitenfläche den Umriss $Q_1\ P_1\ P_2\ Q_2$ nach der Brettung $q'\ p'\ p''\ q''$ der Fig. 2. Nun kann der Arbeiter eine durch die beiden bekannten Geraden $P_2\ Q_2$ und $Q_2\ S_2$ gehende Ebene ausarbeiten, auf welche sofort der Kreisbogen $S_2\ P_2$ mittelst der Brettung p q s der Fig. 3 gezeichnet werden muss. Ferner zeichne man auf diejenige Seitenfläche des Prisma, welche durch die Seite $n_1\ p_1$ geht, den Umriss $P_1\ N_1\ N_2\ P_2$ nach der Brettung $p'\ n'\ n''\ p''$ der Figur 4. Endlich lege man auf die cylindrische Seitenfläche die Brettung $m'\ m''\ n''\ n'$ (Fig. 4), welche in biegsamem Carton ausgeführt sein muss, damit sie sich der Höhlung dieser Seitenfläche anpassen lässt, und zeichne alsdann die Curven $M_1\ N_1$ und $M_2\ N_2$, welche die eigentliche Wölbungsfläche des Steines begrenzen.

Nun kennt der Arbeiter den ganzen Umriss $M_2\ N_2\ P_2\ S_2\ R_2$ des innern Gewölbesteinhauptes und kann diese sphärische Fläche mittelst einer Lehre (§. 634, Anmerk.), welche nach der Convexität des Kugelmeridians C X geschnitten ist, ausarbeiten, wobei er dieselbe immer in der Richtung einer Meridianebene halten muss. Die Punkte, welche einer solchen Ebene auf der Horizontalprojection $M''\ N''\ P''\ S''\ R''$ entsprechen, erhält man offenbar, wenn man aus dem Mittelpunkte ω' einen beliebigen Halbmesser zieht; diese Punkte müssen sodann auf den Umriss $M_2\ N_2\ P_2\ S_2\ R_2$ übertragen werden, was äusserst leicht ist.

Das äussere Haupt, dessen Umriss $M_1\ N_1\ P_1\ Q_1\ R_1$ ebenfalls ganz bekannt ist, gehört einer conischen Fläche an, welche mittelst des Richtscheites bearbeitet werden kann, wenn man dasselbe in der Richtung der Erzeugenden anlegt. Die einer solchen Linie auf der Horizontalprojection $M'\ N'\ P'\ Q'\ R'$ entsprechenden Punkte aber erhält man, wenn man eine beliebige Gerade aus der in ω' projicirten Kegelspitze zieht; die Uebertragung dieser Punkte auf den Umriss $M_1\ N_1\ P_1\ Q_1\ R_1$ hat keine Schwierigkeit.

§. 650.

Bemerkung 1. Aus den in §. 638 angeführten Gründen könnte man hier eine ähnliche Abänderung treffen, wie dort, und dem Gewölbesteine eine auf der Kugelfläche normale Seitenfläche geben, längs des kleinen Kreises ($R''\ S''$, R Q). Diese Seitenfläche wäre hier eine conische Zone, die von der Verlängerung $X\,\pi'$ des Halbmessers der Meridianlinie C X beschrieben würde, und wenn man sie in einer Entfernung von 6—8 Centimetern durch eine horizontale Ebene begrenzte, so würde man als Durchschnitt einen mit $R''\ S''$ concentrischen Kreis erhalten, dessen Halbmesser leicht zu finden wäre (§. 644). Die Ausführung dieser neuen Seitenfläche hat aber gar keine Schwierigkeit, weil sie eine dem äussern Haupte des Gewölbesteines analoge conische Fläche ist.

Bemerkung 2. Es wurde gleich Anfangs vorausgesetzt, dass das Kuppelgewölbe ein gemauertes sei; wäre es aus Steinen erbaut, so müsste, um der Dauerhaftigkeit willen, ein und derselbe Stein an der Wölbung des Thorbogens und zugleich an der des Kugelgewölbes Theil nehmen; es würde also für jede Schichte ein zusammengesetzter Gewölbestein nöthig werden, mit doppelten Fugen, welche im Innern des Steinkörpers sich schnitten. Somit käme man auf eine zusammengesetztere Art von Gewölbe (*lunette*), von welchem später (§. 749) ausführlich die Rede sein wird.

Schräger Durchgang.

§. 651.

Es handelt sich hier davon, einen durch eine gerade Mauer geführten schrägen Durchgang durch ein Gewölbe zu überdecken. Die Mauer wird von zwei vertikalen und parallelen Ebenen A B, C′ D′ begrenzt, während der Durchgang zwischen zwei vertikalen und unter sich parallelen, aber gegen die ersteren schief gerichteten Ebenen A C′, B D′ enthalten ist. Nachdem man zur Horizontalebene der Figur die Anlaufebene des Gewölbes und zur Vertikalebene eine der Haupt- oder Stirnebenen A B gewählt hat, stelle man die sichtbaren Thorbögen durch zwei mit den Halbmessern A B und C′ D′ beschriebene Halbkreise dar. Taf. 38. Fig. 1.

§. 652.

Die innere cylindrische Wölbungsfläche kann man sich dadurch entstanden denken, dass eine Gerade B D′ sich über jene zwei Halbkreise hinbewegte, während sie ihrer ersten Lage beständig parallel blieb; und hierauf gründet sich auch die erste Art der Auflösung dieser Aufgabe. Die Fugenebenen werden in diesem Falle nicht durch die Erzeugenden des Cylinders gelegt. Denn das Gewicht eines jeden Gewölbesteines lässt sich in zwei Kräfte zerlegen, von denen die eine senkrecht auf die Fuge, die andere parallel mit derselben wirkt; die letztere aber ist hier, wegen der Schräge, nicht parallel mit der Haupt- oder Stirnfläche, und erzeugt also selbst wieder eine auf die Mauer senkrecht wirkende Composante, welche die Gewölbesteine horizontal zu verschieben strebt. Um nun diesem Uebelstande zu begegnen, ziehe man durch den Mittelpunkt O′ des von den Pfeilern gebildeten Parallelogramms eine Linie O O′ senkrecht auf die Stirnebenen, und durch diese Linie lege man sofort alle Fugenebenen. Die auf diese Weise gebildeten Fugen sind zwar nicht normal auf der Wölbungsfläche, aber sie sind es wenigstens auf den Stirnebenen, und dieser Umstand ist für die Anwendung sehr vortheilhaft, weil er, wie man in §. 655 sehen wird, die Behauung der Gewölbesteine mittelst des Winkelmasses gestattet, ohne dass man nöthig hätte, Brettungen für die Wölbungsfläche zu entwickeln *).

Nachdem man also aus O als Mittelpunkt mit einem hinreichend grossen Halbmesser einen Halbkreis gezogen, theile man denselben in eine ungerade Anzahl gleicher Theile, so sind P O O′, R O O′, ... die verschiedenen Fugenebenen, welche man sofort bis zu ihrem Durchschnitte mit den horizontalen Schichten der Mauer verlängert, und somit wird also jeder Gewölbestein ein Vieleck, wie M N P Q R, zu seiner Vertikalprojection haben.

§. 653.

Um die Wölbungskanten, oder die Durchschnitte der Fugen mit der innern Wölbungsfläche zu erhalten, welche vertikal bereits auf den Linien N F, M E, ... projicirt sind, lege man verschiedene schneidende Ebenen X′ Y′, U′ V′ parallel mit den Haupt- oder Stirnflächen der Mauer. Diese Ebenen schneiden den Cylinder in Kreisen von den Durchmessern X Y, U V, welche die Projection N F in den Punkten H, K schneiden; projicirt

*) Wenn die Bedeutung des Gewölbes es verlangte, dass man, mit Aufopferung des oben bezeichneten praktischen Vortheils, die Fugen normal auf die Wölbungsfläche machte, so müsste man zuerst den geraden Durchschnitt des schiefen Cylinders, der die innere Wölbungsfläche bildet, construiren (was hier sehr leicht ist); alsdann müsste man an diesen elliptischen Schnitt eine Normale ziehen und durch diese Normale und die entsprechende Erzeugende eine Ebene legen: diese wäre alsdann eine Fugenebene, welche in der ganzen Länge der Erzeugenden normal auf dem Cylinder stände. Aber der Uebelstand wegen des schiefen Druckes auf die Stirnmauer bleibt.

man daher diese letzteren auf X′ Y′ und U′ V′, so erhält man eben so viele Punkte H′, K′ der Ellipse F′ H′ K′ N′, welche die Horizontalprojection der ersten Wölbungskante darstellt. Die folgende E′ G′ L′ M′ erhält man auf dieselbe Weise, und eben so auch die übrigen.

§. 654.

Die schneidenden Ebenen X′ Y′, U′ V′ dienen auch dazu, eine und dieselbe Schichte in mehrere partielle Gewölbesteine zu theilen, im Falle die Dicke der Mauer zu gross ist, als dass die Länge einer solchen Schichte durch einen einzigen Stein hergestellt werden könnte. Man muss aber diese vertikalen Fugen mit einander abwechseln lassen, d. h. mit der schneidenden Ebene U′ V′ muss man die erste, dritte, fünfte, und mit der Ebene X′ Y′ die zweite, vierte, ... Schichte theilen, wie es auf der Figur durch den Wechsel der Punktirung angedeutet ist.

§. 655.

Um den Gewölbestein M N P Q R zu behauen, muss man die beiden Fugenflächen N P und M R nach ihrer wahren Grösse kennen. Man klappe daher die Ebene P O O′ um ihren horizontalen Grundschnitt O O′, alsdann werden die Punkte F, H, K, N in F″, H″, K″, N″ zu liegen kommen, so dass man P″ F″ H″ K″ N″ P′ als Fugenbrettung erhält. Auf dieselbe Art erhält man R″ E″ G″ M″ R′ als Brettung der obern Fuge M R.

Nun wähle man einen Steinblock aus, der ein gerades Prisma von der Grundfläche M N P Q R und von der Länge P″ P′ fasst, und bearbeite eine ebene Fläche, auf welche man den Umriss M N P Q R zeichnet (§. 614). Hierauf arbeite man eine Ebene aus, welche durch die Seite N P geht und winkelrecht auf dem Haupte des Gewölbesteines steht, und zeichne auf dieselbe den Umriss der untern Fuge mittelst der Brettung P″ F″ H″ K″ N″ P′. Eben so bearbeite man eine durch M R gehende und auf dem Haupte des Gewölbes senkrechte Ebene, auf welche man die Brettung P″ E″ G″ M″ P′ der obern Fuge anlegt. Nun kennt man auf dem Steine zwei Seiten F P, E R, welche dem zweiten Haupte des Gewölbesteines angehören, so dass man die Ebene desselben auch ausarbeiten kann, und diess um so leichter, da sie ebenfalls winkelrecht auf den beiden bereits ausgeführten Fugen stehen muss; ist sie fertig, so zeichnet man den Umriss R E F P Q auf dieselbe. Was die cylindrische Wölbungsfläche betrifft, deren Umriss M N F E aus dem Vorhergehenden bekannt ist, so führt man sie mittelst des Richtscheites aus, das man an die zuvor bemerklich gemachten Punkte einer und derselben Erzeugenden anlegt; diese Punkte erhält man auf der Figur durch Parallelen mit A B, und es ist sehr leicht, sie auf den Stein zu übertragen. Man bemerke, dass es unnöthig ist, die ebenen Seitenflächen R Q und P Q zu bearbeiten; diese können ganz roh bleiben oder werden nur aus dem Groben gearbeitet, wenigstens wenn die Mauer nicht massiv ist.

§. 656.

Andere Auflösung, mit windschiefer Wölbungsfläche (*Corne-de-vache*).

Taf. 38. Fig. 2. Mit Beibehaltung aller in §. 651 gegebenen Stücke werde hier angenommen, die innere Wölbung sei eine windschiefe, auf folgende Art erzeugte Fläche. Durch den Mittelpunkt O′ des von den Pfeilern gebildeten Parallelogramms A B D′ C′ ziehe man eine Gerade O′ O senkrecht auf die Hauptebenen; hierauf denke man sich eine bewegliche Gerade, welche, während sie über die beiden Kreise A Z B, (C Z D, C′ D′) hingleitet, beständig auch die Axe O′ O bestreift. Es ist leicht, die verschiedenen Lagen dieser Erzeugenden zu construiren; denn legt man durch O O′ irgend eine Ebene F O O′, so schneidet diese die beiden Leitkreise in den Punkten (F, F′), (N N′); und verbindet man diese Punkte durch eine Gerade (F N, F′ N′), so erfüllt diese

offenbar alle für die Erzeugung der Fläche geforderten Bedingungen. Auf ähnliche Art liefert die Ebene R O O′ die Erzeugende (E M, E′ M′); und handelt es sich um die Vertikalebene O O′, welche offenbar durch den Punkt Z geht, in welchem die vertikalen Projectionen beider Kreise sich schneiden, so geht alsdann die bewegliche Gerade durch zwei Punkte dieser Kreise, welche in derselben Höhe sich befinden, d. h. sie ist horizontal und parallel mit der Axe O O′, welche sie in unendlicher Entfernung trifft.

Jenseits dieser Lage neigt sich die Erzeugende (m e, m′ e′) in entgegengesetzter Richtung, und schneidet die Axe O O′ hinter der Vertikalebene. Die so erzeugte Fläche ist windschief *(gauche)*; denn offenbar liegen die beiden Tangenten an den Punkten N und F der Leitkreise nicht in einerlei Ebene, woraus nach §. 504 der Darst. Geom. folgt, dass zwei unendlich nahe Lagen der Erzeugenden auch nicht in einerlei Ebene liegen.

§. 657.

Aus den in §. 652 angeführten Gründen müssen alle Fugenebenen durch die Axe O O′ gelegt werden, und zwar durch die Theilpunkte, welche, in ungerader Zahl, auf der Kreislinie P″ P R bemerkt sind, die aus dem Mittelpunkte O mit einem hinreichend grossen Halbmesser beschrieben wurde. Hieraus folgt, dass die Wölbungskanten, d. h. die Durchschnitte jener Fugen mit der innern Wölbungsfläche genau die Geraden (F N, F′ N′), (E M, E′ M′), ... sind, was sich bequemer in Stein ausführen lässt, als die sehr ausgestreckten Ellipsenbögen der vorigen Figur; die Vertikalprojection jedes Gewölbesteines ist ein Vieleck, wie M N P Q R.

§. 658.

Die Fugenbrettungen sind leicht zu erhalten; denn klappt man die Ebene P O O′ um ihren horizontalen Grundschnitt O O′ auf, so kommt der Punkt (F, F′) in F″, der Punkt (N, N′) in N″ zu liegen, und man erhält das Trapez P″ F″ N″ P′, als die wahre Gestalt der Fuge N P; eben so ist das Trapez P″ E″ M″ P′ die Aufklappung der Fuge M R; diese Stücke aber genügen zur Behauung des Gewölbesteines, ohne dass man der Wölbungsbrettungen nöthig hätte, welche hier nicht entwickelbar sind.

Man wähle also einen Steinblock aus, gross genug, um das gerade Prisma, das M N P Q R zur Basis und P″ P′ zur Länge hat, zu fassen, und bearbeite auf demselben eine ebene Fläche, auf welche man sodann den Umriss M N P Q R zeichnet (§. 614); hierauf bearbeite man ferner eine durch N P gehende Ebene, welche winkelrecht auf dem Haupte des Gewölbesteines steht, und zeichne auf dieselbe den Umriss der untern Fuge mittelst der Brettung P″ F″ N″ P′. Eben so arbeite man eine durch M R gehende Ebene aus, welche auch winkelrecht auf dem Haupte des Gewölbesteines stehe, und lege auf sie die Brettung P″ E″ M″ P′ der obern Fuge. Nun kennt man auf dem Steine zwei Seiten F P und E R, welche dem zweiten Gewölbesteinhaupte angehören, dessen Ebene nun also auch ausgeführt werden kann, und zwar um so leichter, da sie auf den beiden fertigen Fugen winkelrecht stehen soll; auf sie zeichnet man den Umriss R E F P Q. Die Wölbungsfläche, deren Umriss M N F E man aus dem Vorhergehenden vollständig kennt, ist zwar eine windschiefe Fläche; aber da sie eine Gerade zur Erzeugenden hat, so kann der Arbeiter sie fast eben so leicht ausführen, als wie eine Ebene, indem er sich einfach eines Richtscheites bedient, das er aber freilich nicht auf zwei beliebige Punkte des Umrisses M N F E, sondern stets auf zwei solche Punkte auflegen muss, welche einer und derselben Lage der Erzeugenden entsprechen. Auf der Figur nun erhält man diese Punkte offenbar dadurch, dass man Gerade zieht, welche im Punkte O zusammenlaufen; man darf daher nur die Punkte α und β, α_1 und β_1, α_2 und β_2, ... auf den Stein übertragen, was keine Schwierigkeit hat. Die ebenen Flächen R Q und P Q können roh gelassen werden, oder man bearbeitet sie nur aus dem Groben;

wenigstens wenn die Mauer nicht massiv ist; man kann ihnen auch jede andere Form geben, wie sie zur Verbindung mit dem anliegenden Mauerwerke am zweckmässigsten erachtet wird.

§. 659.

Wenn die Dicke der Mauer so bedeutend ist, dass die Länge einer und derselben Schichte in mehrere Gewölbesteine getheilt werden muss, so wendet man verschiedene mit den Hauptflächen parallele, schneidende Ebenen an, wie X′ Y′, U′ V′; die erste schneidet die Horizontalprojectionen der Erzeugenden der windschiefen Fläche in den Punkten H′, G′, g′, ..., welche, auf die vertikalen Projectionen derselben Erzeugenden bezogen, eben so viele Punkte des mit der innern Wölbungsfläche erzeugten Schnittes X g Z G H Y liefern. Auf dieselbe Art erhält man als Durchschnitt dieser Fläche mit der Ebene U′ V′ die Curve U Z K V. Um aber alle diese partiellen Gewölbesteine besser unter sich zu verbinden, muss man die vertikalen, durch die schneidenden Ebenen U′ V′, X′ Y′ erzeugten Fugen abwechselnd anordnen, d. h. man muss die erste jener Ebenen nur für die erste, dritte, fünfte, ... und die zweite für die zweite, vierte, ... Schichte anwenden, wie es in der Figur durch den Wechsel der Punktirung angedeutet ist.

§. 660.

Die Construction der Tangenten an solche Schnitte, wie X Z H Y, ist interessant; man muss zu diesem Zwecke die Ebene der Durchschnittscurve mit der Berührungsebene an der windschiefen Fläche verbinden; da aber diese Aufgabe in §. 596 der Darstellenden Geometrie ausführlich behandelt worden ist, so kann dem Leser die Anwendung auf vorliegende Figur nicht schwer fallen, und er wird finden, dass die Gerade (G H, G′ H′) der Fig. 122 (Darst. Geom.) selbst die Tangente an dem Punkte (G, G′) des durch die Vertikalebene G H erzeugten Schnittes ist.

Taf. 38. Fig. 2. Man bemerke, dass die vertikalen Projectionen U Z V, X Z Y, ... aller mit den Haupt- oder Stirnebenen parallelen Schnitte beständig durch den Punkt Z gehen, wo sich bereits die beiden sichtbaren Bögen des Gewölbes schneiden, weil (§. 656) es eine Erzeugende der windschiefen Fläche gibt, die parallel mit O O′ ist und sich daher vertikal in dem einzigen Punkte Z projicirt. Von der Figur aber, welche alle diese Schnitte mit einander darstellen, hat das Gewölbe den Namen Kuhhorn *(corne-de-vache)* erhalten.

§. 661.

Taf. 38. Fig. 3. Diese Benennung wird auch auf den Fall angewendet, wenn die windschiefe Fläche zu Leitlinien zwei ungleiche Kreise, oder auch irgend zwei ungleiche, in parallelen Ebenen liegende Curven hat, deren culminirende Punkte jedoch in einer und derselben auf der Hauptebene senkrecht stehenden Linie liegen. So ist es z. B. in Fig. 3, wo es sich um ein Tonnengewölbe handelt, dessen Pfeiler, nachdem sie anfangs parallel gewesen, später in den Richtungen A′ C′, B′ D′ divergiren; man hat desshalb ein zweites Gewölbe gebildet in Form eines Kuhhornes, dessen Erzeugende eine Gerade ist, welche beständig 1) über den Bogen (A Z B, A′ Z′ B′) des Tonnengewölbes, 2) über den Kreisbogen (C Z D, C′ Z″ D′) hingleiten und 3) stets normal auf der ersten Leitlinie (A Z B, A′ Z′ B′) bleiben soll. Diese letztere Bedingung heisst hier, wo die Curve A Z B ein Kreis ist, so viel: die Erzeugende soll sich beständig an die Axe O O′ Z′ des Tonnengewölbes anlehnen; der vorher gebrauchte Ausdruck ist aber allgemeiner, und anwendbar auf den Fall, wo jene Leitlinie eine Ellipse oder eine Korblinie (§. 608) ist. Die Construction der Erzeugenden dieser windschiefen Fläche lässt sich übrigens wie in §. 656 ausführen, mittelst schneidender Ebenen, welche man durch die Gerade O O′ Z′ legt; diese dienen auch zur Bildung der Fugen sowohl für das Kuhhorn, als auch für das

vorhergehende Tonnengewölbe; und da Alles, was in den §§. 658 und 659 gesagt worden ist, sich buchstäblich auf den vorliegenden Fall anwenden lässt, so braucht die Fig. 3 keiner weitern Erklärung. Nur möge der Leser bemerken, dass die horizontale Projection als von unten gesehen angenommen wird, und diese Annahme wurde hier desshalb gemacht, um die gebrochene Richtung der Wölbungskanten M″ M′ E′, N″ N′ F′, ... deutlicher darstellen zu können.

Man wendet öfters ein solches Gewölbe an, um zwei schon vorhandene Gewölbe von verschiedenem Vorsprunge mit einander zu verbinden. Die in Fig. 3 gegebene Disposition würde vollkommen als Eingang in einen Tunnel passen, oder sie könnte an den Bögen einer Brücke angewendet werden, damit das Wasser, wenn es hoch geht, nicht auf ein seiner Richtung senkrecht entgegenstehendes Hinderniss stosse, wodurch heftige Wirbel und Aufwühlungen unter den Pfeilern entstehen könnten. So sind an der Brücke von Neuilly, welche im Jahre 1774 von dem berühmten Perronet erbaut wurde, die 39 Meter weiten und gedrückten Bögen mit den Pfeilervorsprüngen durch Kuhhörner in der Art der Fig. 3 verbunden; nur ist dort die Curve A Z B der Korbbogen *(anse de panier)*, welcher die Stirne des Gewölbes bildet, und die Curve C Z D ist die Verlängerung des Bogens von dem Scheitel des Gewölbes an; die geradlinige Erzeugende muss beständig normal auf der Curve A Z B sein.

Der Marseiller Kernbogen. *(Arrière-voussure de Marseille.)*

§. 662.

In einer von zwei vertikalen und parallelen Ebenen A′ B′ und E′ F′ begrenzten Mauer soll eine Thüre angebracht werden, deren erste Abtheilung gewölbt sei nach Art eines Tonnengewölbes, und zum geraden Durchschnitt den auf der Ebene A′ B′ verzeichneten Halbkreis A M B habe. Diese Abtheilung ist horizontal auf das Rechteck A′ A″ B″ B′ projicirt; die vertikalen Seitenflächen A′ A″, B′ B″ bilden das sogenannte Geläufe. Bei A″ und B″ treten die Pfeiler ihrer ganzen Höhe nach etwas zurück und bilden eine rechtwinklige Vertiefung A″ C″ C′, Falz oder Spunten genannt, welche zur Aufnahme der Thürflügel dient. Dieser Falz ist von einem kleinen Cylinder überwölbt, welcher zum geraden Durchschnitt den Halbkreis C Y D hat, und horizontal auf das Rechteck C′ C″ D″ D′ projicirt ist. Weiter nach vorne divergiren die Pfeiler, und werden von zwei vertikalen Ebenen C′ E′, D′ F′ begrenzt, welche die Leibung bilden; ihre Breite D′ F′ sollte mindestens der Breite D′ Y′ eines Thürflügels gleich sein. Letzterer hat hier die Form eines Rechtecks, das oben von einem Viertelskreise begrenzt ist, welcher an Grösse nahezu dem Viertelskreise D Y gleichkommt; damit er sich also frei drehen könne, muss der Theil der innern Wölbung, welcher den zwischen den Leibungswänden enthaltenen Zwischenraum überdeckt, erhöht werden, und dieser letztere Theil des Gewölbes ist es, der insbesondere den Namen Kernbogen *(Arrière-voussure)* führt. *) Taf. 39.

§. 663.

Um nun die Wölbung zu bilden, nehme man ihre Höhe Y Z etwa gleich einem Drittheile oder gleich der Hälfte der Tiefe Y′ Z′, und beschreibe auf der Stirnebene E′ F′ einen Kreisbogen E Z F mit einem

*) Zur Rechtfertigung der bei dieser Figur angewendeten Punktirungsweise bemerke der Leser zum Voraus, dass angenommen wird, die horizontale Projection werde von unten gesehen. Diese Annahme wird hie und da gemacht, wenn man gewisse einzelne Theile, deren genauere Betrachtung von Wichtigkeit ist, herausheben will.

beliebigen Halbmesser (Z ω, Z′), der aber jedenfalls so gross sein muss, dass die Punkte E und F, in welchen dieser Bogen die vertikalen Kanten der Leibung trifft, höher zu liegen kommen, als der Scheitel Y des Falzes. Nun denke man sich eine windschiefe Fläche, erzeugt durch eine bewegliche Gerade, welche beständig 1) die horizontale Axe (O, O′ Y′ Z′) der Thüre, 2) den Kreis (C Y D, C′ D′) des Falzes, 3) den Stirnbogen (E Z F, E′ Z′ F′) bestreift. Es ist leicht, die Erzeugenden dieser Fläche zu construiren, indem man beliebige Ebenen durch die Axe der Thüre legt; denn diejenige z. B., welche durch den Punkt (F, F′) geht, hat zum vertikalen Grundschnitte den Halbmesser O F, und da sie den Kreis des Falzes in (G, G′) schneidet, so leistet also die Gerade (F G O, F′ G′ O′) den vorhin gestellten drei Bedingungen Genüge und ist mithin eine Erzeugende. Auf eben diese Art liefert die Ebene O m r die Erzeugende (m r, m′r′), u. s. f. Da aber die Leitlinie E Z F in den Punkten E und F endigt, so wird das auf die angegebene Weise erzeugte Flächenstück von den Erzeugenden (F G, F′ G′) und (E K, E′ K′) begrenzt, und überdeckt also nicht den ganzen Raum, der auf das Trapez E′ C′ D′ F′ projicirt ist. Man könnte sich zwar den Stirnbogen E Z F verlängert denken; aber die auf diese Art fortgesetzte windschiefe Fläche würde alsdann die Leibungsfläche D′ F′ in einer Curve schneiden, welche, im Allgemeinen, dem Thürflügel nicht gestatten würde, sich frei anzulegen. Man ergänzt daher die Wölbung dadurch, dass man der Leitlinie E Z F einen neuen Ast F D anfügt, den man auf die Seitenfläche der Leibung zeichnet, und so wählt, dass er die eben erwähnte Forderung erfüllt; übrigens werden stets die beiden ersten, oben angegebenen, Leitlinien beibehalten.

Man klappe nun die Seitenfläche D′ F′ der Leibung auf die Vertikalebene auf: alsdann wird der Punkt (F, F′) in F″ zu liegen kommen, und der Umriss des Thürflügels wird durch den Viertelskreis D I Y″ dargestellt werden, der dem D Y gleich ist. Nun muss der in seiner wahren Grösse gesuchte Leibungsbogen offenbar durch die Punkte D und F″ gehen und muss den Viertelskreis D I Y″, den er in D berührt, umfassen: Bedingungen, welche leicht erfüllt werden könnten durch einen Kreisbogen, der die Vertikale in D H berührte und zugleich durch den Punkt F″ ginge.

§. 664.

Aber es ist wünschenswerth, dass diese zweite windschiefe Fläche sich völlig an die erstere anschliesse, und zwar nach der ganzen Länge der ihnen gemeinschaftlichen Erzeugenden (F G O, F′ G′ O′), damit die innere Wölbungsfläche an dieser Stelle nicht eine das Auge beleidigende Unterbrechung leide. Es müssen desshalb (nach Darst. Geom. §. 563) die beiden Flächen sich in drei Punkten der Geraden (F G O, F′ G′ O′) berühren, eine Bedingung, welche in den Punkten (O, O′) und (G, G′) bereits erfüllt ist, weil hier die Leitlinien für beide Flächen dieselben sind; es bleibt also nur noch übrig, auch für den Punkt (F, F′) eine Berührung herzustellen. Zu diesem Zwecke bemerke man, dass die Berührungsebene der ersten windschiefen Fläche durch die Erzeugende (F G O, F′ G′ O′) und durch die Tangente F T geht und mithin als Grundschnitt auf der vertikalen Ebene C′ D′ des Falzes die Gerade G H hat, welche man parallel mit F T durch den Punkt G gezogen. Die Berührungsebene der zweiten windschiefen Fläche muss auch durch die Erzeugende (F G O, F′ G′ O′) und durch die Tangente an der gesuchten Curve F D gehen; damit aber diese beiden Berührungsebenen zusammenfallen, ist es nöthig, aber auch hinreichend, dass letztere Tangente in der erstern Berührungsebene liege, und dass mithin ihr Grundschnitt oder Durchgangspunkt in G H falle; eben dieser Punkt muss sich aber auch in der Vertikalen (D′, D H) befinden, weil die gesuchte Curve in der Vertikalebene D′ F′ liegen soll; die fragliche Tangente muss also durch die Punkte (F, F′) und (H, D′) gehen, und stellt sich daher in der Aufklappung als F″ H dar.

§. 665.

Die Aufgabe läuft also jetzt darauf hinaus, eine Curve zu zeichnen, welche F″H in F″ und die Vertikale DH in D berühre, ohne dass sie den Kreis DIY″ schneide; und die einfachste Lösung erhält man durch Anwendung einer Curve mit zwei Mittelpunkten, die aus einem gewissen Theile des Bogens DY″ und aus einem zweiten Kreisbogen IF″ besteht, der sich an den ersten anschliesst. Man darf zu diesem Ende nur die Gerade F″φ senkrecht auf F″H ziehen und sie gleich O″D machen; hierauf in der Mitte von O″φ eine Senkrechte errichten, so wird diese die F″φ in dem Mittelpunkte des neuen Kreisbogens IF″ schneiden. Da nun auch der Anschliessungspunkt I beider Curven bekannt ist, so erhält man DIF″ als die gesuchte Leibungscurve *). Damit jedoch die Auflösung in stereotomischer Hinsicht zulässig sei, muss vorausgesetzt werden, dass die Gerade F″H den Kreis DIY″ nicht schneide; wäre es anders, so müsste man die gegebenen Stücke abändern, indem man den Scheitel Z des Stirnbogens höher liegend annähme oder auch den Halbmesser Zω dieses Bogens vergrösserte, wodurch die Punkte H und F″ tiefer zu liegen kämen.

§. 666.

Nachdem man die Aufklappung DIF″ des Leibungsbogens gezeichnet hat, ist es leicht, daraus die Projection DF des nämlichen, aber in die Vertikalebene D′F′ zurückgeführten Bogens abzuleiten; denn irgend ein Punkt p″ desselben beschreibt einen horizontalen Kreisbogen, der sich in p′ endigt, und projicirt man letztern Punkt in p auf die durch p″ gezogene Horizontale, so erhält man einen Punkt der gesuchten Projection DpF. Trägt man dieses Resultat symmetrisch auf die linke Seite, so erhält man die Curve CE, und die ganze Wölbungsfläche über der Leibung wird nun beschrieben durch eine Gerade, welche beständig über die gebrochene Curve CEZFD, über den Kreis (CYD, C′D′) des Falzes und über die Axe (O, O′Y′) der Thüre fortgleitet.

§. 667.

Ehe man nun weiter geht, muss man sich versichern, ob die Thürflügel sich auch frei unter diesem Gewölbe drehen können. Man suche daher die Durchschnitte, welche eine und dieselbe Horizontalebene l$\delta\omega$ mit dieser windschiefen Fläche und mit derjenigen Umdrehungsfläche machte, welche durch eine Umdrehung des Kreises CY um die Vertikale (Cε, C′) erzeugt würde. Nachdem man, wie in §. 663, verschiedene Erzeugende (ls, l′s), (KE, K′E′), (uv, u′v′),... der windschiefen Fläche construirt hat (wobei es gut ist, sie so zu wählen, dass man sich derselben später auch zur Theilung des Gewölbes in gleiche Gewölbesteine bedienen kann), bemerke man die Punkte, wo sie von der Horizontalebene lδ geschnitten werden, alsdann ist die Curve l′δ′w′ die horizontale Projection des ersten Schnittes: der zweite projicirt sich offenbar in dem Kreis l′ε′, den man mit dem Halbmesser C′l′ = lε beschrieben hat. Wenn nun diese beiden keinen Punkt gemein haben, der rechts von der vertikalen Seitenfläche C′E′ liegt, so ist diess ein Beweis, dass der Thürflügel bei seiner Umdrehung nicht mit dem Gewölbe zusammenstösst, wenigstens nicht in der Höhe der

*) Man könnte sich auch damit begnügen, einen Kreisbogen zu beschreiben, welcher die Vertikale DH in D und die Gerade HF″ in einem Punkte q berührte, der nothwendig in der Distanz Hq = HD läge; dieser Bogen Dq mit dem geradlinigen Stücke qF″ vereinigt, würde alsdann einen Leibungsbogen bilden, der allen im Texte aufgestellten Anforderungen entspräche. Zwar käme hiebei der Uebelstand vor, dass der Leibungsbogen im Punkte q einen etwas merklichen Krümmungswechsel erlitte; dafür aber dürfte man auch den Kreisbogen IF″ nicht ziehen, der gewöhnlich einen sehr grossen Halbmesser hat, und der Thürflügel erhielte mehr freien Spielraum unter dem Gewölbe.

Horizontalebene $1\vartheta w$; man muss nun aber dieselbe Probe auch mit anderen horizontalen Schnitten vornehmen. Sollte es vorkommen, dass einer dieser Schnitte den andern dazu gehörigen rechts von $C'E'$ träfe, so müsste man in den gegebenen Stücken eine Abänderung treffen, und den Kernbogen durch Vergrösserung des Halbmessers $Z\omega$ oder der Steigung YZ mehr erhöhen (s. §. 672).

§. 668.

Taf. 39. Um nun das Gewölbe in seine Gewölbesteine zu theilen, lege man durch die Thüraxe $(O, O'Y')$ und durch die Punkte B, N, M, L, ..., die man auf dem Grundbogen des Tonnengewölbes in gleichen Entfernungen genommen hat, Fugenebenen, und begrenze die in NP, MR, ... projicirten Seitenflächen der Fugen durch die Horizontallinien, welche die Steinschichten der Mauer von einander absondern. In der vorliegenden Figur wurden nur fünf Gewölbesteine angenommen; in der Anwendung aber muss man ihre Anzahl so wählen, dass jeder Mauerschichte eine Fuge entspreche, nach der in den Fig. 4 und 6 der 34. Tafel gezeigten Anordnung.

Soll eine und dieselbe Gewölbesteinschichte, wie z. B. die in MNPQR projicirte, in mehrere Theile getheilt werden, so geschieht diess durch schneidende Vertikalebenen, wie $C'D'$ und $\alpha'\beta'\gamma'X'$. Letztere schneidet die innere Wölbungsfläche in der Curve $\alpha\beta\gamma X$..., deren einzelne Punkte man erhält aus den Punkten α', β', γ'.., in welchen die Horizontalprojectionen der Erzeugenden jener windschiefen Fläche von dem Grundschnitte der schneidenden Ebene geschnitten werden. Was den Punkt X betrifft, so muss man, um ihn zu erhalten, den Abschnitt YZ in dem Verhältnisse der beiden Theile $X'Y'$ und $X'Z'$ der Horizontalprojection theilen. Man muss aber dafür sorgen, dass die durch die beiden Vertikalebenen $\alpha'X'$ und $C'D'$ erhaltenen Fugen mit einander abwechseln, wie in §. 659 erklärt worden ist. Um jedoch Wiederholungen zu vermeiden, wird hier angenommen, dass die vertikal in MNPQR projicirte Gewölbesteinschichte aus einem, zwischen den Vertikalebenen $A'B'$, $E'F'$ enthaltenen Stück bestehe, dessen Behauung nun gezeigt werden soll. Zu letzterm Zwecke aber genügen die Brettungen der Fugenseitenflächen, weil diese senkrecht auf den beiden Häuptern des Gewölbesteines stehen.

§. 669.

Man klappe zuerst die obere Fuge MR um die Thüraxe $(O, O'Y')$ in die Horizontalebene um: hiebei fallen diejenigen Seiten dieser Fuge, welche dem Geläufe und dem Falze entsprechen, und welche in $M'M''m''m'$ projicirt sind, offenbar mit $B'B''D''D'$ zusammen. Die windschiefe Wölbung wird von der Fugenebene in einer Linie $(m\,r, m'r')$ geschnitten, welche eine Gerade sein muss, wie aus der Erzeugungsart dieser Fläche hervorgeht (§. 663). Bei der Umklappung nun wird der Punkt (r, r') stets in der Vertikalebene $E'F'$ bleiben, und zwar in constanter Entfernung von der Horizontalen M, die in $B'B''b''$ aufgeklappt ist. Man nehme daher $b''r_2 = M\,r$ und ziehe die Gerade $D''r_2$. Endlich mache man $r_2R_2 = r\,R$ und ziehe R_2R_1 senkrecht auf die Ebene des Hauptes, so ist $B'B''D''D'r_2R_2R_1$ der Umriss für die Brettung der obern Fuge MR.

§. 670.

Was die untere Fuge NP betrifft, so fällt der erste Theil ihres Umrisses offenbar mit $B'B''D''D'$ zusammen. Nun schneidet die Fugenebene die windschiefe Fläche und die vertikale Leibungsseite nach einander in den beiden Geraden $(n\,p, n'p')$, $(p\,f, p'F')$; es ist aber sehr wesentlich, den Punkt p genau zu finden, und zwar durch eine directe Construction und nicht bloss durch den Durchschnitt der NP mit der Projection DF, welche nur annähernd richtig gezeichnet, und vom Werkmeister gewöhnlich gar nicht auf dem Risse

bemerkt wird. Nun schneidet die Fugenebene N P die beiden vertikalen Seiten D′ D und F′ F der Leibung in den Punkten d und f; klappt man daher letztern Punkt in f″ auf, so erhält man d f″ als den Durchschnitt der Fuge N P mit der Leibungsfläche; diese Gerade aber schneidet den aufgeklappten Leibungsbogen D I F″ in dem Punkte p″, aus welchem sofort der gesuchte Punkt p bestimmt wird. Projicirt man ferner p″ auf die Horizontalebene und bezieht diese Projection mittelst eines in p′ sich endigenden Kreisbogens auf D′ F′, so ist die Gerade b′ p′ der Grundschnitt einer Stirnebene, in welcher der Punkt (p, p′) bei seiner Aufklappung in die Horizontalebene stets bleiben wird; nimmt man daher die Distanzen $b' p_2 = N p$, $b'' f_2 = N f$, so erhält man $D' p_2$ und $p_2 f_2$ als die beiden gesuchten Geraden. Endlich trage man die ganze Breite N P der Fuge von b″ nach P_2, so erhält man $B' B'' D'' D' p_2 f_2 P_2 P_1$ als Brettung für dieselbe.

§. 671.

Behauung der Gewölbesteine. Man wähle einen Steinblock, welcher den fraglichen Gewölbestein in sich fassen kann (d. h. einen Block, der einem Prisma gleich ist, das M N P Q R zur Basis und die Entfernung der beiden Hauptebenen A′ B′ und E′ F′ zur Länge hat), und arbeite auf demselben eine Ebene aus, auf welche man mittelst der Brettung M N P Q R des Hauptes den Umriss $M_1 N_1 P_1 Q_1 R_1$ zeichnet; hiebei muss man die Brettung so anlegen, dass die Seite $M_1 R_1$ der Fuge so viel wie möglich dem Steinbruchlager des Steines entspreche (§. 587). Durch die Seite $M_1 R_1$ lege man eine Ebene, welche winkelrecht auf dem Haupte stehe, und zeichne auf dieselbe den Umriss $M_1 M_2 m_2 m_1 r_2 R_2$ mittelst der Brettung $B' B'' D'' D' r_2 R_2 R_1$, welche man für die obere Fuge gefunden hat. Eben so bearbeite man die Ebene und den Umriss $P_1 N_1 N_2 n_2 n_1 p_2 f_2 P_2$ der untern Fuge mittelst der Brettung $B' B'' D'' D' p_2 f_2 P_2 P_1$. Die beiden ebenen Seitenflächen $Q_1 R_1 R_2 Q_2$ und $Q_1 P_1 P_2 Q_2$ sind nun sehr leicht auszuarbeiten, weil sie Rechtecke sind, von welchen man bereits zwei Seiten kennt. Nun behaue man ferner eine Ebene, welche durch die beiden bekannten Geraden $R_2 Q_2$ und $Q_2 P_2$ geht, und winkelrecht auf den beiden vorigen Seitenflächen steht, und zeichne auf sie den Umriss $R_2 r_2 F_2 f_2 P_2 Q_2$ identisch mit dem Gewölbesteinhaupte R r F f P Q, welches auf der Vertikalebene der Figur angegeben ist. Hierauf führe man nach den beiden Geraden $F_2 f_2$ und $f_2 p_2$ eine kleine ebene Fläche aus, die man bis zur Curve $F_2 p_2$ verlängert. Letztere bestimmt man durch Anlegung einer nach der Form F″ p″ f″ ausgeschnittenen Lehre; denn die letztgenannte Figur stellt die wahre Grösse der in F p f projicirten Seitenfläche des Gewölbesteines dar. Taf. 39. Fig. 2.

Nun führe man die cylindrische Wölbung mittelst einer Lehre aus, welche die Krümmung des Bogens M N hat, und die man auf den beiden Geraden $M_1 M_2$ und $N_1 N_2$ so hin- und herführt, dass sie sich je auf zweien von $M_1 N_1$ gleichweit entfernten Punkten anlegt. Diese cylindrische Seitenfläche wird verlängert bis zu den Punkten M_2 und N_2, wo mittelst derselben Lehre die Curve $M_2 N_2$ gezeichnet wird. Jetzt ist es leicht, den Anschlag $M_2 N_2 n_2 m_2$, so wie den cylindrischen Falz $m_2 n_2 n_1 m_1$ auszuarbeiten, entweder durch Anlegung einer nach dem Bogen m n ausgeschnittenen Lehre oder ganz einfach mittelst eines nach dem Umrisse B″ D″ D′ verfertigten rechtwinkligen Modells.

Man kennt nun den ganzen Umriss der windschiefen Wölbung $r_2 m_1 n_1 p_2 F_2 r_2$, und um diese Fläche auszuarbeiten, darf man nur auf genanntem Umrisse die Kante eines Richtscheites so hin- und herführen, dass dasselbe immer zu gleicher Zeit sich an zwei Punkte des Umrisses anlegt, welche einer und derselben Erzeugenden angehören. Auf der Figur erhält man diese Punkte, wenn man einige Gerade zieht, welche auf den Punkt O zulaufen; die Uebertragung dieser Punkte auf den Stein ist leicht *).

*) Wenn auf einer Mauer oder auf dem Boden ein Kreisbogen beschrieben werden soll, dessen Halbmesser so gross ist,

§. 672.

Grenzcurve. Statt die im §. 667 angegebene Probe *a posteriori* zu machen, wodurch man genöthigt werden könnte, die ursprünglich gegebenen Stücke abzuändern, hätte man gleich zu Anfang des §. 663 eine Grenze für den freien Spielraum des Thürflügels unter dem Gewölbe finden können. Man denke sich zu diesem Zwecke die Umdrehungsfläche, welche der Falzkreisbogen (C Y, C′ Y′), der den Thorflügel immer etwas überragt, um die Vertikale (C L, C′) beschrieben hat, und schneide diese Fläche durch verschie-
Taf. 40. dene Ebenen, welche, wie M O O′, normal auf dem Falzkreise stehen. Der vertikale Grundschnitt M O dieser
Fig. 1. Ebene schneidet die verschiedenen Parallelkreise in den Punkten α, β, γ, welche, horizontal in α', β', γ' projicirt, die Projection M′ α' β' γ' des Schnittes liefern, welchen jene Ebene mit der Wulstfläche erzeugt. Hierauf ziehe man aus dem Punkte (M, M′) an die genannte Curve die Tangente (M′ P′, M P), welche die Hauptebene E′ F′ im Punkte (P, P′) schneidet. Eben so erzeugt die Normalebene N O O′ den Schnitt N′ δ', dessen aus (N, N′) gezogene Tangente die Hauptebene in (Q, Q′) trifft, nachdem sie vorher die Leibungsfläche C′ E′ im Punkte (R, R′) geschnitten. Ist man zu der Normalebene T O O′ gekommen, welche den Wulst in T berührt, so bietet der Schnitt S′ U′ T′ keine Biegung mehr dar, an welche aus S eine Tangente gezogen werden könnte; man begnügt sich daher, die Secante S′ U′ zu ziehen, welche durch den Punkt U′ geht, in welchem dieser Schnitt die Leibungsseite C′ E′ trifft; und eben so hätte man es auch beim Schnitte N′ δ' machen können, der die Leibungsfläche vor dem Berührungspunkte der Tangente N′ Q′ schnitt. Fährt man so fort, so erhält man die Curven C U R ε und Y P ε, in welchen die Leibungsfläche und die des Hauptes von der windschiefen Fläche geschnitten werden, deren Erzeugende (M P, M′ P′), (N R, N′ R′), ... sind. Da nun diese Erzeugenden Tangenten an der durch den Falzkreis beschriebenen Wulstfläche sind und über denselben liegen, da ferner die anderen, wie (S U, S′ U′), diese Wulstfläche nicht vor der Leibungsfläche schneiden, so folgt hieraus ganz sicher, dass der Thorflügel seinen Lauf unterhalb jener windschiefen Fläche ungehindert vollenden kann. Der Umriss C R ε P Y stellt somit eine untere Grenze dar, welche von der in den §§. 663 und 665 besprochenen dritten Leitlinie nicht überschritten werden darf; und da man schon aus Gründen der

dass man sich keines gewöhnlichen und selbst nicht einmal eines Stangenzirkels bedienen kann, oder auch, wenn der Raum, über den man verfügen kann, die Bezeichnung des Mittelpunktes nicht gestattet, so kann man folgendes Verfahren anwenden, welches nichts voraussetzt, als dass man drei Punkte A, E, F des Bogens kenne. Man setzt zwei Lineale so zusammen, dass sie einen Winkel gleich E A F bilden, und vereinigt sie fest durch ein Querstück (Fig. 3, Taf. 39). Bewegt man nun diesen Winkel so hin und her, dass seine Schenkel beständig an zwei, fest in E und F eingeschlagenen Nägeln anliegen, so beschreibt der Scheitel A, welcher unterhalb mit einem spitzigen Stifte versehen ist, eine Curve, die offenbar ein Kreis sein wird.

Man kann diesen Bogen auch auf folgende Art durch Punkte construiren. Nachdem man die Geraden E A und F A gezogen hat (Fig. 4), beschreibe man mit gleichen Halbmessern E I und F I′ zwei Kreisbögen; auf dem ersten bemerke man von α aus, über und unter diesem Punkte, willkürlich genommene Theile $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$, ..., welche man auch gleich unter sich annehmen kann, und trage sie sodann auf den zweiten Kreisbogen, vom Punkte α' aus, aber in umgekehrter Richtung, nämlich so, dass man $\alpha'\beta' = \alpha\beta$, $\alpha'\gamma' = \alpha\gamma$, $\gamma'\delta' = \gamma\delta$, .. nimmt. Alsdann werden die Geraden E β und F β', E γ und F γ', E δ und F δ', ... sich zu zweien in Punkten B, C, D schneiden, welche dem Kreisbogen E A F angehören; denn in allen den Dreiecken, welche auf diese Art über der Basis E F construirt wurden, ist die Summe der an dieser Basis anliegenden Winkel dieselbe, wie in dem Dreieck E A F selbst.

Soll, wie auf vorliegender Tafel, eine Tangente an den Punkt A des Bogens E A F (Fig. 3) gezogen werden, dessen Mittelpunkt unbekannt ist, so nehme man zwei gleiche Stücke A F und A D, und beschreibe aus F und D mit demselben Halbmesser zwei Kreisbögen, die sich in R schneiden; hiedurch wird der Halbmesser R A und somit auch die Tangente an A bestimmt. Soll an den Endpunkt F eine Tangente gezogen werden, so construire man das Dreieck A R′ F = D R A, und man erhält dann die Seite R′ F, auf welcher die Tangente senkrecht sein muss.

Sparsamkeit sich hüten muss, den Bogen über der Leibung höher zu machen, als nöthig ist, so wird im folgenden Paragraphen das Mittel angegeben, wie man sich jener Grenze so sehr als möglich nähern kann.

Man construire zuerst die Aufklappung der Curve (C R ε, C′ E′); diese wird dargestellt durch D R″ ε″ auf Fig. 2; und um sie zu erhalten, dürfte man nur durch jeden Punkt R eine Horizontale R R″ ziehen, und auf dieser L″ R″ = C′ R′ nehmen. Hierauf wähle man auf der Vertikalen F′ einen Punkt F, etwas höher als ε″ und so gelegen, dass, wenn man ihn in F″ aufklappt und den Halbmesser F G O zieht, man durch F″ eine Gerade F″ H ziehen kann, welche die Grenzcurve D R″ ε″ nicht schneidet und die Vertikale D H in einem Punkte H trifft, der tiefer liegt als G; denn alsdann zeigt die Gerade G H die Richtung an, welche man der Tangente F t geben muss, um den Bogen F Z so zu ziehen, dass dadurch die in §. 664 geforderten Bedingungen der Anschliessung erfüllt werden. Endlich muss man noch den Leibungsbogen so ziehen, dass er die Grenzcurve D R″ ε″ umfasse und die Gerade H F″ in F″ berühre: diess kann geschehen mittelst einer Curve mit zwei Mittelpunkten, wie in §. 665; oder man kann auch, nach der Anmerkung zu demselben Paragraphen, einen einzigen Kreis D q″ ziehen, welcher die beiden Geraden H D und H F″ zugleich berührt; so findet man alsdann D q″ F″ als den vollständigen Leibungsbogen, aus welchem man sofort die Projection D q F leicht ableitet. Nun kann man zum Voraus versichert sein, dass der Thorflügel sich frei unter der windschiefen Fläche drehen kann, welche zu Leitlinien die horizontale Axe O O′, den Falzkreis (C Y D, C′ D′) und den Umriss D q F Z ... hat.

Der Kernbogen von Montpellier (*arrière-voussure de Montpellier*).

§. 673.

Man hat diesen Namen einem Gewölbe gegeben, welches dem vorigen ganz ähnlich ist, nur mit dem einzigen Unterschiede, dass für den Bogen E Z F auf der Vorderseite der Mauer eine horizontale Gerade angenommen wird. Hieraus folgt, dass die mit der Tangente F T parallel gezogene Gerade selbst auch horizontal wird, was jedoch nichts ändert, weder in den übrigen, in den §§. 665, 666, ... erklärten Constructionen, noch in der Aufklappung der Fugenbrettungen. Es wurde desshalb auch für unnöthig erachtet, eine eigene Figur zu zeichnen für diesen besondern Fall, auf welchen man auch die Methode des §. 672 anwenden kann, um eine Grenzcurve für den Leibungsbogen zu erhalten. Man wendet diese Art von Kernbögen, wo der Bogen E Z F auf der vordern Mauerseite geradlinig ist, gewöhnlich bei Bogenfenstern an.

§. 674.

Einige Baumeister haben vorgeschlagen, dem Kernbogen eine conische Wölbung zu geben, welche durch den Falzkreis (C Y D, C′ D′) der Taf. 39 und durch einen andern auf der vordern Mauerseite über dem Durchmesser (E F, E′ F′) beschriebenen Kreis bestimmt wäre. Die graphische Ausführung dieser Aufgabe hat geometrischerseits keine Schwierigkeit; sie unterblieb aber hier, weil diese Art von Gewölbe dem Thorflügel nicht gestattet, sich an die Leibungsfläche anzulegen, und weil man, um demselben nur eine Viertelsumdrehung möglich zu machen, die Ausweitung, d. h. den Unterschied der beiden Durchmesser C D und E F übertrieben gross annehmen müsste, was gegen den guten Geschmack und in der Anwendung sehr unvortheilhaft wäre. Zwar um den genannten Schwierigkeiten zu entgehen, macht man nur den rectangulären, bis zum Anlaufe des Gewölbes reichenden Theil jedes Thorflügels beweglich, und lässt den obern Theil ruhend, und diess mag schon recht sein für eine Privatwohnung; bei einem öffentlichen Gebäude aber, das

rectanguläre Thorflügel bekommen soll, ist es, um dem Innern einen grossartigern Anblick zu geben, schicklicher, einen Kernbogen folgender Art anzuwenden.

Der Kernbogen von Saint-Antoine.

§. 675.

Taf. 40. Fig. 3. Das Gewölbe, welches im Folgenden beschrieben werden soll, befand sich in Paris neben der alten Bastille an dem Thore, welches aus der Stadt nach der Vorstadt Saint-Antoine führte; daher sein Name. Es sei A′ A″ C″ C′ E′ .. B′ B″ D″ D′ F′ ... der horizontale Durchschnitt der Pfeiler, deren Höhe A′ A hier willkürlich verkürzt ist. Der zwischen dem Geläufe A′ A″, B′ B″ enthaltene Theil des Thores ist von einem scheitrechten Bogen überwölbt, so wie auch der Falz, dessen vertikale Projection das Rechteck c C D d ist. Was den zwischen den Leibungsseiten C′ E′ und D′ F′ enthaltenen Raum betrifft, so überdeckt man ihn mit einer Fläche, welche auf folgende Art erzeugt wird. Man beschreibe auf der Vorderseite der Mauer und in der Höhe der Kante C D des Falzes den Halbkreis (E Z F, E′ F′), den man als eine Ellipse mit gleichen Axen betrachtet (man hätte O Z auch kleiner als O E nehmen können); hierauf construire man eine zweite auf ersterer senkrechte Ellipse mit den Halbaxen (O Z, O′) und (O′ Y′, O): es ist hinreichend, das Viertel dieser Curve zu zeichnen, das in Fig. 4 nach Y″ Z″ aufgeklappt ist. Hierauf lasse man die Ellipse (E Z F, E′ F′) sich so fortbewegen, dass ihr Mittelpunkt die Horizontale (O′ Y′, O) durchlaufe, während ihre Axen der ursprünglichen Lage parallel bleiben, sich aber so ändern, dass die bewegliche Curve sich stets an die beiden Leibungsseiten (E′ C′, E C), (F′ D′, F D) und an die feste, in die Vertikalebene O′ Y′ zurückgeführte Ellipse Y″ Z″ anlehnt. Ist auf diese Art die bewegliche Ellipse in die Vertikalebene $\alpha' \gamma'$ gekommen, so hat sie zur horizontalen Halbaxe $\omega' \alpha'$, und ihre vertikale Halbaxe ist die Ordinate $\omega'' \beta''$ der Leitlinie Y″ Z″; es ist mithin leicht, die vertikale Projection $\alpha \beta \gamma$ dieser Curve zu zeichnen. Auf gleiche Weise erhält man die Projectionen $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$, $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3, \ldots$, welche den Vertikalebenen $\alpha'_2 \gamma'_2$, $\alpha'_3 \gamma'_3, \ldots$ entsprechen. Ist endlich die bewegliche Ellipse in der Vertikalebene C′ D′ angekommen, so wird ihre Axe Null, und sie reducirt sich auf die Gerade (C D, C′ D′), so dass die auf solche Weise erzeugte Fläche nun den ganzen zwischen den Leibungsseiten und dem rectangulären Falze enthaltenen Raum überdeckt *).

*) Diese Fläche, welche zum Geschlechte der sogenannten Segelflächen gehört, lässt, wenn man sie in ihrer ganzen Ausdehnung betrachtet, eine interessante Discussion zu; um aber den Calcul zu vereinfachen, ohne jedoch der Fläche die besonderen Eigenschaften zu benehmen, welche sie interessant machen, wird hier vorausgesetzt, die Ebene C′ D′ F′ E′ (Fig. 3) sei ein Rechteck. Man bezeichne durch a und b die beiden horizontalen Halbaxen O′ F′ und O′ Y′ der Ellipsen, und durch c die vertikale Halbaxe (O′, O Z), welche ihnen gemeinschaftlich ist; alsdann sind die Gleichungen dieser Curven

$$(1) \qquad y = o, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

$$(2) \qquad x = o, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Wird nun die erste in irgend eine der ihrigen parallele Ebene versetzt, so werden ihre Gleichungen:

$$y = \beta, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

wo γ die Ordinate z bezeichnet, welche in der Ellipse (2) der Abscisse $y = \beta$ entspricht, und folglich hat man

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{b^2}\,(b^2 - \beta^2).$$

Eliminirt man nun β und γ aus den drei letzten Gleichungen, so erhält man als Gleichung für die durch die bewegliche Ellipse erzeugte Fläche:

§. 676.

Um nun dieses Gewölbe in seine Gewölbesteine zu theilen, muss man den Bogen E Z F auf der Vorderseite der Mauer in eine ungerade Anzahl gleicher Theile theilen, und hierauf durch die Theilpunkte und die horizontale Axe (O, O′ Y′) Ebenen legen. Diese Ebenen bestimmen die auf P Q, L S ... projicirten Fugenflächen, welche von den horizontalen Schichten der Mauer begrenzt werden; statt sie aber bis zum Punkte O zu verlängern, wo sie sehr spitzige Winkel bilden würden, ersetzt man sie, vom Bogen E Z F an, durch horizontale Cylinder P N, L M, ..., welche den Falz unter einem rechten Winkel schneiden, und die ebenen Fugen P Q, L S, ... berühren. Man zeichnet zu diesem Zwecke die Tangente P T, beschreibt mit ihr den Kreisbogen P N, den man als Basis eines auf der Vertikalebene senkrechten Cylinders betrachtet, und fügt noch die kleine ebene Fläche N n in derselben Richtung bei, so dass die ganze Fuge sich vertikal in Q P N n projicirt; auf dieselbe Weise erhält man auch die übrigen Fugen. Hiedurch werden zwar die inneren Gewölbesteinflächen m n des scheitrechten Bogens nicht alle unter sich gleich breit werden; es ist aber auch hinreichend, wenn sie, links und rechts von O, symmetrisch sind in Beziehung auf ihre Grösse. Wollte man sie aber durchaus von gleicher Breite haben, so müsste man zuerst auf C D die Punkte M, N, .. dieser Forderung gemäss bestimmen, und hierauf den Kreisbogen N P durch eine Curve mit zwei Mittelpunkten ersetzen, welche zu gleicher Zeit die Vertikale N n und die Gerade P Q berührte.

§. 677.

Man suche nun die Wölbungskanten, welche aus den Durchschnitten der innern Wölbungsfläche des Kernbogens mit den auf L M, N P, .. projicirten Cylindern entstehen. Hat man nach §. 675 die vertikalen Projectionen $\alpha \beta \gamma$, $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$, ... der Erzeugungslinie dieser Wölbungsfläche in ihren auf einander folgenden Lagen construirt, so werden diese von dem Cylinder L M in den Punkten λ, λ_2, λ_3 ... geschnitten, welche, in λ', λ'_2, λ'_3, ... projicirt, die Horizontalprojection $L' \lambda' M'$ der gesuchten Wölbungskante geben: ihre vertikale Projection ist $L \lambda M$. Auf ähnliche Art erhält man die übrigen Wölbungskanten ($P \pi N$, $P' \pi' N$), ... Sie wurden mit vollem Striche gezeichnet, weil angenommen wird, die Horizontalprojection werde von unten gesehen.

§. 678.

Entwickelung der Fugenbrettungen. Weil die Curve L M der gerade Durchschnitt des Cylinders ist, welcher diese Fuge bildet, so rectificire man diese Curve, indem man auf Fig. 5 die Distanzen

$$M'' l''' = M \lambda_3, \quad l''' l'' = \lambda_3 \lambda_2, \quad l'' l' = \lambda_2 \lambda, \quad l' l = \lambda L$$

$$(3) \qquad \frac{z^2}{c^2} = \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right) \left(\frac{b^2 - y^2}{b^2}\right).$$

Schneidet man nun diese Fläche durch Ebenen, welche den Seiten des Rechtecks C′ D′ F′ E′ parallel sind, so erhält man Ellipsen oder Hyperbeln, je nachdem die schneidende Ebene sich innerhalb oder ausserhalb des Rechtecks befindet; und fällt sie mit einer der Seiten zusammen, so reducirt der Schnitt sich auf eine Gerade. Die Gleichung (3) entspricht also einer geschlossenen, auf ein Rechteck projicirten Fläche, mit vier unbegrenzten Flächenästen, welche sich innerhalb der den Winkeln des Rechtecks entsprechenden Scheitelwinkel ausbreiten; ferner enthält die Fläche vier unbegrenzte Gerade, welche die Seiten des Rechtecks mit ihren Verlängerungen sind. Schneidet man diese nämliche Fläche (3) durch eine in der Richtung einer Diagonale gelegte Ebene, so erhält man zwei Parabeln, deren jede, ohne Unterbrechung der durch die Gleichungen (1) oder (2) dargestellten beweglichen Ellipse, als continuirliche Leitlinie dienen könnte. Die Discussion der horizontalen Schnitte ist eben so interessant, muss aber dem Leser überlassen bleiben.

nimmt; und errichtet man hierauf die Ordinaten

$$l'''l_3 = Y'\omega'_3, \quad l''l_2 = Y'\omega'_2, \quad l'l_1 = Y'\omega', \quad 1L'' = Y'O',$$

so erhält man die verschiedenen Punkte der Curve $M'' l_3 l_2 l_1 L''$, welche die Verwandelte der Wölbungskante ($L'M'$, LM) ist. Nimmt man ferner $L''S'' = LS$, so kann man leicht den Umriss der Fugenbrettung $SLMm$ vollenden. Was die Fuge $QPNn$ betrifft, so muss man die Bögen $N\pi_3$, $\pi_3\pi_2$, $\pi_2\pi$, πP rectificiren, indem man dieselben Ordinaten wie vorhin beibehält. Auf diese Art erhält man die Brettung $M'' p_2 P'' Q''$ der Fig. 5.

§. 679.

Behauung des Steines. Man behaut zuerst ein gerades Prisma (§. 633), welches zur Basis das Vieleck $SLMmnNPQR$ und zur Länge wenigstens die Entfernung der beiden Vertikalebenen $A'B'$, $E'F'$ hat; hierauf bearbeitet man die den Seiten LM, PN entsprechenden cylindrischen Flächen mittelst der Brettungen der Fig. 5, welche man aus biegsamem Carton gemacht hat, dem man die Krümmung jener Flächen geben kann; und nun kann man den Umriss der auf $LMNP$ projicirten Wölbungsfläche zeichnen, indem man die Brettung $LPQRS$ des Hauptes auf die zweite Basis des Prisma anlegt. Was die Behauung dieser Wölbungsfläche betrifft, welche weder windschief noch entwickelbar ist, so muss man dem Arbeiter mehrere nach der Krümmung der elliptischen Bögen $\lambda\pi$, $\lambda_2\pi_2$, $\lambda_3\pi_3$ ausgeschnittene Lehren geben; diese muss er nach einander am Steine anlegen, indem er sie beziehungsweise durch die Punkte l_1 und p_1, l_2 und p_2, ... gehen lässt, die mittelst der Brettungen (Fig. 5) auf den Stein übertragen worden sind. Dieses Verfahren erfordert freilich mehr Zeit, zahlreichere Versuche, und ist weniger genau, als wenn man hätte beständig eine und dieselbe Lehre anwenden können; aber es ist unmöglich, diese Nachtheile zu umgehen, da die Erzeugende der fraglichen krummen Fläche eine in Form und Lage veränderliche Linie ist. Man vermeidet auch so viel wie möglich die Anwendung solcher Flächen in der Stereotomie.

Viertes Kapitel.

Sphärische und sphäroidische Gewölbe.

Sphärisches Gewölbe mit horizontalen Schichten.

§. 680.

Taf. 41. Fig. 1. Dieses Gewölbe hat zur innern Wölbungsfläche eine durch die Umdrehung des Viertelskreises ($A'Z'$, AO) um seinen vertikalen Durchmesser ($O'Z'$, O) entstandene Halbkugel; und die Theilung dieser ganzen Fläche in einzelne Felder geschieht durch Parallel- und Meridiankreise. Man theile daher den Halbkreis $A'Z'B'$ in eine ungleiche Anzahl gleicher Theile und denke sich durch die Punkte L', M', ... Horizontalebenen gelegt, so theilen diese die Kugel in den Kreisen ($LP...$, $L'P'...$), ($MN...$, $M'N'...$), ..., welche die erste Reihe der Gewölbelinien bilden. Die zweite erhält man durch die gleichweit von einander abstehenden Meridiane AO, EO, FO, ..., welche die Kugel in grössten Kreisen schneiden, die vertikal auf Ellipsen, wie

F′P′N′Z′, sich projiciren. Letztere Curve wird construirt, indem man die Punkte F, P, N, in welchen der Grundschnitt der Meridianebene F O von den Projectionen der verschiedenen Parallelkreise geschnitten wird, auf die Vertikalebene bezieht. Man muss aber diese Meridianschnitte unterbrechen und in je zwei auf einander folgenden Schichten mit einander abwechseln lassen, wie die Figur es zeigt, damit eine um so festere Verbindung der Gewölbesteine unter sich zu Stande komme. Ferner bemerke man, dass die Vertikalebene hier einen durch die Meridianebene A O B in die Halbkugel gemachten Schnitt darstellt, und dass angenommen wird, die vordere Hälfte des Gewölbes sei weggenommen, damit man das Innere sehen könne.

§. 681.

Was die Seitenflächen der Gewölbesteine betrifft (als Beispiel wird hier derjenige angenommen, welcher zur Wölbung das sphärische Viereck [L M N P, L′M′N′P′] hat), so sind die beiden Stossfugen, welche durch die Seiten, (L M, L′M′), (P N, P′N′) gehen, die Verlängerungen der Meridianebenen dieser Bögen, weil diese Ebenen normal auf der Wölbung sind (§. 584); zur Herstellung der Lagerfugen aber, welche durch die parallelen Bögen (L P, L′P′), (M N, M′N′) gehen, muss man die verschiedenen Normalen der Kugel anwenden, welche durch alle die Punkte jener Bögen gehen, und bekanntlich bilden diese Normalen zwei Umdrehungskegel, die von den Radien O′L′l′ und O′M′m′ durch Umdrehung um O′Z′ erzeugt werden. Diese vier Fugen werden von der Rücken- oder Aussenfläche des Gewölbes begrenzt, als welche eine zweite Kugel l′m′z′ angenommen wird, deren Mittelpunkt in der Vertikalen O, aber tiefer als O′ liegt (§. 610). Die Rückenfläche des Gewölbesteines ist das Viereck (l m n p, l′m′n′p′). Mit einem Wort, der ganze Gewölbestein wird erzeugt durch Umdrehung der Figur L′M′m′l′ um die Vertikale O′Z′.

§. 682.

Man bemerke, dass ein solches Gewölbe bestehen und sich im vollkommenen Gleichgewichte erhalten kann, auch wenn es nicht bis zum Schlusssteine hinauf ausgeführt ist, vorausgesetzt, dass jede der unteren Schichten vollständig, im ganzen Umfange des entsprechenden Parallelkreises gelegt sei. Durch die conischen Fugen nämlich werden die Wirkungen der Schwere auf die Gewölbesteine in Kräfte zerlegt, welche alle nach dem Mittelpunkte (O, O′) gerichtet sind; nun aber können die Gewölbesteine einer und derselben Schichte diesen Kräften nicht nachgeben und über ihr Lager herabrutschen, weil der Rücken eines jeden eine grössere Breite m n hat, als die innere Wölbung M N; sie unterstützen sich also wechselseitig, indem sie wie Keile auf einander reagiren. Es geschieht daher häufig, dass man den Schlussstein und mehrere der ihm zunächst liegenden Reihen horizontaler Gewölbesteine weglässt, um eine Oeffnung zu erhalten, durch welche das Licht einfällt; öfters auch wird auf der letzten beibehaltenen Schichte eine Laterne, d. h. ein cylindrisches Thürmchen erbaut, das mehrere Fenster hat und selbst wieder von einer halbkugeligen Calotte überwölbt ist. Es ist aber hinreichend, solche Modificationen bloss anzudeuten, da sie zu keinen neuen Problemen der Stereotomie Veranlassung geben.

Behauung des Steines. Man sieht aus dem Vorhergehenden, dass die Entwerfung des Risses zu einem sphärischen Gewölbe ausserordentlich einfach ist, besonders wenn man, wie die Werkmeister zu thun pflegen, die verschiedenen Ellipsen auf der Vertikalprojection weglässt. Nicht so leicht ist die Behauung der Gewölbesteine, wenn man Genauigkeit mit Ersparung von Material und Mühe verbinden will. Von den nun folgenden verschiedenen Verfahrungsarten hat jede ihre Vor- und Nachtheile.

§. 683.

Taf. 41. Fig. 3. **Erste Methode der Behauung.** Man behaut zuerst ein gerades Prisma u v x y u′ v′ x′ y′ (§. 633), dessen beide Grundflächen der Brettung M N p l der Horizontalprojection des Gewölbesteines (Fig. 1) gleich sind: diess ist leicht auszuführen durch die schon mehrere Male angegebenen Mittel (§. 635); hierauf zeichnet man auf die Seitenflächen dieses Prisma die Umrisse $L_2 M_2 m_2 l_2$ und $N_2 P_2 p_2 n_2$ mittelst der Brettung L′ M′ m′ l′ des Hauptes, die man so anlegen muss, dass ihre Ecken in die Seiten des Rechtecks fallen; man muss zu diesem Zwecke die Distanzen $M_2 u = M' P'$, $L_2 u = L M$ nehmen. Hierauf zeichnet man auf die vordere cylindrische Fläche den Kreisbogen $M_2 N_2$ mittelst eines breiten und sehr dünnen, biegsamen Lineals, das man in die Hohlung des Cylinders eindrückt. Eben so zeichnet man auf die erhabene Fläche des hintern Cylinders den Kreisbogen $l_2 p_2$; endlich beschreibt man auf der untern und obern Seitenfläche die beiden Bögen $L_2 P_2$ und $m_2 n_2$, identisch mit L P und m n.

Nun ist es leicht, die sphärische Wölbung $L_2 M_2 N_2 P_2$ zu behauen, indem man auf den beiden Bögen $M_2 N_2$ und $L_2 P_2$ eine nach der Krümmung des Meridiankreises L′ M′ ausgeschnittene **Lehre** (Fig. 5) anwendet, die man nur immer an je zwei, zu einerlei Meridian gehörige Punkte anlegen muss; um aber solche Punkte zu erhalten, darf man nur jeden der zwei Bögen $M_2 N_2$, $L_2 P_2$ in dieselbe Anzahl gleicher Theile theilen. Was die obere Fuge $M_2 N_2 n_2 m_2$ betrifft, welche ein Theil von einer conischen Fläche ist, so wendet man zu ihrer Behauung ein einfaches Lineal oder Richtscheit an, das man über die beiden Bögen $M_2 N_2$ und $m_2 n_2$ weggleiten lässt, nachdem man letztere zuvor in eine und dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt hat. Eben so verfährt man in Beziehung auf die untere Fuge $L_2 P_2 p_2 l_2$, welche gleichfalls conisch ist. Die Rückenfläche $l_2 m_2 n_2 p_2$ endlich ist eine sphärische Fläche, welche man mittelst einer **concaven** Lehre, die nach der Krümmung des Meridians l′ m′ ausgeschnitten ist, behauen könnte; gewöhnlich aber lässt man sie unbehauen oder bearbeitet sie nur aus dem Groben.

Diese Methode ist, was die Resultate betrifft, unter allen die genaueste; aber sie verursacht einen grossen Verlust an Material und Mühe, weil von allen den Seitenflächen des vertikalen Prisma M N p l, das man zuerst herstellen musste, Nichts übrig bleibt. Die Steinhauer wenden desshalb diese Methode auch nicht an, ausser bei den Gewölbesteinen der ersten oder der beiden ersten Schichten, wo, durch die Form A′ L′ l′ a″ a′ der Brettung des Hauptes, die oben bezeichneten Nachtheile sehr gemindert werden. Aus letzterem Grunde und weil bei gewissen nicht sphärischen, aber doch durch Umdrehung entstandenen Gewölben (§§. 695, 701) sie nicht entbehrt werden kann, wurde diese Methode hier angegeben.

§. 684.

Zweite Methode. Man kann den Abfall vermindern und Steine von geringerm Volumen anwenden, wenn man den Gewölbestein (Fig. 1) auf die Vertikalebene O E projicirt, die ihn in zwei symmetrische Hälften theilt: die Resultate dieser leicht auszuführenden Projection sind auf Fig. 4 angegeben. Nun behaue man ein gerades Prisma, dessen Basis die Brettung der Vertikalprojection G′ L′ l′ M′ m′ q′ g′ und dessen Höhe gleich l p sei; hierauf trage man auf die Kanten dieses Prisma die Längen U G, V L und V P; X q, Y m und Y n; Z M und Z N, wodurch man, sammt den Punkten (l, l′), (p, l′), die leicht auf beiden Grundflächen zu bemerken sind, vier Punkte erhält für jede der Vertikalebenen l M und p N, welche sonach leicht behauen werden können. Auf letztere Ebenen zeichne man nun den Umriss der Stossfugen mittelst der Meridianbrettung G′ Q′ q′ g′, und trage auf die horizontalen Seitenflächen q′ m′ und G′ L′ die Kreisbögen m q n und L G P.

Ist diess geschehen, so führe man die obere, conische Fuge aus, von der man jetzt die beiden

äussersten Erzeugenden (M′ m′, M m), (M′ m′, N n) und eine Leitlinie (m q n, q′ m′) kennt; diess geschieht mittelst eines Richtscheites, welches man über jenen Kreisbogen hingleiten lassen und zugleich so halten muss, dass es verlängert mit beiden Rändern der conischen Zone zusammenliefe. Weil man hier nur eine Leitlinie hat, so bleibt die Handhabung des Richtscheites immer etwas unsicher; aber die Höhlung dieser Fläche ist stets nur wenig merklich, und es genügt daher, den Stein sachte in der Richtung des Lineals auszuhöhlen, bis man einmal die Brettung M″ N″ n″ m″ genau auf denselben anlegen kann; diese ist auf biegsamen Carton gezeichnet und stellt die Verstreckung der conischen Fuge dar (wobei bekanntlich die Bögen M″ N″ und m″ n″ an absoluter Länge gleich den Bögen M Q N und m q n genommen werden mussten). Fällt nun diese Brettung mit der behauenen Fläche gut zusammen, so darf man nur noch nach dem Rande M″ N″ der Brettung den Kreisbogen (M Q N, M′ Q′) auf den Stein zeichnen, durch welchen die obere conische Fuge begrenzt wird *). Man verfährt eben so in Beziehung auf die untere Fuge, indem man sich des schon auf den Stein gezeichneten Kreisbogens (L G P, L′ G′) und der Brettung L″ P″ p″ l″ bedient, welche die Entwicklung dieser conischen Fuge darstellt; diese biegsame Brettung dient auch zur Zeichnung des kreisförmigen Bogens (l g p, l′ g′) der Rückenfläche. Die sphärische Wölbung endlich wird ausgeführt mittelst einer nach dem Meridiane G′ Q′ ausgeschnittenen Lehre, welche man über die beiden Bögen (M Q N, M′ Q′), (L G P, L′ G′) hingleiten lässt, und zwar so, dass sie immer zugleich auf den einander entsprechenden Punkten aufliegt, durch welche jene beiden Bögen in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt werden.

§. 685.

Dritte Methode. Diese ist sehr scharfsinnig erfunden und wird gewöhnlich angewendet. Nachdem man einen tauglichen Stein ausgewählt hat, höhlt man in denselben eine sphärische Calotte, gleich derjenigen, welche eine durch die vier Eckpunkte (L, L′), (M, M′), (N, N′), (P, P′) gehende Ebene von der innern Wölbungsfläche abschneiden würde. Die Sehnen, welche diese Eckpunkte verbinden, liegen aber wirklich in einer und derselben Ebene, weil zwei von ihnen, (L P, L′ P′) und (M N, M′ N′), offenbar parallel mit einander sind. Diese Ebene schneidet ferner die Kugel in einem kleinen Kreise, welcher das geradlinige, auf L M N P projicirte Viereck umschreibt und der genannten Calotte als Basis dient. Nachdem man nun eine der Seitenflächen u v x y des Steines (Fig. 7) etwas zugerichtet hat, zeichnet man auf dieselbe das Trapez $L_2 M_2 N_2 P_2$, identisch mit dem des Gewölbesteines, durch Zirkelöffnungen, die man gleich den wahren Längen der Seiten und Diagonalen nimmt. Die beiden horizontalen Seiten aber sind an wahrer Länge den Geraden L P und M N, jede der aufsteigenden Seiten der Sehne L′ M′, und jede der Diagonalen der Aufklappung L′ N″ gleich. Endlich beschreibe man um das Viereck einen Kreis U V X Y **), und höhle nun innerhalb der Kreislinie den

Taf. 41. Fig. 1 u. 7.

*) Die hier angegebenen Hilfsmittel werden einem verständigen Arbeiter immer genügen; wollte man aber dem Verfahren alle nur wünschenswerthe Präcision geben, so müsste man die Durchschnittscurve der conischen Fuge mit der auf die Sehne L′ l′ M′ projicirten Ebene suchen; diese Curve ist leicht zu erhalten, zuerst in ihren Projectionen und hierauf nach ihrer wahren Grösse, und trägt man sie auf die Seitenfläche L′ l′ M′ des Steines, so bildet sie eine zweite Leitlinie, welche, in Verbindung mit dem bereits gezeichneten Kreisbogen (m q n, m′ q′), die Bewegung des Richtscheites, wodurch die conische Fläche erzeugt wird, vollkommen bestimmt. Hierauf müsste man, wie oben, die verstreckte Brettung M″ N″ n″ m″ anlegen, um den Kreisbogen (M N, M′ Q′), der die Fuge begrenzt, zu zeichnen.

**) Es wäre bequemer und auch genauer, zuerst den Kreis U V X Y zu beschreiben, dessen Durchmesser man *a priori* erhalten kann, und hierauf das Trapez einzuschreiben, dessen Diagonalen jetzt nicht bekannt zu sein brauchten. Man bemerke desshalb, dass die Ebene, welche durch die Mitten der beiden Parallelseiten L P, M N des Trapezes geht, die Ebene dieser Figur in einer Geraden schneidet, welche, bis zu ihren Durchschnittspunkten mit der Kugel verlängert, genau der Durchmesser des um das Trapez beschriebenen Kreises wird. Klappt man daher jene Ebene O E auf die Vertikalebene O A auf, so ist es leicht, die

Stein auf die angegebene Art aus, bis eine nach dem Meridiane A′L′M′ ausgeschnittene Lehre (Fig. 5), die man in die Höhlung einsetzt, und zwar so, dass ihre Ebene auf der des Kreises senkrecht steht, sich so um ihren Mittelpunkt drehen lässt, dass ihre Endpunkte stets zwei diametral einander entgegenliegenden Punkten der Kreislinie entsprechen. Man nennt die so ausgearbeitete Höhlung eine Schale *(écuelle)*.

§. 686.

Um nun in diese Schale den Umriss der eigentlichen Wölbung des Steines zu zeichnen, nehme man eine nach der Krümmung des Parallelkreises MN ausgeschnittene Lehre, schräge, der Genauigkeit wegen, den krummlinigen Rand derselben ab, lege ihn an die Punkte M und N an, und neige die Lehre so lange hin und her, bis jener Rand ganz mit der krummen Fläche der Schale zusammenfällt; nun zeichne man den Kreisbogen M_2N_2. Auf ähnliche Art werden auch die anderen Bögen L_2P_2, L_2M_2, N_2P_2 beschrieben, indem man Lehren anwendet, die man nach dem Parallelkreise LP und dem Meridiane L′M′ ausgeschnitten hat. So erhält man endlich den Umriss der Wölbung.

Um nun die beiden Lagerfugen, so wie die beiden Stossfugen zu behauen, welche alle, längs des Umrisses $L_2M_2N_2P_2$, normal auf der Wölbung stehen, darf man nur ein und dasselbe Schrägmass (Fig. 6) anwenden, dessen krummliniger Schenkel die Krümmung des Meridians A′L′ hat, und dessen geradliniger Schenkel die Verlängerung des Halbmessers ist. Während man nun den Rand des krummlinigen Schenkels auf die krumme Fläche der Schale auflegt, muss man das Schrägmass so halten, dass seine Ebene normal auf dem Umrisse der Wölbung stehe, und also mit der Ebene eines grössten Kreises der Kugel zusammenfalle. Um dieser Forderung leichter nachzukommen, muss man jeden der beiden Kreisbögen M_2N_2 und L_2P_2 in vier oder sechs gleiche Theile theilen und das Schrägmass immer an zwei einander entsprechende Theilpunkte anlegen.

Diese Methode wird häufig nach ihrem Erfinder benannt, dem Baumeister *Delarue,* welcher sie in seinem, im Jahre 1728 erschienenen *Traité de coupe des pierres* gegeben hat. Die folgende ist von dem Jesuiten *Derand*, welcher sie in seiner im Jahre 1643 gedruckten *Architecture des voûtes* veröffentlichte.

§. 687.

Taf. 41. Fig. 2. Vierte Methode, mittelst entwickelter Brettungen. Es muss zum Voraus gesagt werden, dass diese Methode nur annähernd ist, und nicht angewendet werden durfte bei Gewölben von kleinen Dimensionen. Wenn aber der Halbmesser der innern Wölbung 5—6 Meter beträgt, so darf man sie ohne Anstand anwenden und sie gewährt alsdann viel mehr Leichtigkeit und selbst Genauigkeit, als der Gebrauch der Lehren, von denen im §. 686 die Rede war. Unter Voraussetzung eines grossen Halbmessers nun differirt der Meridianbogen $\lambda'\mu'$ (Fig. 2), welcher die Höhe der Wölbung jedes Steines bestimmt, nicht merklich von seiner Sehne, und man kann alsdann diese Wölbung als ein Stück einer Kegelfläche betrachten, welche durch Umdrehung der Geraden $S'\mu'\lambda'$ um den vertikalen Durchmesser O′Z′ entstanden ist. Diese conische Wölbung aber ist entwickelbar; beschreibt man daher mit den Halbmessern $S'\lambda'$, $S'\mu'$ Kreisbögen, und nimmt auf diesen die Abschnitte $\lambda'\pi''$, $\mu'\nu''$ gleich den Bögen $\lambda\pi$, $\mu\nu$, so stellt das Viereck $\lambda'\mu'\nu''\pi''$ die Brettung dieser entwickelten Wölbung dar. Hat man also die Schale Fig. 7 nach der im §. 685 gegebenen

Lagen zu finden, welche die Mitten der Seiten LP, MN auf dieser Aufklappung annehmen; und zieht man nun durch diese Mitten eine Gerade, und verlängert sie bis zu ihren Durchschnitten mit dem Meridiane A′L′M′, so ist die auf diese Art erhaltene Meridiansehne der Durchmesser des um das Trapez beschriebenen Kreises.

Anleitung behauen, so legt man die aus biegsamem Carton verfertigte Wölbungsschablone hinein, welche ohne merklichen Fehler die Form annehmen wird, welche der wahren sphärischen Wölbung entspricht, so dass man also mit einem Zuge den Umriss $L_2 M_2 N_2 P_2$ zeichnen kann. Ist diess geschehen, so werden die Fugen auf dieselbe Art ausgeführt, wie im vorigen Paragraphen.

Schlussnische eines Tonnengewölbes *(Voûte en cul-de-four)*.

§. 688.

Mit diesem Namen wird ein Gewölbe bezeichnet, dessen innere Wölbung eine Viertelskugel ist, durch welche ein Tonnengewölbe geschlossen wird. Man nennt es auch Backofengewölbe. Die Zurüstung eines solchen Gewölbes geschieht gewöhnlich nach horizontalen Schichten, so dass die Wölbungskanten durch die Halbkreise (L′R′, LGR), (M′Q′, MHQ) dargestellt werden, welche in den horizontalen, durch die Theilpunkte L′, M′ des Grundbogens im Tonnengewölbe gelegten Ebenen enthalten sind. Die Lagerfugen sind Kegelflächen, erzeugt durch die Verlängerungen der Halbmesser O′L′, O′M′, ..., wenn diese sich um die Vertikale (O, O′Z′) drehten. Diese Fugen schliessen sich vollkommen an die des Tonnengewölbes an, welche von den Ebenen gebildet werden, die man durch dieselben Halbmesser und die Horizontale OI gelegt hat. Die Stossfugen werden durch Meridianebenen gebildet, welche durch die Vertikale O gehen; man muss sie unterbrechen und sie von einer Schichte zur andern mit einander abwechseln lassen. Die Form der Gewölbesteine ist also ganz dieselbe, wie auf Taf. 41, und mithin werden sie auch auf gleiche Art behauen. Taf. 42. Fig. 1.

Manchmal wird noch ein Gurtbogen *(arc doubleau)* zugefügt, d. h. ein Vorsprung, der von einem Cylinder (a′z′b′, abcd) gebildet wird, dessen Halbmesser kleiner ist, als der des Tonnengewölbes; dieser Gurtbogen muss aber stets auf dem Tonnengewölbe selbst und nicht auf der Kugel angebracht werden, was störend für das Auge wäre. Man bemerke, dass bei dieser und den folgenden Figuren angenommen wird, die Horizontalprojection werde von unten gesehen, und es wurden auch nur diejenigen Linien bemerklich gemacht, welche unter dieser Voraussetzung sichtbar sind.

§. 689.

Manchmal wählt man eine andere Zurüstung für dieses Gewölbe. Man theilt den horizontalen grössten Kreis AIB in eine ungleiche Anzahl gleicher Theile, und legt durch die Theilpunkte vertikale und parallele Ebenen LR, MQ, NP; diese schneiden die Kugel in Kreislinien, welche man zu Gewölbekanten nimmt. Die Lagerfugen sind wieder Umdrehungskegelflächen, welche ihren Scheitel im Mittelpunkte (O, O′) und zu Grundflächen jene verschiedenen Kreislinien haben; man bemerke aber, dass die Axe dieser Kegel, statt vertikal zu sein, wie vorhin, hier die Horizontale (OI, O′) ist. Die Fugen der andern Reihe werden von Meridianebenen gebildet, welche durch die horizontale Axe OI und durch die Theilpunkte gehen, welche man in gerader Zahl auf dem vertikalen Kreise (AB, A′Z′B′) genommen hat; diese Ebenen bilden, verlängert, zugleich die Lagerfugen des Tonnengewölbes und bestimmen eine Reihe von Gewölbesteinen als Schluss des Gewölbes. Was das Nischengewölbe betrifft, so wird der Schlussstein durch eine Art Auge *(trompillon)* (NP, N′z′P′) ersetzt. Taf. 42. Fig. 2.

Die Meridianfugen schneiden die Kugel in Kreisen, deren Horizontalprojectionen, wie $\alpha\beta\gamma\delta I$, man erhält, wenn man die Punkte α', β', γ', .., in welchen der Grundschnitt $O'\alpha'$ der Fugenebene die verschiedenen Parallelkreise der Kugel trifft, auf die Horizontalebene bezieht; man muss diese Meridianfugen unterbrechen, und sie von einer Schichte zur andern mit einander abwechseln lassen. Die Behauung der Steine

geschieht auf die nämliche Weise, wie bei dem sphärischen Gewölbe (Taf. 41), weil jeder dieser Gewölbesteine ebenfalls zwischen zwei Meridianebenen und zwei conischen Flächen enthalten ist. Endlich ist auf Taf. 42 die Fig. 2 nichts anderes, als die Fig. 1, wenn in letzterer die Horizontalebene als Vertikalebene, und umgekehrt, angenommen wird.

Sphärische Nische.

§. 690.

Taf. 42. Fig. 3. So nennt man eine in einer Mauer angebrachte Höhlung, die aus einem vertikalen, durch Umdrehung erzeugten Halbcylinder (A I B, A'' A' B' B'') und einer ihn überwölbenden Viertelskugel (A I B, A' Z' B') besteht, die denselben Halbmesser hat, wie der Cylinder. Dieses kleine sphärische Gewölbe kann nicht auf dieselbe Art zugerichtet werden, wie die vorigen, weil die Gewölbesteine der ersten an der Stirnebene liegenden Reihe nach der Vorderseite zu keinen Halt hätten. Man muss daher Gewölbesteine anwenden, welche, aus einem Stücke bestehend, nach einem im Innern und tiefer als ihre Häupter liegenden Punkte convergiren; desshalb legt man alle Fugenebenen durch den horizontalen Durchmesser (O I, O') und durch die Punkte M', L', ..., welche den Stirnbogen A' Z' B' in eine ungerade Anzahl gleicher Theile theilen. Diese Ebenen schneiden die Kugel in Kreisen, deren horizontale Projectionen, wie M m n N, man leicht mittelst verschiedener, mit der Vertikalebene A B paralleler, Schnitte erhält. Es ist aber für den Werkmeister unnöthig, diese Projectionen zu zeichnen; hier sind sie nur als Mittel zur Darstellung angegeben worden. Nun verlängert man die Fugen über die Stirnebene, nach den Geraden M' T', L' Q', bis zu den gleichweit von einander entfernten Horizontalen, welche die Steinschichten der Mauer von einander absondern, mit denen man die Gewölbesteine möglichst in Verbindung setzen muss. Einer oder mehrere dieser Steine können mit Hacken (§. 612) von der Form T' S' R' versehen werden.

§. 691.

Statt aber die Gewölbesteine bis zum Punkte (I, O') zu verlängern, wo sie allzuspitzige Winkel bilden würden, als dass ihre Kanten dem geringsten Drucke widerstehen könnten, bgr enzt man dieselben durch einen kleinen horizontalen, aus einem einzigen Steine gebildeten, Cylinder (E' P' F', E F G H), den man das Auge *(trompillon)* nennt. Die Fläche dieses Cylinders erfüllt zwar nicht die wesentliche Bedingung, normal zu sein auf der Kugelfläche, von welcher die Wölbung des Auges einen Theil ausmacht, und man sollte daher die Berührungsflächen der Gewölbesteine mit dem Auge nach einer conischen Fläche bilden, welche den Mittelpunkt (O, O') der Kugel zum Scheitel und den kleinen Kreis (E' P' F', E P F) zur Basis hätte. Da aber eine solche conische Fuge die Schwere dergestalt zerlegen würde, dass die Gewölbesteine ein Bestreben, vorwärts zu gleiten, erhalten würden, und da überdiess bei der geringen Länge des Cylinderhalbmessers O' F' die Schiefe der Stellung jener Fugenflächen nur unbedeutend sein kann, so behält man gewöhnlich die Cylinderform für das Auge bei. Später, im §. 834, wird noch einmal hievon die Rede sein.

§. 692.

Um die genaue Form der in P' L' Q' und N' M' T' projicirten Fugen zu erhalten, darf man nur ihre Ebenen um den horizontalen Durchmesser (O', I O) in die Horizontalebene umlegen; nimmt man auf dieser die Distanzen B Q'' = L' Q', B T'' = M' T', so erhält man als Brettungen der genannten Fugen

G F B Q'' q'' und G F B T'' t''.

§. 693.

Um den Gewölbestein, der z. B. in $M'N'P'Q'R'S'T'$ projicirt ist, zu behauen, muss man zuerst ein gerades Prisma herstellen, dessen Basis $n p Q_2 R_2 S_2 T_2$ mit der Brettung der eben genannten Vertikalprojection übereinstimmt. Es versteht sich hiebei von selbst, dass die Seitenfläche $n p P_1 N_1$ des Prisma cylindrisch sein wird, weil die Brettungsseite $n p$ eine Curve ist; dieser Cylinder lässt sich aber ebenfalls mit Hilfe des Winkeleisens oder auch mittelst einer nach dem Bogen $N'P'$ ausgeschnittenen Lehre behauen. Auf der Basis des Prisma bezeichne man auch den Bogen $L_2 M_2$ identisch mit $L'M'$, und auf die obere Lagerfläche zeichne man den Umriss $Q_2 L_2 P_2 P_1 Q_1$ mittelst der Fugenbrettung $G F B Q'' q''$; die andere Brettung $G F B T'' t''$ muss auf die untere Lagerfläche angelegt und nach ihr der Umriss $T_2 M_2 N_2 N_1 T_1$ gezeichnet werden. Endlich verbinde man auf der concaven Fläche des Cylinders die beiden Punkte P_2 und N_2 durch einen mittelst eines biegsamen Lineals gezeichneten Bogen. Nun muss der Arbeiter die Steinmasse, welche den Umriss $L_2 M_2 N_2 P_2$ der Wölbung überragt, wegnehmen, und hierauf die sphärische Fläche herstellen mittelst einer nach dem grössten Kreise $A'Z'$ ausgeschnittenen Lehre, die er über die beiden Bögen $L_2 M_2$ und $P_2 N_2$ hingleiten lässt. Diese mussten zuvor in die nämliche Anzahl gleicher Theile getheilt werden, um Punkte zu erhalten, deren je zwei eine Meridianebene bestimmen, in welche die Lehre gelegt werden muss. Fig. 3 u. 4.

§. 694.

Was das Auge ($E F G H$, $E'P'F'$) betrifft, so muss zuerst mit Hilfe des Winkeleisens ein Halbcylinder ausgehauen werden, dessen Basis $E_2 P_2 F_2$ dem Halbkreise $E'P'F'$, und dessen Länge der Geraden $F G$ gleich ist. Hierauf wird auf die untere Seitenfläche $E_2 F_2 G_2 H_2$ die Curve $E_2 I_2 F_2$ identisch mit dem Bogen $E I F$ eines grössten Kreises gezeichnet. Um nun die sphärische Wölbung innerhalb des Umrisses $E_2 P_2 F_2 I_2 E_2$ auszuarbeiten, bedient man sich einer nach einem grössten Kreise ausgeschnittenen Lehre, welche man so halten muss, dass sie, während sie über den Bogen $E_2 P_2 F_2$ hingleitet, beständig durch die Mitte I_2 des Bogens $E_2 I_2 F_2$ geht. Fig. 3 u. 5.

Gewölbe, durch Umdrehung um eine Vertikalaxe entstanden.

§. 695.

Alles, was in den §§. 680 und 681 gesagt wurde, lässt sich vollkommen auf jedes Gewölbe anwenden, Taf. 41. Fig. 1.
dessen innere Wölbungsfläche durch Umdrehung eines elliptischen, parabolischen oder jedes andern Bogens $A'L'M'$ um eine vertikale Axe entstanden ist, vorausgesetzt, dass der Bogen seine Concavität gegen die Umdrehungsaxe kehre. In allen diesen Fällen wird die ganze innere Wölbungsfläche durch Meridian- und Parallelkreise in einzelne Felder getheilt; die Stossfugen werden von den Meridianebenen gebildet, die Lagerfugen hingegen sind conische, durch Umdrehung erzeugte, Flächen, welche von den verschiedenen Normalen gebildet werden, die man durch alle Punkte eines jeden Parallelkreises auf die Gewölbefläche errichtet hat, wie in Fig. 1, wo der Meridian kreisförmig ist. Der einzige Unterschied, den der allgemeine Fall darbietet, besteht darin, dass die Scheitel der Kegelflächen in Beziehung auf die verschiedenen Parallelkreise in ungleichen Höhen auf der Axe $O'Z'$ liegen, während die Normalen des Meridians $A'L'Z'$ eben jene Axe in einem einzigen Punkte schneiden. Da aber dieser Unterschied durchaus keinen Einfluss auf die Form der Gewölbesteine hat, so wurde es für unnöthig erachtet, ihm eine besondere Figur zu widmen.

Die Behauung der Gewölbesteine geschieht nach einer von den in den §§. 683 und 684 angeführten

Methoden, weil die anderen Verfahrungsarten das Vorhandensein einer sphärischen Calotte voraussetzen. Für jede Steinschichte muss eine besondere Lehre angewendet werden, weil die Meridianbogen A′L′, L′M′, ... nicht mehr dieselbe Krümmung haben. Der Schlussstein muss nach §. 685 behauen werden.

§. 696.

Taf. 42. Fig. 6. Ein **ringförmiges Gewölbe** *(berceau tournant)* entsteht durch die Umdrehung des Halbkreises (A′M′B′, AB) um die Vertikale (O, O′Z′), welche in der Ebene des Halbkreises, aber ausserhalb des letztern liegt. Manchmal wendet man statt des Halbkreises A′M′B′ eine Halbellipse an. Die Eintheilung in Gewölbesteine geschieht wie oben, und die Lagerfugen sind wieder Kegelflächen, erzeugt durch Umdrehung um die Axe (O, O′Z′), auf welcher in Z′, Z″, ... ihre Scheitel liegen. Als Gewölbepfeiler dienen zwei cylindrische Mauern, deren Projectionen zwischen vier concentrischen Kreislinien enthalten sind, welche ganz ausgezogen werden müssen, wenn nicht ein gerades Tonnengewölbe sich längs des Meridians (A′M′B′, AB) an das ringförmige Gewölbe anschliessen soll. Die Vertikalebene stellt hier nicht eine Projection, sondern einen nach AB gemachten Durchschnitt dar; auf der Horizontalprojection, von welcher angenommen wird, sie werde von unten betrachtet, sind nur die unter dieser Voraussetzung sichtbaren Linien angegeben.

§. 697.

Die in §. 682 gemachte Bemerkung gilt auch für die äussere, von dem Bogen A′M′ beschriebene Hälfte des ringförmigen Gewölbes; diese Hälfte würde durch sich selbst im Gleichgewichte bleiben, auch wenn man den übrigen Theil des Gewölbes wegnähme. Nicht so verhält es sich mit der **innern** Hälfte, welche von dem der Umdrehungsaxe zunächst gelegenen Bogen B′N′ beschrieben wurde; denn die Gewölbesteine dieses Theiles, wie $NN_2P_2P_1$, streben durch ihr eigenes Gewicht über die conische Fuge P′Z′, von der Axe weg, hinabzugleiten, und dieses Bestreben kann durch den Druck der anliegenden Gewölbesteine nicht zurückgehalten werden, weil die Wölbungskante NN_2 eine breitere Oeffnung darbietet, als der Rückenbogen nn_2; bei einem Gewölbesteine LMM_2L_2 der äussern Hälfte hingegen ist die Oeffnung MM_2, durch welche er hinabzugleiten strebt, enger als der Rückenbogen mm_2.

Die Behauung der Gewölbesteine geschieht nach einer von den in den §§. 683 und 684 gegebenen Methoden. So interessant aber auch diese Gewölbeart ist, so wird hier doch nicht länger dabei verweilt, weil sie später (§. 775) noch einmal vorkommen wird, in Verbindung mit einem Conoid, wo alsdann Alles auf's Genaueste durchgenommen werden soll.

Elliptische, durch Umdrehung um eine horizontale Axe erzeugte Gewölbe.

§. 698.

Taf. 43. Fig. 1. Wenn man einen Raum, dessen Grundebene zwei ungleiche Dimensionen darbietet, durch ein einziges Gewölbe überdecken will, so muss man der innern Wölbungsfläche die Form eines Ellipsoides geben; um aber die graphischen Operationen zu vereinfachen, kann man ein solches Ellipsoid wählen, das durch Umdrehung um eine seiner horizontalen Axen entstanden ist: ist es die kleinere Axe, so erhält man ein übervolles, und wenn es die grössere Axe ist, ein gedrücktes Gewölbe. Hier wird die letztere Annahme vorgezogen; die Ellipse des Anlaufes ABDE wird um ihre grosse Axe AOD gedreht, um die innere Gewölbefläche zu erzeugen: die dritte Halbaxe dieses Ellipsoids ist O′Z′ = O′B′ auf der Vertikalebene, welche letztere hier einen nach BOE gemachten Schnitt darstellt. Der Rücken des Gewölbes wird durch ein dem

ersten ähnliches Ellipsoid gebildet, erzeugt durch Umdrehung der Ellipse X Y um A O D. Die Halbaxen dieser Ellipse sind mit O A und O B proportionirt, und daraus folgt, dass die Dicke des Pfeilers an den Scheiteln A und D beträchtlicher sein muss, als an den Scheiteln B und E, was ganz der Natur des Druckes gemäss ist, welcher in derjenigen Richtung, nach welcher das Gewölbe gedrückt ist, am stärksten wirkt.

§. 699.

Die erste Fugenreihe wird durch die Meridianebenen L′ O′ O, M′ O′ O, N′ O′ O, .. gebildet, welche den Aequator B′ Z′ E′ in eine ungerade Anzahl gleicher Theile theilen. Sie schneiden die innere Gewölbefläche in Ellipsen, die alle identisch mit A B D sind, deren Projectionen A M D, A N D, ... aber eine veränderliche Axe haben, welche man findet, wenn man die Punkte M′, N′, ... in M, N, ... auf B E projicirt. Eben diese ebenen Fugen schneiden auch den Rücken in Ellipsen, die mit X Y identisch sind; ihre Projectionen wurden aber auf der Horizontalebene weggelassen, welche nur das Gewölbe, als von unten gesehen, darstellt.

§. 700.

Um die Fugen der zweiten Reihe zu erhalten, theilt man zuerst die Halbellipse B A E des Anlaufes in eine ungerade Anzahl gleicher Theile und zieht durch die Theilpunkte Normalen F f, G g, ..., welche, indem sie sich mit der Ellipse um die Axe A D drehen, conische Flächen erzeugen: diess sind die gesuchten Fugenflächen, aber man muss sie von zwei zu zwei Meridianen unterbrechen und sie mit anderen conischen Fugen abwechseln lassen, welche durch die auf den Mitten der Bögen B F, F G errichteten Normalen beschrieben wurden. Da ferner die bis zum Punkte A verlängerten Meridiane daselbst zu spitzige Winkel bilden würden, so lässt man sie bloss bis zu dem Parallelkreise (G H, G′ z′ H′) gehen, und erfüllt den noch übrigen Raum durch einen einzigen Gewölbestein G H h g, der auch eine Art Auge *(trompillon)* bildet.

§. 701.

Da jeder der Gewölbesteine, wie z. B. derjenige, welcher M N P Q zur Wölbung hat, zwischen zwei Meridianebenen und zwei conischen, von Kreisen begrenzten Zonen enthalten ist, so kann man die in §. 683 gegebene Behauungsmethode auf ihn anwenden; man muss aber zur Basis des Prisma, aus dem der Gewölbestein gehauen werden soll, die Brettung der Vertikalprojection m′ n′ P′ Q′, und zur Länge die Entfernung der Parallelkreise M N und p q nehmen. Die beiden ebenen Fugen werden mittelst einer nach dem Meridianschnitte B F f Y verfertigten Brettung gezeichnet, und die Lehre, welche zur Behauung der Wölbungsfläche dieses Steines dienen soll, muss mit dem Ellipsenbogen B F zusammenfallen. Um das Auge darzustellen, muss man vorher ein Prisma ausführen, welches das Viereck G H h X g zur Basis hat, und dessen Höhe gleich g t ist. Hierauf zeichnet man auf die untere Basis den Ellipsenbogen G A H und auf die ebene Vorderfläche G H den Halbkreis G′ z′ H′; worauf man mittelst einer nach G A ausgeschnittenen Lehre die Wölbung aushöhlen kann. Zu Behauung der conischen Fuge wendet man eine nach A G g geformte Schmiege an (Fig. 9. Taf. 35); so nämlich, dass, während man den krummen Schenkel auf die bereits ausgehöhlte Wölbung in der Richtung eines Meridians anlegt, der geradlinige Schenkel mit der auszuführenden conischen Fläche zusammenfällt.

§. 702.

Die eben beschriebene Zurüstung kann bei kleineren Gewölben, deren grösste Dimension vier oder fünf Meter nicht übersteigt, angewendet werden, z. B. als Bedeckung der Seitenkapelle einer Kirche; bei grösseren Gewölben aber ist sie aus verschiedenen Gründen nicht zulässig. Für's Erste würde die Convergenz

der Wölbungskanten nach zweien im Anlaufe liegenden Punkten, als Decoration keinen angenehmen Anblick gewähren; da ferner die Anzahl dieser Linien ziemlich gross sein müsste und ihre Intervalle also Steine von keinem sehr grossen Volumen erforderten, so würden gegen die beiden Augen hin die Gewölbesteine so dünn werden, dass sie durch den allgemeinen Druck leicht zersprengt werden könnten; überdiess würden die grössten Steine am höchsten zu liegen kommen, was beleidigend für das Auge wäre, und endlich würde das Legen der Gewölbesteine in Schichten, die gegen den Horizont geneigt wären, grosse Schwierigkeiten verursachen. Man richtet daher Gewölbe von elliptischem Grundrisse gewöhnlich nach horizontalen Schichten zu, wobei aber wieder andere Schwierigkeiten wegen der spitzigen Winkel an den Fugen und Lagerflächen zu Tage kommen.

§. 703.

Taf. 43. Fig. 2. Es sei A B die Anlaufsellipse, welche durch Umdrehung um ihre grosse Axe A O ein Halbellipsoid erzeugt, das vertikal auf den Halbkreis B′ C′ D′ projicirt ist; diess ist die innere Fläche des Gewölbes. Um nun bei der Bildung der äussern Fläche den Bedingungen des §. 610 nachzukommen, zeichne man einen Kreis b′ c′ d′, dessen Mittelpunkt a′ unter O′ liege, und betrachte diesen Kreis als den Aequator eines zweiten Ellipsoides, das seinen Mittelpunkt in (O′ o′) habe, und dessen Axen O d, O a denen des ersten proportionirt seien. Hieraus folgt offenbar, dass alle Horizontalebenen den Gewölberücken in Ellipsen schneiden werden, die mit A B ähnlich sind. Die Mauer, welche das Gewölbe umschliesst, ist zwischen den beiden vertikalen Cylindern enthalten, deren Grundflächen die ähnlichen Ellipsen A B und X Y sind, damit die Mauerdicke gegen die Scheitel der grossen Axe hin zunehme, in welchen Richtungen der Gewölbedruck am stärksten ist. Nachdem man nun den Halbkreis B′ C′ D′ in eine ungerade Zahl gleicher Theile getheilt hat, lege man durch die Theilpunkte horizontale Ebenen, wie E′ G′ ε′, F′ H′ φ′, ..., welche die innere Wölbung in Ellipsen E G, F H,... schneiden, die der A B ähnlich sind, und die leicht aus den beiden Axen einer jeden construirt werden können. Diese aber findet man leicht; denn der Punkt E′ z. B. projicirt sich in E und bestimmt dadurch die Halbaxe O E; aus dieser aber erhält man die andere Halbaxe O G, indem man mit der Sehne B A die Parallele E G zieht.

§. 704.

Um die einer Wölbungskante (E G, E′ G′) entsprechende Lagerfuge zu bilden, wenden die Baumeister gewöhnlich einen Kegel an, der eben diese Kante zur Basis und einen gewissen Punkt der vertikalen Axe (O, O′ C′) zum Scheitel hat. Man muss sich aber sehr hüten, diesen Scheitel in den Mittelpunkt (O, O′) des Ellipsoids zu setzen, weil in diesem Falle die Erzeugende des Kegels zwar wohl normal auf dem vertikalen Schnitte O B der innern Wölbung wäre, aber in Beziehung auf die benachbarten Vertikalschnitte von O A eine sehr schiefe Lage hätte. Nimmt man dagegen die Erzeugende normal auf einen zwischen O B und O A liegenden Schnitt, z. B. auf O P, so werden die äussersten Winkel, welche sie bildet, nicht so sehr von 90^0 verschieden sein, und um diesen Unterschied schätzen zu können, muss man verfahren, wie folgt.

Alle durch die Vertikale O gelegten Ebenen schneiden das Ellipsoid in Ellipsen, welche eine gemeinschaftliche Axe (O, O′ C′) haben: man ziehe daher die Tangente Z′ E′ an den Kreis B′ C′ D′, klappe den Punkt (G, G′) in G_2 auf die Vertikalebene auf, und ziehe die Gerade G_2 Z′, so ist diese die Tangente am Punkte (G, G′) der in O G A projicirten Ellipse. Hierauf theile man den Winkel G_2 Z′ E′ in zwei gleiche Theile durch die Gerade Z′ P_2, und errichte auf letzterer die Senkrechte P_2 S'_1, so ist der Punkt (O, S'_1) der Punkt, den man zum Scheitel wählen muss für den Kegel, welcher die durch die Gewölbekante (E G,

E′ G′) gehende Fuge bilden soll. Projicirt man ferner den Punkt P_2 auf die Horizontalebene, und führt ihn alsdann in P auf die Ellipse E G zurück, so erhält man den Vertikalschnitt O P des Ellipsoids, auf welchem die Erzeugende der conischen Fuge normal ist (obgleich sie es nicht ist auf dem Ellipsoid selbst, s. §. 710); gegen die anderen Vertikalschnitte aber übersteigt ihre Schiefe nicht die Hälfte des Winkels G_2 Z′ E′. Durch ähnliche Operationen bestimmt man auch die Scheitel (O, S'_2), (O, S'_3), .. der conischen Fugen, welche durch die anderen Gewölbekanten (F H, F′ H′) gehen sollen.

§. 705.

Diese Anordnung gewährt einen für die Behauung der Gewölbesteine sehr wichtigen Vortheil, welcher darin besteht, dass jede der conischen Fugen den Gewölberücken in einer ebenen Curve schneidet, welche hier eine mit A B ähnliche Ellipse sein wird. Denn es schneidet die Erzeugende (O E, S'_1 E′) das äussere Ellipsoid in dem Punkte (e′, e); legt man nun durch diesen Punkt eine Horizontalebene, so schneidet diese die conische Fuge in einer mit E G ähnlichen Ellipse, die einen ihrer Scheitel im Punkte (e′, e) und ihren Mittelpunkt in (O, g′) hat. Dieselbe Horizontalebene aber muss auch das äussere Ellipsoid in einer Ellipse schneiden (§. 703), die mit A B und folglich auch mit E G ähnlich ist, und wieder ihren Scheitel in (e′, e) und ihren Mittelpunkt in (O, g′) hat. Diese beiden elliptischen Schnitte müssen also ganz zusammenfallen und liefern die dem Gewölberücken und der conischen Fuge gemeinschaftliche Linie. Um also diesen Durchschnitt (e l p g.., e′ l′ p′ g′..) zu zeichnen, darf man nur seine beiden Axen anwenden, deren eine O e unmittelbar bekannt ist und deren andere O g man findet, wenn man mit der Sehne A B eine Parallele zieht. Eben so zieht man, um den folgenden conischen Schnitt zu finden, den Halbmesser S'_2 F′ f′, welcher den Punkt f′, und sofort auch die Axe O f liefert, aus der man, wie oben, die zweite Axe der Ellipse (f m n..., f′ m′ n′...) erhält.

§. 706.

Die Stossfugen, durch welche eine und dieselbe Schichte, z. B. die zweite, in mehrere Gewölbesteine getheilt wird, erhält man mittelst vertikaler Ebenen L M, P N, ..., die auf der untern Ellipse E G normal sind; will man aber genauer verfahren, so muss man jene Ebenen normal nehmen auf der Mittellinie v x y der Wölbung, welche der Durchschnitt der innern Gewölbefläche mit einer durch die Mitte des Bogens E′ F′ gelegten Horizontalebene v′ x′ y′ ist. Dieser Durchschnitt, der eine mit A B ähnliche Ellipse ist, wird auf die oben angegebene Art construirt, mittelst des Scheitels (v′, v), den man aus dem Durchschnitte des Bogens E′ F′ mit der schneidenden Ebene v′ x′ y′ erhält.

Diese vertikalen Fugen nun schneiden die innere Gewölbefläche in elliptischen Bogen L′ x′ M′, P′ y′ N′, von denen man mindestens drei Punkte bestimmen muss aus den Durchschnitten der horizontalen Grundschnitte L M, P N mit den Ellipsen E L P, v x y, F M N; sie schneiden ferner den durch die Gerade S'_1 E′ e′ erzeugten conischen Schnitt in den hyperbolischen Bögen L′ t′ l′, P′ u′ p′, deren verschiedene Punkte man ebenfalls erhält aus der Combination der horizontalen Grundschnitte L l, P p mit den Ellipsen E L P, e l p, und einer dritten r t u, die sich aus dem Durchschnitte dieses Kegels mit der horizontalen Ebene r′ t′ u′ ergibt. Eben diese vertikalen Fugen schneiden endlich den durch S'_2 F′ f′ erzeugten conischen Schnitt in den Hyperbeln M′ m′, N′ n′, und die Rückenfläche des Gewölbes in den Ellipsen l′ m′, p′ n′; welche Curven alle wie oben construirt werden, mit Anwendung der Schnitte einer zwischen F′ und f′ liegenden Horizontalebene. Somit ist nun der in der zweiten Schichte liegende Gewölbestein genau bestimmt durch seine beiden Projectionen

M N p l und L′ M′ N′ P′ p′ l′ m′ n′.

§. 707.

Fig. 4. **Brettungen für die Häupter.** Diejenigen Seitenflächen des Gewölbesteines, welche in den vertikalen Ebenen M l und N p der Fig. 2 enthalten sind, kennt man nur aus ihren Projectionen in Fig. 3; um sie in ihrer wahren Grösse zu erhalten (Fig. 4), nehme man die Abscissen M m, M x, M L, M t, M l so gross als die Linien gleichen Namens auf der Geraden M l der Horizontalebene, und errichte die Ordinaten M M′, m m′, x x′, ... gleich den Höhen der entsprechenden Punkte auf Fig. 3, so erhält man leicht die Brettung L M′ m′ l′. Wendet man auf gleiche Weise die auf der Geraden N p der Horizontalebene gemessenen Abscissen an, so findet man die andere Brettung P N′ n′ p′, welche hier in eine beliebige Entfernung von der ersten gesetzt wurde.

§. 708.

Fig. 5. Die Behauung des Gewölbesteines geschieht aus dem Rechtwinkligen, indem man zuerst ein gerades Prisma ausführt, dessen Basis $l_2 M_2 N_2 p_2$ gleich der Horizontalprojection l M N p und dessen Höhe gleich der Entfernung der beiden Horizontalen E′ L′ P′, f′ m′ n′, auf Fig. 3. Hierauf legt man die beiden Brettungen der Fig. 4 an die Seitenflächen dieses Prisma an, und zeichnet die Umrisse L′ M′ m′ l′, P′ N′ n′ p′ der beiden Häupter des Gewölbesteines; mittelst eines biegsamen, an die Punkte M′ und N′ angelegten Lineals zeichnet man ferner die Curve M′ N′ auf die concave, und die Curve l′ p′ auf die convexe Cylinderfläche des Steines. Auf die beiden Grundflächen endlich zeichnet man die Curven L′ P′ und m′ n′, wobei man Lehren anwendet, die nach den elliptischen Bögen L P und m n der Fig. 2 ausgeschnitten sind. Nun behaut man die Wölbungsfläche mittelst dreier, nach den Ellipsenbögen L P, x y, M N der Fig. 2 ausgeschnittener Lehren, die man sorgfältig auf die entsprechenden Punkte der Curven L′ x′ M′, P′ y′ N′ anlegen und in horizontaler Lage erhalten muss. Man könnte zwar auch eine einzige, nach dem Meridiane B A ausgeschnittene Lehre anwenden; aber es wäre schwer, sie in der gehörigen Lage zu erhalten, weil die in den Vertikalebenen M L und N P enthaltenen Theile der verschiedenen Meridiane nicht identisch sind.

Was die obere Fuge betrifft, so ist sie eine Kegelfläche, welche dadurch ausgeführt wird, dass man ein Lineal über die beiden Curven M′ N′, m′ n′ hinführt, und zwar so, dass es stets durch die auf denselben bezeichneten Richtpunkte geht; letztere aber erhält man, wenn man in Fig. 2 vom Punkte O aus verschiedene Leitstrahlen zieht, welche die Ellipsen M N und m n schneiden. Eben so verfährt man in Beziehung auf die untere Fuge; die Rückenfläche aber erhält man mittelst concaver Lehren, die nach den Ellipsen l p, m n, und einer andern dazwischen liegenden Ellipse ausgeschnitten sind; gewöhnlich aber wird diese Seitenfläche roh gelassen, oder nur aus dem Groben gearbeitet.

Um den Schlussstein dieses elliptischen Gewölbes herzustellen, muss man auf die beiden entgegengesetzten und parallelen Seitenflächen des Steines die beiden Ellipsen der innern und äussern Wölbungsfläche zeichnen, und hierauf mittelst des Lineals den Kegelstumpf ausführen, welcher diesen Schlussstein umhüllt. Zur Aushöhlung der innern Wölbungsfläche braucht man drei Lehren, welche nach den in den vertikalen Ebenen O A, O B und einer dritten, einem dazwischen liegenden Durchmesser entsprechenden Ebene ausgeschnitten sind. Die erste dieser Ellipsen ist identisch mit dem Meridiane A B; die zweite fällt mit dem Kreise B′ C′ D′ zusammen, und die dritte lässt sich leicht daraus ableiten.

§. 709.

Fig. 2. **Zweite Methode für die Lagerfugen.** Wenn die beiden Axen O A und O B der Anlaufsellipse sehr ungleich sind, so würde der im §. 704 angewendete Kegel, dessen Erzeugende nur im Punkte (P, P′)

des vertikalen Schnittes O P normal ist, in Beziehung auf die äussersten Schnitte O A und O B noch immer ziemlich schief ausfallen. In diesem Falle thut man besser daran, die durch die Wölbungslinie (E G, E′ G′) gehende Fuge aus drei oder mehreren verschiedenen conischen Flächen zu bilden, welche von E bis G auf einander folgen. Man construirt, wie in §. 704, die drei Tangenten Z′ E′, Z′ P_2, Z′ G_2, und errichtet auf sie in den Punkten E′, P_2, G_2 Senkrechte; diese schneiden die Axe (O′ Z′, O) in den Punkten O′, S'_1, S''_1, welche die Spitzen dreier Kegel sein werden, deren erster von E bis L und I, der zweite von P bis L und R, der dritte von G bis R und ϱ angewendet werden kann.

Nun geht aber aus der bekannten Anordnung der Stossfugen in zwei auf einander folgenden Schichten hervor, dass die obere Fuge eines jeden Gewölbesteines der ersten Schichte einen Vorsprung bekommen muss, und zwar beim Uebergange von einem Kegel zum andern, wie solches in der perspectivisch gezeichneten Fig. 6 dargestellt ist. Eben so ist es mit den oberen Fugen der zweiten Schichte, welche in Berührung mit den unteren Fugen der dritten Schichte stehen. Die Gewölbesteine bekommen also viele einwärts springende Winkel, was immerhin ein Nachtheil ist, weil die Werkleute solche Winkel nicht so leicht und besonders nicht so genau ausarbeiten, als erforderlich ist; aber man lässt hier diesen Nachtheil zu, nur um dem viel schwerern Uebelstande allzu spitziger Theile auszuweichen, in welchen der Stein dem gegenseitigen Drucke der Gewölbesteine nicht gehörigen Widerstand leisten könnte.

§. 710.

Dritte Methode für die Lagerfugen. Der im §. 704 angewendete Kegel ist in Wahrheit nicht normal auf der innern Wölbungsfläche, selbst nicht im Punkte (P, P′), wo seine Erzeugende senkrecht auf der Tangente des vertikalen Schnittes O P angenommen wurde; denn es müsste diese Erzeugende zugleich auch noch senkrecht auf der Tangente des horizontalen Schnittes (E P G, E′ G′) sein. Ist daher das zu construirende Gewölbe von solcher Wichtigkeit, dass jene Bedingung völlig erfüllt werden sollte, so muss man verfahren, wie folgt.

Man nehme auf der Wölbungslinie (G ε, G′ ε') einen beliebigen Punkt (π, π') und construire an diesen die Normale des Ellipsoids: da nun diese Normale senkrecht auf der horizontalen Tangente sein muss, so wird sie sich auf die Normale $\pi\,\zeta$ der Ellipse G π ε projiciren; ihre vertikale Projection aber wird der Radius O′ π' sein, weil für jeden Punkt der Umdrehungsfläche die Normale die Axe schneiden muss, welche letztere hier in O′ projicirt ist. Nun suche man den Punkt (θ, θ'), wo jene Normale das Ellipsoid der Rückenfläche schneidet, welches auch durch Umdrehung entstanden ist, aber um eine andere Axe (O X, o′), und welches zum Meridiane eine Ellipse hat, deren Axen O d und O a mit O B und O A proportionirt sind. Taf. 43. Fig. 7.

Um diesen Punkt (θ, θ') zu erhalten, denke man sich durch die Normale ($\pi\,\zeta$, π' O′) eine Ebene senkrecht auf die vertikale Projectionsebene gelegt; diese schneidende Ebene O′ π' $6'$ schneidet die Rückenfläche in einer Ellipse, deren Mittelpunkt (ω, ω') man findet, wenn man die Senkrechte o′ ω' fällt, und deren eine Axe (ω' $6'$, ω 6) ist. Diese Ellipse aber ist dem Schnitte ähnlich, den die Parallelebene o′ V′ machen würde, und welcher o′ V′ und O a zu Axen hätte; zieht man daher die Sehne V a, und mit ihr parallel die Gerade 6 α, so bestimmt man hiedurch die beiden Axen $\omega\,\alpha$ und ω 6 der Ellipse, in welcher sich der mittelst der Ebene O′ $6'$ gemachte Schnitt projicirt. Construirt man sodann diese Ellipse 6 θ (oder nur den Bogen, welcher der Geraden $\pi\,\zeta$ zunächst liegt, was ganz leicht durch die Methode der Summe beider Halbaxen geschieht), so schneidet sie die Normale $\pi\,\zeta$ in dem gesuchten Punkte θ, den man sofort auch auf O′ π' in θ' projicirt.

Construirt man auf ähnliche Weise die Normalen des innern Wölbungsellipsoids für die Punkte (ε, ε'),

(λ, λ'), (π, π'), (ϱ, ϱ'), ... und sucht ihre Durchschnittspunkte (δ, δ'), (ψ, ψ'), (θ, θ'), (η, η'), ... mit der Rückenfläche, so bilden alle diese Normalen zusammen die Normalfuge, welche der Wölbungskante $(G\,\varepsilon,\ G'\,\varepsilon')$ entspricht. Diese Fuge ist offenbar eine windschiefe Fläche und endigt mit der Curve $(\delta\,\psi\,\theta\,\eta\,\gamma,\ \delta'\,\psi'\,\theta'\,\eta'\,\gamma')$ von doppelter Krümmung, in welcher sie die Rückenfläche schneidet.

§. 711.

Der Scheitelpunkt (γ, γ') dieser Curve kann nicht auf dieselbe Art erhalten werden wie die anderen Punkte, weil die Normale an (G, G′) in der senkrecht auf der Projectionsaxe stehenden Vertikalebene O A liegt; legt man aber diese Ebene um die Horizontale (O A, O′) um, so fällt der Punkt (G, G′) in den Punkt G″ der Meridianellipse A D, und zieht man nun an diese Curve die Normale G″ γ'', so ist diese die Aufklappung der ursprünglichen Normalen. Ferner schneidet die Vertikalebene O A die Rückenfläche in einer Ellipse, deren Mittelpunkt (O, o′) und deren Axen O a, o′ c′ sind; bei der oben angegebenen Umlegung nun fällt ihr Mittelpunkt in o″ und ihre Axen müssen parallel und gleich mit O a und O d werden; zeichnet man daher die umgeklappte Ellipse, oder nur den Bogen derselben, welcher G″ γ'' zunächst liegt, so wird letztere Gerade von dem elliptischen Bogen in dem gesuchten Punkte γ'' geschnitten. Nun darf man nur noch die Normale G″ γ'' um die Axe (O A, O′) in ihre ursprüngliche Lage zurückführen, so kommt γ'' in γ auf der Horizontalebene zu liegen; auf der Vertikalebene aber erhält man die Projection γ', indem man die Höhe O′ γ' gleich $\gamma\,\gamma''$ nimmt.

§. 712.

Fig. 7 u. 5. Für die andere Wölbungslinie $(H\,\varphi,\ H'\,\varphi')$ wird die Normalfuge wie in §. 710 construirt; diese beiden Lagerfugen werden von den Vertikalebenen $\mu\,\psi$, $\nu\,\theta$ in geraden Linien geschnitten, wodurch die Zeichnung der Hauptbrettungen des Gewölbesteines, analog denen der Fig. 4, noch leichter wird. Um den Stein zu behauen, muss man zuerst, wie in Fig. 5, einen Stein in Form eines geraden Prisma mit der Basis $\mu\,\psi\,\theta\,\nu$ herrichten, auf diesen die beiden Hauptbrettungen anlegen und die Ellipsenbögen L′ P′, M′ N′ wie in §. 708 zeichnen. Statt der ebenen Curve l′ p′ aber hat man hier eine Linie $(\psi\,\theta,\ \psi'\,\theta')$ von doppelter Krümmung, welche man durch Punkte auf der convexen Seitenfläche des Prisma construiren muss, oder welche man auch mittelst einer Brettung, welche die Entwicklung des vertikalen Cylinders $\psi\,\theta$ darstellt, zeichnen kann. Die andere Kante m′ n′ der Rückenfläche ist wieder eine Linie von doppelter Krümmung; man kann sie aber ersetzen durch den Durchschnitt der horizontalen und obern Seitenfläche des Prisma mit der windschiefen Fuge, welche man, auf Fig. 8, leicht bis zu jener horizontalen Ebene verlängern kann. Die Fugen, obgleich sie windschief sind, können wieder mittelst eines Lineals, das man an die Richtpunkte anlegt, behauen werden. Diese kurzen Andeutungen sind hinreichend für Leser, welche mit der darstellenden Geometrie vertraut sind; es wurde auch diese Methode hier mehr zur Uebung als für die Praxis gegeben, da die gewöhnlichen Steinhauer sie allzu mühsam finden und daher ihre Anwendung verschmähen würden, trotz des Vortheils, den sie durch Vermeidung spitziger Winkel bei den Lagerfugen gewährt.

Ellipsoidisches Gewölbe mit drei ungleichen Axen.

§. 713.

Taf. 44. Im allgemeinen Falle endlich, wo die innere Wölbungsfläche ein Halbellipsoid mit drei ungleichen Axen ist, sei A B D E die Anlaufsellipse, welche die grösste Axe O A = a und die mittlere O B = b enthält;

die kleinste Axe (O, O′ C′) ist vertikal und gleich c, so dass das Gewölbe also gedrückt erscheint. Fig. 2 stellt einen nach O B gemachten, und Fig. 3 einen nach O A gemachten vertikalen Schnitt dar. Die Rückenfläche sei wieder, wie in §. 703, ein dem ersten ähnliches Ellipsoid, dessen Mittelpunkt aber unterhalb O′ auf der Vertikalen O liege. Um nun hier die Bedingung vollkommen zu erfüllen, dass alle Fugen normal unter sich und auf der innern Wölbungsfläche seien (§. 584), nehme man als die beiden Reihen von Wölbungskanten die Krümmungslinien des Ellipsoids an, deren Eigenschaften in den §§. 721... 728 der darstellenden Geometrie erklärt wurden. Man muss also, nachdem man die Brennpunkte F, F_2, F_3 der drei Hauptellipsen bestimmt hat, die Hilfs-Ellipse und -Hyperbel $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ zeichnen, deren gemeinschaftliche Axen die Geraden

$$O\alpha = a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},\quad O\beta = b\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}$$

sind. Um die erste zu construiren, nehme man die Längen O f = O F, O f_3 = O″ F_3, und ziehe hierauf die Gerade A f_3 und ihre Parallele f α: die zweite Axe erhält man, indem man O f_2 = O′ F_2 nimmt, und hierauf B f_2 und ihre Parallele F β zieht. Nimmt man alsdann einen beliebigen Punkt h auf der Hyperbel $\alpha\beta$, und zieht die Coordinaten h H und h 2 dieses Punktes, so erhält man die beiden Halbaxen O H und O 2 der Ellipse H 2, welche die Projection einer Linie der ersten Krümmung darstellt; eben so erhält man aus einem beliebigen Punkte q der Ellipse $\alpha\beta$, und zwar durch seinen Coordinaten, die beiden Halbaxen O Q und O s der Hyperbel Q M, welche die Projection einer Linie der zweiten Krümmung ist.

Was die Fig. 2 betrifft, so muss man zuerst wieder die Hilfs-Ellipse und -Hyperbel $\alpha'\beta'$ und $\alpha'\gamma'$ zeichnen, deren gemeinschaftliche Axen die Geraden

$$O'\alpha' = c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},\quad O'\beta' = b\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}$$

sind, welche leicht construirt werden können, wie die Figur zeigt; ein Punkt t′ der Ellipse $\alpha'\beta'$ liefert alsdann, durch seine Coordinaten, die beiden Axen O′ H′ und O′ u′ der Hyperbel H′ 2′, in welcher hier eine Linie der ersten Krümmung sich projicirt, während jede Linie der zweiten Krümmung sich auf eben dieser Projectionsebene als eine Ellipse Q′ M′ projicirt, deren Axen man aus den Coordinaten eines auf der Hilfshyperbel $\alpha'\gamma'$ beliebig genommenen Punktes m′ erhält. Es ist ferner bekannt, dass (α, α') und (ω, α') die beiden Nabelpunkte (Darst. Geom. §. 724) sind, um welche herum das Ellipsoid eine nach allen Richtungen hin gleichförmige Krümmung zeigt, wie die Kugel.

§. 714.

Um aber der Aufgabe vom stereotomistischen Standpunkte aus zu genügen, darf man diese beiden Reihen von Wölbungslinien nicht nach Willkür zeichnen. Man muss zuerst die vertikale Halbellipse B′ C′ E′ in eine ungerade Anzahl gleicher Theile theilen, hierauf jeden Theilpunkt, wie 2′, auf den entsprechenden Punkt 2 der Horizontalebene beziehen, und alsdann die Coordinaten 2 h und h H der Hilfshyperbel zeichnen, wodurch die Axen der Ellipse 2 H bestimmt werden, in welcher diejenige Wölbungskante, die der betrachteten Schichte entspricht, sich projicirt. Um hierauf auch die Vertikalprojection dieser Wölbungskante zu erhalten, muss man den Scheitel H in H″ auf die Hauptellipse der Fig. 3 projiciren; und bezieht man nun diesen Punkt H″ auf H′ in Fig. 2, so erhält man die beiden Coordinaten H′ t′ und t′ u′ der Hilfsellipse, welche die Halbaxen der gesuchten Hyperbel H′ 2′ sind.

Nun theile man die horizontale Viertelsellipse A B in gleiche Theile B L, L M, M N, ..., projicire den Punkt M in M′, und ziehe durch letztern die beiden Coordinaten M′ m′ und m′ Q′ der Hilfshyperbel, welche

die Axen der Ellipse M′ Q′ sind. Nachdem man ferner den Scheitel Q′ auf den Punkt Q″ der Hauptellipse in Fig. 3 bezogen, projicire man letztern Punkt Q″ in Q, und ziehe die beiden Coordinaten O q und q s der Hilfsellipse, welche die Axen der gesuchten Hyperbel Q M sind.

Die Linien der zweiten Krümmung, wie (Q M, Q′ M′), dienen zur Bildung der Stossfugen und müssen wechselsweise, von einer Schichte zur andern, unterbrochen werden, während die Linien der ersten Krümmung, wie (2 H, 2′ H′), welche die Wölbungskanten bilden und den Lagerfugen entsprechen, stetig ausgezogen werden müssen. Diess Alles zeigt die Figur an denjenigen drei Vierteln des Ellipsoids, welche nicht zur Ausführung der bisherigen graphischen Operationen gedient haben.

§. 715.

Es war bis jetzt noch keine Rede von den Krümmungslinien auf der Projectionsebene der Fig. 3, weil diese Projection für die wirkliche Ausführung der vorliegenden Aufgabe nicht nöthig ist. Will man gleichwohl die graphische Darstellung vervollständigen, so muss man eine Hilfsellipse X″ Z″ ziehen, deren Axen

$$O'' X'' = a \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}}, \quad O'' Z'' = c \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}}$$

sind, und, wie die Figur zeigt, leicht construirt werden können. Nachdem man hierauf den Punkt 2′ auf U″ bezogen, ziehe man die Coordinaten U″ T″ und U″ 2″, welche die Axen der Ellipse T″ H″ 2″ sind, auf welche sich die Linie erster Krümmung (2 H, 2′ H′) projicirt. Was die Linie zweiter Krümmung (M Q, M′ Q′) betrifft, so projicirt sie sich auf eine Ellipse M″ Q″ e″, deren beide Axen man erhält, wenn man den Punkt M in M″ projicirt und hierauf die beiden Coordinaten M″ v″ und v″ e″ der Hilfsellipse zieht. Man sieht also, dass auf der Projectionsebene der Fig. 3 die Krümmungslinien beider Reihen sich alle als Ellipsen projiciren, an welchen die Sehne X″ Z″, welche die Hauptellipse A″ C″ selbst an der Stelle des Nabelpunktes α'' berührt, gemeinschaftliche Tangente ist.

§. 716.

Taf. 44. Von den Normalfugen. Man betrachte den Gewölbestein, welcher das krummlinige Viereck, das in $\lambda\,\mu\,\nu\,\pi$ (Fig. 1) projicirt ist, zur Wölbungsfläche hat, und dessen Seiten im Raume sich nach der bekannten Eigenschaft der Krümmungslinien (Darst. Geom. §. 688) unter rechten Winkeln schneiden. Zuerst nun muss man die Berührungsebene des Ellipsoids im Punkte (λ, λ') construiren; diese geht durch die beiden Geraden, deren horizontale und vertikale Projectionen die Tangenten an den Curven $\lambda\,\mu$, $\lambda\,\pi$, und $\lambda'\,\mu'$, $\lambda'\,\pi'$ sind; diese Tangenten aber sind leicht zu zeichnen, weil die genannten Curven Kegelschnitte sind, deren beide Axen man kennt. Hierauf ziehe man, senkrecht auf diese Berührungsebene, die Normale ($\lambda\,\varrho$, $\lambda'\,\varrho'$), und suche deren Durchschnitt (ϱ, ϱ') mit der Rückenfläche. Zu letzterem Zwecke muss man durch die Gerade ($\lambda\,\varrho$, $\lambda'\,\varrho'$) eine auf der vertikalen Projectionsebene senkrechte Ebene legen, welche die Rückenfläche in einer Ellipse schneidet, deren beide Axen durch Vergleichung mit denen des durch den Mittelpunkt gemachten Parallelschnittes, wie in §. 710, gefunden werden; der Durchschnitt dieses elliptischen Schnittes aber mit der Normalen liefert den gesuchten Punkt (ϱ, ϱ').

Verfährt man auf ähnliche Art in Beziehung auf die durch die verschiedenen Punkte φ, μ, ... der Wölbungskante gezogenen Normalen, so bestimmt man hiedurch die dieser Kante entsprechende Lagerfuge, welche eine entwickelbare Flächenzone sein wird (Darst. Geom. §. 685), die zwischen der Curve ($\lambda\,\mu$, $\lambda'\,\mu'$), der Rückenflächencurve und zweien Geraden enthalten ist. Eben so findet man die obere, der Wölbungskante ($\pi\,\nu$, $\pi'\,\nu'$) entsprechende Fuge und die beiden Stossfugen, welche durch die Linien ($\lambda\,\pi$, $\lambda'\,\pi'$),

($\mu\nu$, $\mu'\nu'$) gehen; und diese vier Fugen stehen offenbar rechtwinklig auf *einander*, während sie zugleich normal auf der innern Wölbung sind.

§. 717.

Von der Behauung des Gewölbesteines. Man arbeitet aus dem Rechtwinkligen; zuerst wird ein gerades Prisma (§. 633) hergestellt, dessen Basis der Horizontalprojection des Gewölbesteines gleich ist, und dessen Höhe hinreicht, um die Vertikalprojection desselben Steines in sich aufzunehmen. Nun verlängere man die vier Fugen herab, *bis sie* die Seitenflächen des Prisma schneiden, und trage die Durchschnittscurven auf den Stein, so kann man die vier Seitenflächen, welche die Fugen enthalten, mittelst eines einfachen Lineals behauen, weil sie entwickelbare Flächen sind. Auf diese Seitenflächen lege man sodann die verstreckten Fugenbrettungen an, und zeichne nach ihnen die Umrisse der Wölbung und der Rückenfläche, falls man letztere auch behauen will; die Wölbungsfläche wird mittelst mehrerer Lehren ausgeführt, welche man nach verschiedenen Vertikalschnitten des innern Ellipsoids ausgeschnitten hat.

§. 718.

Gegen die Nabelpunkte hin muss man gewöhnlich einige Fugen weglassen und zwei Gewölbesteine zu *einem* vereinigen, damit die Steine mehr Dicke bekommen und also den gehörigen Widerstand leisten können; in Fig. 1 und 3 ist diess um den Punkt (ω, ω'') herum angedeutet.

Für die practische Anwendung taugt diese Aufgabe nicht wohl, weil die Zeichnung des Risses allzu weitläufige graphische Operationen erfordert; dagegen ist sie dem Leser als ein Beispiel zur Uebung in der Stereotomie zu empfehlen, und eben desshalb wurden in den §§. 716 und 717 nur kurze Andeutungen über die Ausführung gegeben. Sollen die gewöhnlichen Baumeister ein elliptisches Gewölbe mit drei ungleichen Axen construiren, so wenden sie die auf Taf. 43 (Fig. 2 und 3) dargestellte Zurüstung an, mit der im §. 709 angegebenen Abänderung, wegen der unterbrochenen conischen Fugen, deren Anzahl sie noch grösser nehmen, als dort.

Fünftes Kapitel.

Durchdringung der Gewölbe.

Kreuzgewölbe und Klostergewölbe.

§. 719.

Ein Kreuzgewölbe wird von zwei sich schneidenden Tonnengewölben gebildet, welche dieselbe Anlaufsebene und Höhe haben. Die beiden Cylinder der inneren Wölbungsflächen schneiden sich, wie gleich bewiesen werden wird, in zwei ebenen Curven, welche in den Vertikalebenen liegen, die man durch die Diagonalen des von den inneren Pfeilerwänden gebildeten Parallelogramms gelegt hat. Damit aber dieser Umstand wirklich stattfinde, muss noch vorausgesetzt werden, dass die Grund- oder Leitlinien beider Cylinder Curven vom zweiten Grade seien. — Nachdem man die Horizontalebene so gewählt hat, dass sie parallel ist Taf. 45.

mit den Erzeugenden beider Cylinder, schneide man jeden derselben durch eine Vertikalebene, welche parallel ist mit den Erzeugenden des andern, so erhält man die beiden Ellipsen A′ Z′ B′ und A″ Z″ B″, deren vertikale Axen O′ Z′ und O″ Z″ einander gleich sind. Nun wird irgend eine beliebige Horizontalebene M′ m′ beide Cylinder in vier Erzeugenden schneiden, deren Projectionen L′ M, l′ m, L″ M, l″ m sich in vier Punkten treffen, die auf den Diagonalen C E und D F liegen. Denn die Punkte M′ und M″, zum Beispiel, deren Ordinaten M′ L′ und M″ L″ gleich sind, haben Abscissen A′ L′ und A″ L″, welche den ungleichen Axen A′ B′ und A″ B″ proportionirt sind; hieraus aber folgt:

Fig. 1, 2 u. 3.

$$C\lambda : \lambda M = CD : DE,$$

aus welcher Proportion hervorgeht, dass die drei Punkte C, M, E in gerader Linie liegen. Eben so kann man beweisen, dass der Punkt m mit F und D in gerader Linie liegt, woraus denn folgt, dass alle, den beiden Cylindern gemeinschaftlichen Punkte sich auf die Diagonalen C E und D F projiciren, oder auch, dass der Durchschnitt beider Cylinderflächen aus zwei Aesten besteht, welche in den durch jene Diagonalen gelegten Vertikalebenen liegen.

§. 720.

Es ist wohl zu bemerken, dass im Vorhergehenden nirgends gesagt wurde, der Winkel, welchen die Erzeugenden beider Cylinder gegen einander bilden, müsse ein Rechter sein. Es gilt also der im vorigen Paragraphen geführte Beweis und die Schlussfolgerung auch für zwei Tonnengewölbe, welche sich schief schneiden (Fig. 6), vorausgesetzt, dass man, in Uebereinstimmung mit der oben ausgesprochenen Regel, für einen Augenblick als Grundlinien beider Cylinder die Schnitte annehme, welche man mittelst der vertikalen und den Erzeugenden parallelen Ebenen C F und C D gemacht hat; denn diese Schnitte sind ebenfalls Ellipsen, welche dieselbe vertikale Axe haben, und in welchen die Abscissen C λ und C L wieder mit den horizontalen Axen C D und C F proportionirt sind.

§. 721.

Ferner, wenn als Grundbogen für das erste Tonnengewölbe irgend eine Curve A′ Z′ B′ gegeben ist, die auch ein Korbbogen (§. 608) oder ein Spitzbogen sein darf, so kann man leicht finden, was für einen Grundbogen das zweite Tonnengewölbe erhalten müsse, damit der Durchschnitt beider eine in der vertikalen Diagonalebene C E liegende Curve sei. Man zieht verschiedene Erzeugende M′ M, N′ N, ... bis zu jener Diagonale, und von hier aus rückwärts in der Richtung M M″, N N″, ...; die letzteren Geraden verlängert man über die Projectionsaxe A″ B″ hinaus, und zwar so, dass die Verlängerungen den Ordinaten der Anfangspunkte M′, N′, .. gleich seien, wodurch man eben so viele Punkte M″, N″, ... des gesuchten Bogens erhält. Man bemerke aber, dass, wenn A′ Z′ B′ ein Korbbogen ist, alsdann die Curve A″ Z″ B″ nicht genau von demselben Geschlechte sein wird: sie wird vielmehr eine Linie sein, die aus mehreren elliptischen, sich an einander anschliessenden Bögen besteht.

§. 722.

Das eigentliche Kreuzgewölbe nun hat zum Zwecke, den gemeinschaftlichen Theil zweier Gänge zu überdecken, welche sich schneiden und deren Mauern von C bis D, von F bis E, und ebenso von C bis F und von D bis E unterbrochen sind, damit eine völlig freie Verbindung dieser Gänge stattfinde. Da ihre Breiten hier ungleich sind, so entsteht, statt eines quadratischen, ein längliches Gewölbe, und um es graphisch zu construiren, beschreibe man über dem Durchmesser A′ B′ einen vertikalen Halbkreis, und über

dem Durchmesser A″ B″ eine Halbellipse, deren vertikale Axe dem Halbmesser O′ A′ gleich sei; diese beiden Curven nun sind die geraden Schnitte der beiden Cylinder, welche die innere Wölbung bilden, und welche sich (§. 719) in zwei Ellipsen schneiden, deren Projectionen die Diagonalen C E und D F sind. Nachdem man ferner den Halbkreis A′ Z′ B′ in eine ungerade Anzahl gleicher Theile getheilt und auf der Ellipse die Punkte M″, N″, ... bemerkt hat, welche beziehungsweise dieselbe Höhe haben, wie M′, N′, ..., so ziehe man die Erzeugenden beider Cylinder, welche von diesen correspondirenden Punkten ausgehen und sich, zu zweien, in den Punkten M, m, N, n, ... schneiden müssen, welche genau in den Diagonalen C E und D F liegen. Wegen der Unterbrechung der Pfeiler aber muss man alle inneren Abschnitte dieser Erzeugenden, wie M m, N n, $M M_2$, $m m_2$, ..., weglassen, so dass die Dreiecke C O F und D O E nur von dem kreisförmigen, und die Dreiecke C O D und F O E nur von dem elliptischen Tonnengewölbe überdeckt werden. Ferner sieht man, dass die aus dem Zusammentreffen jener Erzeugenden gebildeten Winkel ihre Spitzen gegen den im Mittelpunkte O des Gewölbes stehenden Beobachter kehren, so dass die innere Wölbungsfläche demselben also zwei durch die Diagonalellipsen gebildete vorspringende Gräten darbieten wird.

§. 723.

Das Klostergewölbe wird angewendet, um einen ganz geschlossenen Raum, z. B. den rectangulären Saal C D E F (Fig. 5) zu überdecken; es wird aus denselben Tonnengewölben construirt, wie das Kreuzgewölbe, aber es werden hier die Abschnitte M m, $M M_2$, ... der Erzeugenden, welche oben weggelassen wurden, heibehalten, und dagegen diejenigen weggelassen, welche man oben beibehielt. Aus dieser neuen Combination ergibt sich, dass die innere Wölbungsfläche dem Beobachter zwei einwärts springende Gräten darbieten müsse, welche durch die, hier abermals auf die Diagonalen C E und D F projicirten Durchschnittsellipsen erzeugt werden. Ueber die Art, wie bei diesem und dem ihm sehr analogen vorigen Gewölbe die Fugen gebildet und die Gewölbesteine behauen werden, wird bei Gelegenheit der Taf. 46 die Rede sein, auf welcher Gewölbesteine der einen und der andern Art vorkommen. Hier muss nur noch, um die verschiedenen Arten der Punktirung auf Taf. 45 zu rechtfertigen, bemerkt werden, dass man die Projectionen 3 und 5 als von unten gesehen annimmt, und dass die Figuren 1, 2, 4 Schnitte durch beide Gewölbe darstellen, was durch die Schraffirungen angedeutet wird. Fig. 1, 4, 5.

Tonnengewölbe mit rechtwinkliger Wiederkehr.

§. 724.

Man betrachte zwei Gänge, welche sich treffen, aber sich nicht weiter fort verlängern, sondern eine rechtwinklige Wiederkehr in den Richtungen A′ C A″ und B′ E B″ bilden. Um sie zu überdecken, wende man ein erstes Tonnengewölbe an, dessen gerader Schnitt der Halbkreis A′ Z′ B′ ist, und alsdann ein zweites Tonnengewölbe, das die Ellipse A″ Z″ B″ zum geraden Schnitte hat, und dessen vertikale Axe O″ Z″ gleich O′ Z′ ist. Der Durchschnitt beider Wölbungscylinder besteht aber hier nur aus einem einzigen, auf die Diagonale C E (§. 719) projicirten Ast; weil, bei der gegebenen Form der Pfeiler, keiner von jenen Cylindern über die Eintrittscurve hinaus verlängert werden darf. Nachdem man nun den Halbkreis A′ Z′ B′ in eine ungerade Anzahl gleicher Theile getheilt hat, bilde man die Lagerfugen mittelst der Ebenen O O′ M′, O O′ N′, ... welche durch die Axe des Tonnengewölbes bis zum Cylinder der Rückenfläche gehen, dessen gerader Schnitt Q′ P′ z′ p′ q′ .. nach §. 610 construirt werden muss. Was das gedrückte Tonnengewölbe betrifft, so muss man, nachdem man die Punkte M″, N″, ... bemerkt hat, welche sich mit den Punkten M′, N′, ... in derselben Taf. 46.

Höhe befinden, die Normalen M″ Q″, N″ P″, ... der Ellipse construiren, was leicht mittelst der Kreistangenten geschehen kann. Denn weil der Durchschnitt beider Cylinder eine in der Vertikalebene CE liegende Curve ist, so muss auch seine Tangente, welche der Durchschnitt der beiden Berührungsebenen M′ T′ T und M″ T″ T ist, in eben jener Vertikalebene liegen: die horizontalen Grundschnitte der Berührungsebenen aber müssen sich in einem auf der Diagonale CE liegenden Punkte T schneiden. Nachdem man also die Gerade T T′ bis zu ihrem Durchschnitte T mit CE verlängert hat, ziehe man durch letzteren Punkt parallel mit C A″ die Gerade T T″; diese liefert den Punkt T″, den man mit M″ verbinden muss, um die gesuchte Tangente M″ T″ zu erhalten, aus welcher sich sofort auch die Normale M″ Q″ ergibt. Dieses Verfahren lässt sich auch aus den bekannten Relationen zweier Ellipsen mit gemeinschaftlicher vertikaler Axe beweisen; denn die auf den ungleichen Axen solcher Ellipsen genommenen Subtangenten O′ T′ und O″ T″ sind eben diesen Axen proportionirt, während sie, auf der gemeinschaftlichen Axe genommen, einander gleich sind. Die Anwendung letzterer Relation ist bequemer für den Punkt N″; denn zieht man die Tangente an den Kreis N′ S′, und nimmt O″ S″ = O′ S′, so ist die Gerade S″ N″ die Tangente der Ellipse, aus welcher man sofort auch die Normale N″ P″ erhält.

§. 725.

Um nun die Fugen des gedrückten Gewölbes zu bilden, muss man durch jede Normale M″ Q″, N″ P″, .. und die ihr entsprechende Erzeugende M″ V M, N″ X N, .. eine Ebene legen; diese Fugen werden alsdann normal auf der innern Wölbung sein, nach der ganzen Länge der Erzeugenden, weil die Ellipse A″ Z″ B″ der gerade Schnitt des Cylinders ist. Da aber die Stabilität des Gewölbes es verlangt, dass die Theile beider Tonnengewölbe, welche, in jeder Schichte, an den Gratbogen CMNE stossen, je aus Einem Steine bestehen, so ist es zweckmässig, jede der Fugen M″ Q″, N″ P″, ... in derselben Höhe zu begrenzen, wie die entsprechende Fuge des ersten Tonnengewölbes (in der Figur ist dieses angedeutet); die Reihe der Punkte z″, P″, Q″, ..., welche durch diese verschiedenen Normalen bestimmt werden, bildet alsdann eine Curve, welche der gerade Durchschnitt der cylindrischen Rückenfläche des zweiten Tonnengewölbes ist. Da ferner die beiden in Q′ und Q″ projicirten Horizontalen sich in einem Punkte schneiden, dessen Projection Q ist, so stellt also M Q den Durchschnitt der beiden oberen Fugen der ersten Schichte dar; in der zweiten Schichte ist N P dieser Durchschnitt, u. s. f. Verbände man nun alle die Punkte Q, P, O, p, q durch einen stetigen Zug, so erhielte man die Projection der Curve, in welcher beide Rückencylinder sich schneiden; es ist aber unnöthig, diese Curve zu ziehen, da man sich nie die Mühe nimmt, die Rückenfläche der Gewölbsteine zu behauen. *)

*) Man könnte die Rückenfläche des zweiten Tonnengewölbes so wählen, dass ihr Durchschnitt mit der des ersten eine in der Vertikalebene CE liegende Curve würde. In diesem Falle dürfte jede Erzeugende, wie Q′ Q, nicht weiter als bis zu ihrem Durchschnitte R mit der Diagonale CE verlängert werden; durch diesen Punkt R müsste man alsdann die Gerade R R″ ziehen, und solche bis zu einem Punkte R″ verlängern, der gleiche Höhe mit Q′ hätte. Auf diese Art erhielte man die elliptische Curve z″ R″ als geraden Schnitt des Rückencylinders, und wenn man nun die Fuge M″ Q″ bis I″ verlängerte, so würde sie die correspondirende Fuge M′ Q′ in der auf M Q I projicirten Geraden schneiden. Da jedoch die Breite der letztern Fuge im ersten Tonnengewölbe sich nur bis zur Horizontalen Q′ R erstreckt, so muss man ihr noch den elliptischen Bogen R I anfügen, in welchem sie den Rücken des zweiten Gewölbes schneidet, so dass also der äussere Umriss beider Fugen durch WIRL dargestellt wird. Diese Form ist zwar etwas verwickelter als ZQL, aber die Dicke der Gewölbewinkel in dem gedrückten Gewölbe, wo der Druck am grössten ist, würde durch sie vermehrt werden.

§. 726.

Was die **Stossfugen** betrifft, welche dazu dienen, eine und dieselbe Schichte in mehrere Gewölbesteine zu theilen, so werden sie durch Ebenen gebildet, welche, wie L G K H, Z V Y X, .. senkrecht auf den Erzeugenden stehen, und welche von zwei zu zwei Schichten mit einander abwechseln müssen, wie die Figur es andeutet. So erhält man alsdann das Vieleck L Q Z X N H L als die Horizontalprojection eines der Steine, welche den Gewölbegrat C M N E bilden, und auch nur mit diesen hat man es hier zu thun; denn die anderen Steine, welche nicht an beiden Gewölben Theil nehmen, sind, wie die eines **geraden Thores** (§. 613), sehr leicht auszuführen.

§. 727.

Betrachtet man den Gewölbestein, dessen Häupter $m'n'p'q'$ und $m''n''p''q''$ sind, und der horizontal in l q z x n h l projicirt ist, so wird man wahrnehmen, dass die beiden cylindrischen Wölbungsflächen, welche sich in dem Ellipsenbogen m n schneiden, eine rückwärts springende Ecke bilden, so dass also dieser Gewölbestein einem **Klostergewölbe** (§. 723) angehört. Denselben Charakter zeigt die ganze Hälfte des Gewölbes von O bis E. Von O bis C aber bietet es den Anblick eines **Kreuzgewölbes** dar (§. 722). Der Gewölbestein L Q Z X N H L gehört also einem Kreuzgewölbe an, und es soll nun die Behauungsweise der beiden in L Q Z X N H L und l q z x n h l projicirten Steine gezeigt werden.

§. 728.

Verstreckte Brettungen. Man bezeichne auf dem Bogen $M'N'$ einen oder mehrere Punkte, wie α', ziehe die entsprechenden Erzeugenden, wie 6α, und mache die Geraden $G_2 6_2$, $6_2 H_2$ der Fig. 4 den Längen der rectificirten Bögen $M'\alpha'$, $\alpha' N'$ gleich. Hierauf errichte man die Ordinaten Fig. 1, 3, 4.

$$G_2 M_2 = GM,\ 6_2 \alpha_2 = 6\alpha,\ H_2 N_2 = HN$$

und ziehe sofort durch die Punkte M_2, α_2, N_2 eine Curve, welche die Verwandelte des in $M\alpha N$ projicirten elliptischen Grates sein wird, so erhält man die Brettung $G_2 M_2 \alpha_2 N_2 H$ als Entwickelung der auf G M N H projicirten Wölbungsfläche. Nimmt man hierauf die Distanzen

$$G_2 L_2 = M'Q',\ L_2 Q_2 = LQ,\ H_2 K_2 = N'P',\ K_2 P_2 = KP,$$

so stellen die beiden Trapezien $G_2 M_2 Q_2 L_2$ und $H_2 N_2 P_2 K_2$ die beiden anliegenden Kanten der genannten Wölbungsfläche in ihrer wahren Grösse dar. Man könnte auf ähnliche Art die Brettungen der Wölbungsfläche V M N X und der anliegenden Fugen, welche demselben Gratsteine angehören, zeichnen; aber man bedarf derselben zur Behauung dieses Gewölbesteines nicht.

§. 729.

Was den entgegengesetzten Gewölbestein x n h l q z betrifft, so sind die Brettungen der dem Halbkreisgewölbe angehörigen Wölbung und ihrer anliegenden Fugen in Fig. 5 dargestellt. Um sie zu erhalten, hat man wieder die Abscissen

$$l_2 g_2 = m'q',\ g_2 \varrho_2 = m'\lambda',\ \varrho_2 h_2 = \lambda' n',\ h_2 k_2 = n'p'$$

genommen, und hierauf die Ordinaten

$$l_2 q_2 = lq,\ g_2 m_2 = gm,\ \varrho_2 \lambda_2 = \varrho\lambda,\ h_2 n_2 = hn,\ k_2 p_2 = kp$$

errichtet.

Wegen der Symmetrie, welche zwischen den beiden vor und hinter O liegenden Theilen des Gewölbes

stattfindet, ist der Umriss $q_2 m_2 \lambda_2 n_2 p_2$ der Fig. 5 identisch mit dem der Fig. 4, und von den Brettungen beider Systeme ist die eine die Verlängerung der andern; nur sind die Ränder, welche im ersten Falle concav sind, im andern convex, und umgekehrt.

§. 730.

Taf. 46. Fig. 6. Behauungsmethode aus dem Rechtwinkligen. Man denke sich ein gerades Prisma (§. 633), das die Horizontalprojection L H N X Z Q L (Fig. 3) des zu behauenden Gewölbesteines zur Basis habe, und dessen Höhe gleich sei der Höhendifferenz der Punkte M' und P' auf Fig. 1. Hierauf wähle man einen Steinblock aus, der dieses Prisma fassen kann, und richte die obere Basis her, um den Umriss L H n X Z q l (Fig. 6) identisch mit dem gleichnamigen Vieleck (Fig. 3) darauf zu zeichnen; endlich führe man, mittelst des Winkeleisens, auch die Seitenflächen des Prisma aus. Auf die vordere Seitenfläche nun trage man den Umriss M' N' P' Q' mittelst einer nach Fig. 1 ausgeschnittenen Brettung; diese muss hier aber so angelegt werden, dass der untere Theil nach oben zu liegen komme, weil in Fig. 6 der Gewölbestein verkehrt angenommen wird, um die wichtigsten Seitenflächen besser herauszuheben; auch kann der Arbeiter den Stein in dieser Lage am bequemsten behauen. Ferner zeichne man auf die Seitenfläche X Z Z' X' mittelst einer nach Fig. 2 ausgeschnittenen Brettung den Umriss M'' N'' P'' Q'', aber so, dass die Ecken N'' und Q'' die Höhen X N'' = H N', und Z Q'' = L Q' erhalten; hierauf ziehe man die Horizontalen M' M und M M'', Q' Q und Q Q'', P' P und P P'', N' N und N N''.

Nun kann man die durch den Bogen M' N' gehende cylindrische Wölbung vermittelst einer convexen Lehre ausführen, die man nach eben diesem Bogen ausgeschnitten hat, und welche man über die beiden Geraden M' M' und N' N' so hinführt, dass sie immer die in gleichen Entfernungen von M' und N' genommenen Richtpunkte zugleich trifft. Man kann aber auch bloss ein Lineal anwenden, wenn man sich die Mühe genommen hat, den dem Haupte M' N' P' Q' entgegengesetzten und parallelen Umriss zu zeichnen. Hat nun diese cylindrische Fläche die gehörige Länge, so legt man die aus biegsamem Carton verfertigte Brettung $G_2 M_2 N_2 H_2$ der Fig. 4 auf sie an, und zeichnet nun nach der Form, welche der Rand $M_2 N_2$ annimmt, die Grenzlinie M α N, in welcher die Wölbung des kreisförmigen Tonnengewölbes sich endigen soll. Die andere Wölbungsfläche M'' M N N'' kann man, ohne eine elliptische Lehre, einfach mittelst eines Lineals ausführen, dessen Kante man über die nun bekannten Leitlinien M N und M'' N'' hingleiten lässt, indem man es stets parallel mit M'' M hält. Will man lieber nach genau bestimmten Richtpunkten arbeiten, so erhält man aus Fig. 4 den Punkt α_2 oder α, welcher dem Punkte α'' auf einer und derselben Lage der geradlinigen Erzeugenden entspricht.

Die obere Fuge (welche hier unten ist, weil der Gewölbestein in umgekehrter Lage sich befindet) ist eine Ebene, welche durch drei bekannte Gerade geht; man kann sie daher leicht ausführen, und ist diess geschehen, so lege man die Brettung $H_2 N_2 P_2 K_2$ auf sie an und zeichne nach dieser die Grenzlinie N P; nun kann auch die andere obere Fuge N P P'' N'', welche gleichfalls eben ist, leicht ausgeführt werden. Von den beiden unteren Fugen M' M Q Q' und M'' M Q Q'', welche ebenfalls eben sind, aber einen einwärts gehenden Winkel bilden, muss man die erste so weit behauen, bis man die Brettung $G_2 M_2 Q_2 L_2$ (Fig. 4) genau auf sie anlegen kann; und hat man hiedurch die Grenze M Q bestimmt, so kann man nun auch die zweite der genannten Fugen ohne Schwierigkeit herstellen.

Da die beiden Rückenflächen Cylinder sind, welche durch die Leitcurven P' Q' und P'' Q'' gehen, so lassen sich aus dem Vorhergehenden leicht die Mittel ausfindig machen, durch welche sie genau behauen werden können. Gewöhnlich aber werden sie nur, nach dem blossen Augenmasse, aus dem Groben gehauen,

oder man begrenzt sogar den Gewölbestein durch die Horizontalebene P′ P P″ Z′ q′ L′, die man auch nur aus dem Gröbsten herstellt.

Diese Methode liefert die genauesten Resultate; da sie aber einen bedeutenden Zeitverlust verursacht, indem mehrere Seitenflächen behauen werden müssen, die nachher wieder zerstört werden, so ziehen die Steinhauer folgende Methode vor.

§. 731.

Behauung mittelst des Schrägmasses. Hier werden die beiden cylindrischen Wölbungsflächen des Gewölbesteines vorerst durch platte Wölbungsflächen ersetzt, d. h. durch Ebenen, welche durch die Wölbungskanten M G und N H, M V und N X (Fig. 3) gelegt werden. Die erste dieser platten Wölbungsflächen schneidet die Vertikalebene G H in der Sehne M′ N′ des Bogens M′ α' N′ (Fig. 1), und die zweite schneidet das Haupt V X in der Sehne M″ N″ (Fig. 2); der Durchschnitt dieser beiden platten Wölbungsflächen aber ist eine in M N projicirte Gerade, welche die Sehne des in der vertikalen Ebene C E liegenden elliptischen Gratbogens ist. Da es nun nothwendig ist, das genaue Mass des zwischen beiden platten Wölbungsflächen enthaltenen Flächenwinkels zu erhalten, so klappe man die Vertikalebene C E um ihren horizontalen Grundschnitt um, ziehe die Ordinaten M μ', N ν' und mache sie gleich denen der Punkte M′, N′, so ist die Gerade $\mu' \nu'$ die Aufklappung der fraglichen Sehne. Auf eben dieser Hilfsebene C E projiciren sich auch die beiden Wölbungskanten N H und N X in der Horizontalen $\nu' \xi'$. Legt man nun durch einen beliebigen Punkt φ' eine Ebene φ' D′ senkrecht auf die Sehne $\mu' \nu'$, so schneidet diese Ebene die platten Wölbungsflächen in einem Winkel, dessen Schenkel die Wölbungskanten in den Punkten (D′, D) und (D′, δ) treffen, während die um die Horizontale (D δ, D′) aufgeklappte Spitze φ' dieses Winkels in (φ, φ'') zu liegen kommt; mithin ist D φ δ die wahre Grösse des Winkels, der die Neigung der beiden platten Wölbungsflächen misst. Taf. 46.

Man wähle nun *einen* Steinblock aus von gehöriger Grösse, und arbeite auf demselben eine ebene Seitenfläche aus, auf welche man den Umriss M M′ N′ N der platten Wölbungsfläche zeichnet. Dieser Umriss ist ein Trapez, dessen beide Winkel M′ und N′ Rechte sind, und dessen Seiten alle nach ihrer wahren Grösse bekannt sind, nämlich: M′ N′ auf Fig. 1, M M′ und N N′ durch die Längen M G und N H der Fig. 3, und die vierte Seite M N durch die Länge der Ellipsensehne $\mu' \nu'$. Hierauf lege man durch die Gerade M N eine zweite Ebene M N N″ M″, welche mit der ersten einen Winkel bildet, gleich dem Neigungswinkel der beiden platten Wölbungsflächen; hiezu bedient man sich eines Schrägmasses, dessen zwei Schenkel den ebenen Winkel D φ δ (Fig. 3) fassen, und das während der Behauung immer so gehalten werden muss, dass seine Ebene normal auf der Kante M N ist. Auf diese zweite Seitenfläche zeichne man alsdann das Trapez M N N″ M″, dessen beide Winkel M″, N″ Rechte, und dessen Seiten M M″, N N″ durch die Längen M V, N X der Fig. 3 gegeben sind, während die Seite M″ N″ der gleichnamigen Sehne auf Fig. 2 gleich sein muss. Fig. 7.

Ist diess geschehen, so lege man ferner durch die Gerade M′ N′ eine Ebene, welche winkelrecht auf der platten Wölbung M′ N′ N M steht, und auf diese neue Seitenfläche lege man die Brettung des Hauptes M′ α' N′ P′ Q′, die man aus Fig. 1 erhalten hat, an. Eben so führe man durch die Kante M″ N″ eine auf der andern platten Wölbungsfläche senkrechte Ebene aus, und lege auf letztere die Brettung M″ α'' N″ P″ Q′ des zweiten Hauptes, die man aus Fig. 2 erhalten hat. Nun kann man leicht die vier Fugen behauen, welche Ebenen sind und für deren jede man zwei Gerade als Leitlinien kennt. Die Grösse dieser Fugen wird durch die Brettungen der Fig. 4 bestimmt. Die Aushöhlung der cylindrischen Wölbungsflächen endlich geschieht

nach §. 730, und was die Rückenflächen betrifft, so behandelt man dieselben so, wie am Schlusse des eben genannten Paragraphen angegeben ist.

§. 732.

Taf. 46. Fig. 3. Gewölbesteine zum Klostergewölbe. Nach §. 727 ist einer der Gewölbesteine dieser Art horizontal in x n h l q z projicirt, und seine in den Vertikalebenen h l und x z liegenden Häupter sind durch m′ n′ p′ q′ und m″ n″ p″ q″ in ihrer wahren Grösse dargestellt. Ferner wurde (in §. 729) gezeigt, wie die in Fig. 5 dargestellten Brettungen für die Fugen und die entwickelte Wölbungsfläche zu construiren seien. Hat man also ein gerades Prisma ausgeführt, dessen Basis das Vieleck x n h l q z ist, so lege man die Brettungen der Häupter auf die beiden vertikalen Seitenflächen h l und x z, und führe die Fugen und cylindrischen Wölbungen durch die nämlichen Hilfsmittel aus, wie in §. 730.

Eine besondere Figur hiefür wurde für unnöthig erachtet; man bemerke nur, dass, da die beiden cylindrischen Wölbungen hier einen einwärts gehenden Winkel darstellen, man die erste (deren gerader Schnitt der Kreisbogen m′ λ′ n′ ist) so weit ausarbeiten müsse, bis man die in biegsamem Carton ausgefertigte Brettung $g_2 m_2 n_2 h_2$ (Fig. 5) genau in die Concavität dieser Fläche einlegen kann: diese Vorsicht ist nöthig, um den Ellipsenbogen genau zu erhalten, der diese Wölbungsfläche begrenzen und den Grat des Gewölbesteines bilden soll. Diejenige Wölbungsfläche, welche m″ λ″ n″ zum senkrechten Schnitte hat, wird leicht, mittelst eines Lineals, ausgeführt, das man an jenen und den Gratbogen anlegt: man könnte zu letzterer Operation auch ein festes Winkeleisen anwenden, dessen beide Schenkel sich zugleich auf die Bögen der beiden Häupter anlegten, was zugleich eine Probe für die richtige Ausführung der ersten Wölbungsfläche wäre.

§. 733.

Vom Schlusssteine. Der Schlussstein der Figur auf Taf. 46 wird eben so behauen, wie der Gewölbestein in §. 732, indem man sich wieder der Wölbungsbrettung bedient, um die Grenze N O n zu bestimmen, bis zu welcher die cylindrische, dem Kreisbogen-Gewölbe angehörige Fläche reichen soll.

Bei dem Schlusssteine auf Taf. 45 (Fig. 3) wird zuerst die cylindrische Wölbung X Y y x, welche dem Kreisbogen-Gewölbe angehört, nach ihrer ganzen Länge behauen; hierauf zeichnet man die beiden Gratbögen des Schlusssteines mittelst einer Lehre, welche man nach der elliptischen Krümmung des Gratbogens ausgeschnitten hat, und welche man nach einander in die Vertikalebenen der beiden Diagonalen setzt; nun lässt sich die zweite, dem elliptischen Gewölbe angehörige Wölbungsfläche leicht mittelst eines Lineals ausführen.

Der Schlussstein Fig. 5 der Taf. 45 erfordert mehr Vorsicht, weil er vier einwärts gehende Winkel darbieten soll. Nachdem man auf die platte Wölbungsfläche das Rechteck $N N_2 n_2 n$ und seine Diagonalen gezeichnet hat, haut man längs dieser Diagonalen und stets in den durch sie bestimmten Vertikalebenen bleibend, zwei kleine Rinnen aus, und gibt ihnen eine solche Wölbung, dass man eine convexe Lehre, die man nach dem Muster des elliptischen Gratbogens gegen den culminirenden Punkt hin ausgeschnitten hat, hineinlegen kann. Hierauf behaut man, mit Anwendung zweier oder dreier kurzer Lineale, die nicht über die Länge der Erzeugenden hinausreichen, die vier Cylinderstücke, welche in den beiden schon ausgeführten Gratbögen sich vereinigen.

§. 734.

Taf. 47. Fig. 1. Bemerkung 1. Ein Kreuzgewölbe kann sich nicht im Gleichgewichte erhalten, wenn nicht alle

Schichten vom Anlaufe bis zum Schlusssteine *(inclusive)* ohne Unterbrechung vorhanden sind, während ein Klostergewölbe wohl bestehen kann, wenn man den Schlussstein und einige der angrenzenden Schichten weglässt. Letzterer Fall ist in Fig. 1 dargestellt; der obere leer gelassene Theil wird hier durch ein Fensterwerk geschlossen, das dem Tageslicht den Eingang zu dem Saale gestattet, den das Gewölbe überdeckt. Letzteres ist übervoll; denn der gerade Schnitt des ersten Tonnengewölbes wird von zwei Kreisbögen gebildet, die aus den Mittelpunkten x und y mit demselben Halbmesser beschrieben sind. Das zweite Tonnengewölbe aber ist identisch mit dem ersten, weil der Grundriss des ganzen Gewölbes ein Quadrat ist; wäre es anders, so ist in §. 721 angegeben worden, wie man das zweite Tonnengewölbe aus dem ersten herzuleiten hat, um beim Durchschnitte beider ebene Gratbögen zu erhalten. Um die Gewölbesteine der letzten Schichte im Gleichgewichte zu erhalten, muss man die Stossfugen wie beim scheitrechten Bogen (§. 597) construiren; für die unteren Schichten bedarf es dieser Vorsicht nicht, weil die durch das Gewicht der oberen Gewölbesteine auf die Lagerfugen hervorgebrachte Reibung sie am Herabgleiten hindert. — Man könnte dieses abgestumpfte Gewölbe auch durch einen Plafond schliessen, dessen Steine alsdann wie beim scheitrechten Bogen angeordnet werden müssten.

§. 735.

Bemerkung 2. Ein Klostergewölbe kann, eben so wie ein Kreuzgewölbe (§. 720), schräge sein; und eines wie das andere kann über einem unregelmässigen Vielecke von beliebiger Seitenzahl errichtet werden. Wenn z. B. die Mauern mehrerer Gänge bei ihrem Zusammentreffen durch die Durchschnitte ihrer inneren Wände das Vieleck A B C D bilden, so wähle man nahezu in der Mitte einen Punkt, und verbinde ihn mit den Mitten aller Seiten durch die Geraden O X, O Y, O Z, O V: handelt es sich, wie hier, um ein Viereck, so nimmt man den Punkt O im Durchschnitte der beiden Transversalen X Z und Y V, welche die Mitten der entgegenstehenden Seiten verbinden. Denkt man sich nun vier Ellipsen, welche dieselbe vertikale Axe und die Seiten A B, B C, C D, D A zu horizontalen Axen haben, so werden die vier verschiedenen Cylinder, deren Leitlinien eben jene Ellipsen und deren Erzeugende beziehungsweise parallel mit O X, O Y, O Z, O V sind, sich zu zweien in ebenen Curven schneiden (§. 720), deren Projectionen die Geraden O A, O B, O C, O D sind. Auf diese Art erhält man ein Kreuzgewölbe mit vier ungleichen Gewölbeseiten, das den ganzen von dem Vielecke A B C D umschriebenen Raum bedeckt. Da aber die Gerade O X im Allgemeinen nicht parallel mit den Mauern A A′, B B′ des ersten Ganges ist, so muss man von der Vertikalebene A B an die Erzeugenden des Cylinders O X brechen, wodurch man ein Gewölbe O X O′ erhält, welches dem auf Taf. 46 analog ist. In Beziehung auf die anderen Gänge muss man ähnliche Operationen anwenden. Taf. 47. Fig. 2.

Was die Eintheilung in Gewölbesteine oder die Zurüstung des Gewölbes betrifft, so geschieht dieselbe gewöhnlich auf folgende Art. Man zeichnet den geraden Schnitt A′ X′ B′ des ersten Ganges und nimmt, wenn man will, für diese Curve einen Halbkreis an. Hieraus leitet man sofort die geraden Schnitte A″ V″ D″, ... der anderen Gänge ab, wobei man allen diesen Ellipsen dieselbe vertikale Axe gibt, und vollendet die Zurüstung jedes Tonnengewölbes wie in den §§. 724 und 725. Ferner sucht man den geraden Schnitt des Tonnengewölbes O X, indem man eine Vertikalebene A X senkrecht auf diese Richtung legt und eine Halbellipse zeichnet, deren Axen A x und x x′ = O′ X′ sind. Auf letztere Curve bezieht man alsdann die Eintheilung des Bogens A′ X′ B′, construirt die Normalen der Ellipse A x′, und legt durch jede derselben und durch die entsprechende Erzeugende eine Ebene, so bestimmt diese jedesmal eine Fuge. Für eine und dieselbe Schichte schneiden die Fugen sich zu zweien in Geraden, welche auf der Figur nicht angegeben sind, die aber der Leser leicht, wie in §. 725, finden kann.

Kreuzgewölbe mit doppeltem Gratbogen und abgestumpften Seiten.

§. 736.

Taf. 47. Fig. 3. Um die spitzigen Theile zu vermeiden, welche bei einem vielfachen Kreuzgewölbe die Pfeiler und auch die innere Wölbungsfläche gegen den Anlauf hin darbieten, kann man eine abgestumpfte Seite $A B_2$ anwenden, welche einen zwischen den Hauptgewölben eingefügten Cylinder trägt. Die Erzeugenden dieses Cylinders sind parallel mit der nach Belieben gezogenen Geraden $A B_2$ und sein orthogonaler Schnitt ist eine Ellipse $a' z'$, deren horizontale Halbaxe $o' a'$ dem von O auf $A B_2$ gefällten Perpendikel gleich ist; ihre Höhe $o' z$ ist gleich $O' Z'$. Dieses kleine Tonnengewölbe nun schneidet die beiden Cylinder $A' Z' B'$ und $A'_2 Z'_2 B'_2$ in zwei auf die Geraden O A und $O B_2$ projicirten Viertelsellipsen, wodurch also zwei auswärts springende Gräte erzeugt werden, die von demselben Pfeiler ausgehen. Alles aber, was in den vorhergehenden Beispielen über die Theilung in Gewölbesteine und über die Bestimmung der Normalfugen gesagt wurde, lässt sich auch hier auf dieselbe Weise anwenden. Man bemerke nur, dass derjenige Theil der innern Wölbungsfläche, welcher auf $C D N N_2 F E M_2 M C$ projicirt ist, aus einem einzigen Steine hergestellt werden muss, so dass also dieser zusammengesetzte Gewölbestein an den drei Cylindern Theil nimmt, und drei Wölbungsflächen und sechs Fugen hat, welche entweder durch Behauung aus dem Rechtwinkligen (§. 230) oder mittelst des Schrägmasses (§. 731) ausgeführt werden können. Der in Fig. 4 dargestellte Schlussstein wird durch ähnliche Mittel, wie in §. 733, hergestellt: man behaut zuerst ein sechskantiges Prisma und legt auf die Seitenflächen desselben die Brettungen der Häupter an.

Kreuzgewölbe mit doppeltem Grat und Strebebögen.

§. 737.

Taf. 47. Fig. 5. Statt alle Gratbögen eines Kreuzgewölbes in einem Punkte zusammenlaufen zu lassen, lässt man sie häufig, zu zweien, in den Ecken eines Parallelogramms V X Y Z zusammenlaufen, das den Punkt O zum Mittelpunkt hat, und dessen Seiten den Diagonalen A C und B D gleich sind. Man denke sich daher, ausser den beiden Haupt-Tonnengewölben, noch einen Hilfscylinder, parallel mit der Diagonale B D, dessen orthogonaler Schnitt eine Viertelsellipse $a' x'$ sei, deren horizontale Halbaxe $a' x$ gleich sei der von A auf V X gefällten Senkrechten, und deren andere Halbaxe $x x'$ gleich $O' I'$ sei. Dieser Hilfscylinder schneidet die beiden ersten Gewölbe in Ellipsen (§. 720), welche sich in den Geraden A X und A V projiciren. Eben so schneidet ein zweiter Hilfscylinder, dessen gerader Schnitt die Viertelsellipse $c' y'$ ist, beide Tonnengewölbe in den auf die Geraden C Y und C Z projicirten Ellipsen; und zwei auf dieselbe Weise, in einer der Diagonale A C parallelen Richtung, construirte Cylinder endlich schneiden die beiden Tonnengewölbe in vier Ellipsen, welche sich auf B X und B Y, D Z und D V projiciren. Auf diese Art entstehen vier zwischen den Tonnengewölben liegende Räume, deren Projectionen die Dreiecke V A X, X B Y, Y C Z, Z D V sind. Da aber hiedurch der Zwischenraum V X Y Z leer bliebe, so muss man ihn durch ein plattes Gewölbe schliessen, das aus einem einzigen Gewölbesteine, in Form eines Schlusssteines, bestehen kann, wenn das Parallelogramm von geringer Grösse ist; wenn nicht, so theile man den Abschnitt $x' y'$ in drei Theile $x' \alpha'$, $\alpha' \beta'$, $\beta' y'$, deren beide äussere gleich sein müssen, und deren mittlerer den Gewölbestein bestimmen wird, dessen Wölbung das ganz ebene Parallelogramm $\alpha \beta \gamma \delta$ ist, und dessen Fugen durch Ebenen gebildet werden, die etwas gegen die Vertikale geneigt sind. Man kann diesem Schlusssteine auch einen mehr oder minder beträchtlichen Vorsprung über die innere Wölbungsfläche, zur Aufnahme einer Rosette oder sonstigen Deckenzierrathes, geben. Die um den

Schlussstein herumliegenden und den Bögen n′ x′ α′, ... entsprechenden Gewölbesteine bekommen eine theils cylindrische, theils platte Wölbungsfläche. Aus einem einzigen Steine aber müssen die Theile der innern Wölbung, wie

KRPQSTUWδK und EFNPGHLME

geformt werden. Die den Kanten KR, QS, ... entsprechenden Lagerfugen sind Vertikalebenen. Dagegen werden die durch PQ, PN, ... gehenden Fugen durch Ebenen gebildet, welche normal auf den entsprechenden Cylindern stehen. Die Durchschnitte dieser Fugen wurden hier nicht angegeben; sie können aber leicht, wie auf Taf. 46, gefunden werden. Die Behauung der Gewölbesteine geschieht nach §§. 730 und 731.

Gerades Gewölbeauge in einem Tonnengewölbe.

§. 738.

Ein Gewölbeauge *(lunette)* entsteht bei der Durchdringung zweier Tonnengewölbe, welche ungleiche Höhe, gewöhnlich aber einerlei Anlauf haben; der Gratbogen oder die Durchschnittslinie beider Cylinder ist hier nicht mehr eben, wie beim Kreuzgewölbe, sondern eine Linie von doppelter Krümmung. Da ferner die Theilpunkte beider Hauptbögen hier nicht mehr in einerlei Höhe genommen werden können, weil dadurch die Wölbungsflächen des grösseren Tonnengewölbes zu ungleiche Breiten erhalten würden, so müssen in der Verbindung der Wölbungskanten beider Gewölbe einige Abänderungen vorgenommen werden. Taf. 48.

Es sei a′ l′ m′ n′ b′ der gerade Schnitt des kleinen Tonnengewölbes, dessen Axe die Horizontale O o′ ist, und A″ L″ M″ N″ ... sei der gerade Schnitt des grösseren Gewölbes; dieser ist hier auf die vertikale Projectionsebene aufgeklappt, muss aber, bei den hier anzustellenden geometrischen Untersuchungen, stets in die senkrecht auf der Axe $O O_2$ des zweiten Gewölbes stehende Vertikalebene zurückgeführt gedacht werden. Zuerst zeichne man die Zurüstung des letzteren Gewölbes, das heisst, die Theilung in gleiche Bögen A″ L″, L″ M″, ... die Normalfugen und die Rückenfläche (§. 610); hierauf theile man den Grundbogen des kleineren Gewölbes in eine ungerade Anzahl gleicher Theile, aber so, dass der erste Theilpunkt l′ tiefer zu liegen komme, als L″: diese Bedingung ist sehr wesentlich, damit die Fugenschnitte, welche auf der innern Wölbungsfläche des grössern Gewölbes sichtbar werden, nicht einen unangenehmen Anblick darbieten. *) Endlich construire man die Normalschnitte und den Rücken des kleinen Gewölbes wie gewöhnlich. Alle diese Operationen würden auf eine ähnliche Art ausgeführt werden, auch in dem Falle, wenn die geraden Schnitte beider Cylinder keine Kreise wären.

§. 739.

Die Horizontalprojection A l m n B des Durchschnittes beider inneren Gewölbeflächen erhält man, indem man beide Cylinder durch verschiedene Horizontalebenen, wie l′ l″, m′ m″, n′ n″ schneidet; denn letztere Ebene schneidet das kleine Gewölbe in der Erzeugenden (n′, e n), und das grosse in einer Erzeugenden, welche sich auf den Punkt n″ in der Aufklappung (Fig. 2) projicirt, und welche, auf die Horizontalebene bezogen, die Gerade E n gibt; der Durchschnitt der Geraden e n und E n aber liefert einen Punkt n der

*) Wenn l′ tiefer ist, als L″, so folgt hieraus offenbar Aehnliches in Beziehung auf m′ und M″, n′ und N″, ... und alsdann schneiden alle Fugen des kleineren Gewölbes die innere Fläche des grossen; wäre aber l′ höher als L″, so würde es bald geschehen, dass einer der folgenden Punkte n′ tiefer als N″ zu liegen käme, und es würden daher die Fugenschnitte bald auf dem kleinen, bald auf dem grossen Gewölbe sichtbar werden, welche Unregelmässigkeit das Auge beleidigen müsste.

gesuchten Curve, und die übrigen werden auf dieselbe Art erhalten. *) Diese Curve A l m n B gehört einer gleichseitigen Hyperbel an, wie in §. 625 erwiesen wurde; der andere Ast C n_1 D derselben (Fig. 4) ist die Projection der Austrittscurve, wenn beide Cylinder sich ganz durchdringen. Vertikal projiciren sich diese Ein- und Austrittscurven auf den Kreis a' n' b'.

§. 740.

Da nun die Wölbungskante n' des kleinen Gewölbes tiefer liegt, als die Kante N'' des grossen, so schneidet die Fugenebene p' n' o' o die innere Fläche des grossen Gewölbes in einem Ellipsenbogen n N, der sich bis zu der Wölbungskante N'' hin erstreckt; den Endpunkt N desselben erhält man mittelst einer Horizontalebene N'' N', welche den grossen Cylinder in der Erzeugenden F N und die Fugenebene p' o' o in der Geraden f N schneidet. Jeder andere zwischen N und n liegende Punkt kann wieder durch eine schneidende Horizontalebene gefunden werden; man bemerke aber, dass diese Ellipse, verlängert, ihren Scheitel in o erreichen würde, weil diess der Durchschnittspunkt der unbestimmten Ebene p' o' o mit der im Anlaufe liegenden Erzeugenden A_2 A B ist.

Vom Punkte N an schneidet die Fuge p' n' die Fuge N'' P'' des grösseren Gewölbes in einer Geraden N P, deren Endpunkt P ebenfalls mittelst einer schneidenden Horizontalebene P'' P' gefunden wird; verlängert würde diese Gerade P N offenbar durch den Punkt O gehen, in welchem sich die Axen O o' und O O_2 der Gewölbe schneiden, weil diese Axen die horizontalen Grundschnitte der Fugenebenen p' o' o und P'' N'' O'' sind. Im allgemeinen Falle, wo die Gewölbe nicht im vollen Bogen wären, könnte man sehr leicht diese beiden horizontalen Grundschnitte finden.

Die Fuge N'' P'' des grösseren Gewölbes endigt in der Horizontalen, in welcher sie die Rückenfläche schneidet, und folglich ist F N P G ihre Horizontalprojection; die Fuge n' p' P' aber schneidet zuerst eben diese Rückenfläche in einem elliptischen Bogen P p, dessen Punkte man mittelst schneidender Horizontalebenen, wie p' p'', findet, und hierauf schneidet sie den Rücken des kleinen Gewölbes in einer Geraden p h, so dass die Fuge n' p' den Umriss e n N P p h zur horizontalen Projection hat.

Nach allem diesem wird es dem Leser nicht schwer sein, die Form der anderen, den Geraden m' q' und M'' Q'', l' v' und L'' V'' entsprechenden Fugen aus der Figur herauszufinden, auch wird er bemerken, dass die Curve y p q der Durchschnitt beider Rückenflächen ist. Da nun aber diejenigen Theile beider Gewölbe, welche, wie e n N R, an dem Gratbogen A l m n B liegen, aus einem einzigen Steine bestehen sollen, so muss man die Steine des Gewölbeauges durch Vertikalebenen e g, R S, ... begrenzen, welche in den gehörigen Entfernungen anzubringen sind, damit nicht Steine von einem allzugrossen Volumen erforderlich werden. Die zwischen K R und K_1 R_1 enthaltenen Gewölbesteine gehören nur einem einzigen Gewölbe an und können ohne Schwierigkeit construirt werden. Sie wurden auf der Horizontalebene desshalb nicht dargestellt, damit das, was sich auf das Gewölbeauge bezieht, um so deutlicher heraustrete. Es ist endlich noch zu bemerken, dass die ganze Horizontalprojection (Fig. 3 und 4) als von unten gesehen angenommen wird, woraus sich die verschiedenen Arten der Punktirung auf der Figur erklären werden.

*) In der Praktik reducirt diese Methode sich auf folgendes Verfahren: man nimmt die Distanz des Punktes n'' von der in A'' errichteten vertikalen Tangente und trägt sie von der Geraden A B an auf die unbestimmt lange Projection n' e n. Dieses Verfahrens hat man sich auch bei der Figur auf Taf. 36 bedient, mit welcher die hier behandelte Aufgabe vieles Analoge und selbst Gemeinschaftliche hat. Dasselbe Verfahren lässt sich auch auf die Fugen anwenden, von welchen die Rede sein wird.

§. 741.

Verstreckte Brettungen. Um die innere Wölbung des kleinern Gewölbes zu entwickeln, rectificire man die Bögen $a'l'$, $l'm'$, $m'n'$, ... des orthogonalen Schnittes, und trage ihre Längen auf die Geraden $a_2 l_2$, $l_2 m_2$, $m_2 n_2$; hierauf errichte man die Ordinaten $a_2 a_3$, $l_2 l_3$, $m_2 m_3$, ... und mache sie gleich den Distanzen der Punkte A, l, m, n, .. von der Projectionsaxe $a'b'$; endlich zeichne man die Curve $a_3 l_3 m_3 n_3$..., welche die Verwandelte des auf A l m n ... projicirten Gratbogens darstellt. Hiedurch erhält man die Wölbungsbrettungen, wie $m_2 m_3 n_3 n_2$, in ihrer wahren Grösse. Taf. 48. Fig. 5.

Was die Fugen betrifft, z. B. diejenige, welche auf $n_2 n_3 N_3 P_3 p_3 p_2$ projicirt ist, so werden sie construirt, indem man die Abscissen

$$n_2 N_2 = n'N', \quad n_2 P_2 = n'P', \quad n_2 p_2 = n'p'$$

nimmt, hierauf die Ordinaten $N_2 N_3$, $P_2 P_3$, $p_2 p_3$ errichtet und sie gleich den Distanzen der Punkte N, P, p von der Projectionsaxe $a'b'$ macht. Eben so könnte man auch die Wölbungsbrettungen und die Fugen des grössern Gewölbes construiren, was aber für die nun folgende Operation unnöthig ist.

§. 742.

Behauung der Gewölbesteine. Man betrachte z. B. den Gewölbestein, dessen Haupt $m'n'p'q'$ auf Fig. 1 ist. Nachdem man ein gerades Prisma (§. 633) ausgehauen, dessen Basis gleich der horizontalen Projection g e n N R S .. dieses Gewölbesteines ist, lege man auf die vordere und auf die Nebenseitenfläche dieses Prisma (Fig. 6) die beiden, den Fig. 1 und 2 entnommenen Brettungen $m'n'p'q'$, $M''N''P''Q''$ (es wird hier vorausgesetzt, der Gewölbestein sei umgekehrt, damit man die Wölbungsfläche sehen kann); hierauf führe man, wie in §. 730, die cylindrische Wölbung $n'm'mn$ und die beiden Fugen des kleinen Gewölbes aus, und lege auf diese Flächen die entsprechenden Brettungen der Fig. 5, um die Grenzen m n, m M, Q q, .. zu bestimmen. Ist diess geschehen, so behaue man die Wölbungsfläche und die Fugen des grössern Gewölbes, deren Umrisse nun alle bekannt sind. Die Rückenfläche kann mittelst concaver Lehren ausgeführt werden; meistens aber wird sie nach dem blossen Augenmasse nur aus dem Groben gehauen. Fig. 6.

§. 743.

Bemerkungen. 1) Da die Form der Rückenfläche ziemlich gleichgültig ist, so kann man die Fugen vereinfachen, wenn man sie, zu zweien, in derselben Horizontalebene $Q''Q'$, $P''P'$ endigen lässt. Alsdann verschwinden die Curven P p, Q q aus der Fig. 3, und jede Fuge hat eine Projection, wie e n N P g. In diesem Falle reducirt die sichtbare Fuge auf Fig. 6 sich ebenfalls auf $m'mMQQ'$.

2) Bei der in §. 738 angegebenen Zurüstung werden die Fugen des kleinen Gewölbes sichtbar auf der innern Fläche des grossen, indem sie letztere in den Ellipsenbögen m M, n N, ... schneiden, welche die Gleichförmigkeit der Abtheilung nach Schichten unterbrechen und die Symmetrie der architektonischen Dekoration stören. Um diesem Fehler zu entgehen, könnte man die Theilungen des grössern Gewölbes in die Punkte l'', m'', n'' versetzen, welche beziehungsweise dieselbe Höhe haben, wie l', m', n'; alsdann würden die Wölbungskanten sich zu zweien auf dem windschiefen Gratbogen A l m n B schneiden, wie bei dem Kreuzgewölbe auf Taf. 45, und die Fugen wären nicht mehr sichtbar auf der innern Wölbungsfläche. Auf diese Art würden freilich die Breiten $A''l''$, $l''m''$, $m''n''$ der Wölbungsflächen des grössern Tonnengewölbes bis zum Punkte n'' abnehmen, von welchem an die folgenden Wölbungsflächen alle gleich der letzten $m''n''$ gemacht würden; aber dieser Fehler würde fast unmerklich werden, wenn beide Gewölbe fast die nämliche

Höhe hätten, und im entgegengesetzten Falle würde man den Anlauf des kleinern Gewölbes in eine solche Höhe versetzen, dass der Scheitel z' nur um etwa 15 oder 20 Centimeter unter Z'' zu liegen käme. Letzteres Mittel wendet man öfters an, z. B. in dem Schiff einer Kirche, welche man durch Seitenfenster, die in der Höhe des Gewölbes angebracht werden sollen, erleuchten will; alsdann besteht der Gratbogen A l m n B (Fig. 3) 1) aus einer Linie von doppelter Krümmung, welche der Durchschnitt beider Cylinder ist; 2) aus zwei Kreisbögen, in welchen die Pfeiler a' A und b' B des Fensters das grosse Gewölbe schneiden; und diese drei Bögen schliessen sich vollkommen an einander an.

3) Auf Taf. 48 ist die Ebene a' b' des Hauptes vertikal und parallel mit der Richtung A B des grössern Gewölbes vorausgesetzt worden; wäre diese Ebene schief oder eine Böschungsebene, so müsste man, stets von dem geraden Schnitte a' z' b' des kleinern Gewölbes ausgehend, den Stirnbogen *(cintre de face)* suchen, wie es bei der Aufgabe zu Taf. 36 geschah, welche überhaupt viel Aehnlichkeit mit der gegenwärtigen hat. Uebrigens würde die Schiefe der Stirnebene nichts im Durchschnitte beider Gewölbe ändern; es soll jetzt aber derjenige Fall untersucht werden, wo die Gewölbe sich schief schneiden.

Schräges Gewölbeauge *in einem* Tonnengewölbe.

§. 744.

Taf. 49. Die Umstände können es verlangen, dass man, um z. B. eine Verbindung zwischen schon bestehenden Bauwerken herzustellen, oder aus sonst einem gebieterischen Grunde, dem kleinern Gewölbe eine Richtung o' O geben muss, welche nicht senkrecht auf der Axe $O\,O_2$ des grössern ist. Es sei alsdann a' z' b' der Hauptbogen des ersten Tonnengewölbes und A'' Z'' der gerade Schnitt des zweiten, von welchem angenommen wird, er sei in die auf der Axe $O\,O_2$ senkrechte Vertikalebene $A_2\,O_2$ aufgeklappt. Man zeichne die Zurüstung beider Gewölbe auf der Vertikalebene (Fig. 1 und 2) nach §. 738; und um auf der Horizontalebene den Durchschnitt A l m n B beider inneren Wölbungsflächen zu erhalten, wende man noch verschiedene schneidende Horizontalebenen l' l'', m' m'', n' n'' an, deren jede die beiden Cylinder in Geraden schneiden wird, welche durch ihr Zusammentreffen auf der Horizontalebene die Punkte l, m, n bestimmen. Eben so verfährt man in Beziehung auf die Fugen, und da Verfahren und Resultate die ähnlichen sind, wie in §§. 739 und 740, so ist hier nicht weiter davon die Rede; dafür aber soll gezeigt werden, wie man den orthogonalen Schnitt des kleinern Gewölbes construirt, welcher hier nicht unmittelbar gegeben ist, wie auf Taf. 48.

§. 745.

Gerader Schnitt. Aus der darstellenden Geometrie ist bekannt, dass man, um einen Cylinder zu entwickeln, den orthogonalen Schnitt desselben, und nicht einen schiefen, wie a' l' m' b', rectificiren müsse. Man lege also durch einen beliebigen Punkt eine Vertikalebene $\alpha\,\beta$ (Fig. 4) senkrecht auf die Erzeugende $A\,\alpha\,a'$, und suche die wahre Grösse des dadurch in dem Cylinder a' l' m' b' erzeugten Schnittes. Zu diesem Zwecke klappe man die schneidende Ebene um ihren horizontalen Grundschnitt $\alpha\,\beta$ auf; hiebei wird der Punkt, in welchem die in t n projicirte Erzeugende von jener Ebene geschnitten wurde, und dessen horizontale Projection v ist, in v' zu liegen kommen, und zwar in einer Distanz v v', welche der Ordinate t n' der Cylinderbasis gleich ist; trägt man daher auf ähnliche Art die andern Ordinaten dieser Basis auf $\mu\,\mu'$, $\lambda\,\lambda'$... so erhält man die Curve $\alpha\,\lambda'\,\mu'\,\nu'\,\beta$ als den gesuchten geraden Schnitt. Die durch n' p' (Fig. 1) gehende Fuge wird von der Vertikalebene $\alpha\,\beta$ in einer Geraden $\nu'\,\pi'$ geschnitten, deren erster Punkt ν' schon bekannt ist,

und deren letzten man erhält, wenn man wieder die Distanz $\pi\pi'$ gleich der Höhe u p' auf Fig. 1 nimmt. Diese Gerade $\nu'\pi'$ muss offenbar dem Mittelpunkt ω zulaufen. Durch ähnliche Operationen, die man in Beziehung auf die übrigen Fugen und auf die Rückenfläche ausführt, erhält man endlich die Fig. 4, welche, in der Aufklappung, den mittelst der Vertikalebene $\alpha\beta$ gemachten Schnitt des schiefen Gewölbes in seiner wahren Grösse darstellt.

§. 746.

Bemerkung. Die Curve $\alpha\lambda'\mu'\beta'$ ist hier eine übervolle Halbellipse; man könnte aber auch verlangen, dieser gerade Schnitt solle kreisförmig sein, wodurch man ein Tonnengewölbe im vollen Bogen erhielte, das den Vortheil gewährte, dass man die Fugen genau normal auf die Wölbungsfläche machen könnte. Man müsste zu diesem Zwecke zuerst den Halbkreis $\alpha\lambda'\mu'\beta$ zeichnen, auf diesem die gleichen Theile $\alpha\lambda'$, $\lambda'\mu'$, ... und die Normalfugen $\nu'\pi'$, ... bezeichnen, und alsdann die Operationen des vorigen Paragraphen in umgekehrter Ordnung vornehmen, wodurch man den elliptischen Bogen a' l' m' b' und die Grundschnitte n' p', m' q', ... der Fugenebenen u. s. w. erhielte.

§. 747.

Verstreckte Brettungen. Man rectificire den orthogonalen Schnitt $\alpha\lambda'\mu'\nu'\beta$ auf die Gerade $\alpha_2\lambda_2\mu_2\nu_2\beta_2$, und errichte in den Theilpunkten die Ordinaten Fig. 5.

$$\alpha_2 A_3 = \alpha A,\ \lambda_2 l_3 = \lambda l,\ \mu_2 m_3 = \mu m,\ \nu_2 n_3 = \nu n, \ldots.,\ \beta_2 B_3 = \beta B,$$

mittelst deren man die Curve $A_3 l_3 m_3 n_3 B_3$ erhält als die Verwandelte des Durchschnittes beider Cylinder, nachdem man den kleinern entwickelt hat. Hiedurch aber erhält man die wahre Grösse der Wölbungsfläche eines jeden Gewölbesteines.

Was die Fugenbrettungen betrifft, so ist wohl zu bemerken, dass ihre wahre Breite auf Fig. 4 gemessen werden muss, und nicht auf dem Bogen a' z' b' (Fig. 1), weil die Ebene des letztern nicht senkrecht auf den Erzeugenden des Tonnengewölbes ist. Nachdem man also auf Fig. 5 die Abscissen

$$\nu_2 N_2 = \nu'\nu'',\ \nu_2 P_2 = \nu'\pi'',\ \nu_2\pi_2 = \nu'\pi'$$

genommen hat, errichte man die Ordinaten N_2N_3, P_2P_3, $\pi_2 p_3$ beziehungsweise gleich den Distanzen der Geraden $\alpha\beta$ von den verschiedenen Punkten N, P, p; alsdann wird der Umriss $\nu_2 n_3 N_3 P_3 p_3 \pi_2$ die genaue Form der Fuge darstellen, welche durch die Wölbungskante νn (Fig. 3) geht. Die übrigen auf Fig. 5 bemerkten Fugenkanten werden auf ähnliche Art construirt.

§. 748.

Behauung der Gewölbesteine. Da die Steine, welche das Gewölbeauge eigentlich bilden, sich nicht bis an den Hauptbogen (Fig. 1) erstrecken, sondern in Vertikalebenen endigen, welche, wie e g, senkrecht auf den Erzeugenden des kleinen Gewölbes stehen, so ist leicht einzusehen, dass man die Brettungen zu den Häuptern dieser Gewölbesteine der Fig. 4 entnehmen müsse. Um also z. B. den fraglichen Gewölbestein der dritten Schichte herzustellen, führe man ein gerades Prisma (Fig. 6) aus, dessen Basis der Horizontalprojection g e n N R S ... des Gewölbes, und dessen Höhe dem Höhenunterschiede der Punkte μ' und π'' der Fig. 4 gleich sei; hierauf lege man auf die vordere und auf die seitliche Fläche dieses Prisma die beiden Hauptbrettungen $\mu'\nu'\pi'\chi'$ und M'' N'' P'' Q'', welche man den Figuren 4 und 2 entnommen hat, an (der Stein wird abermals umgedreht angenommen, so dass das Unterste zu oberst zu liegen kommt, damit man beide Wölbungsflächen sehen kann); und führe alsdann, wie in §. 730, die cylindrische Wölbung $\mu'\nu'$ n m Taf. 49. Fig. 6.

und die beiden Fugen des kleinern Gewölbes aus, auf welche Seitenflächen sodann die ensprechenden Brettungen der Fig. 5 angelegt werden müssen, um die Grenzen m n, m M, M Q, Q q, ... zu bestimmen. Hierauf behaue man die Wölbungsfläche und die Fugen des grossen Gewölbes, deren Umrisse nun ganz bekannt sind. Was den Rücken betrifft, so könnte man ihn leicht mittelst concaver Lehren ausführen: gewöhnlich aber lässt man ihn roh. Alles diess ist vollkommen identisch mit den Operationen des §. 742; denn der einzige Unterschied zwischen den beiden Figuren 6 der 48sten und 49sten Tafel besteht darin, dass hier der Winkel χ″ Q Q″ stumpf ist, und nicht ein Rechter, wie Q′ Q Q″.

Schräges Gewölbeauge in einem sphärischen Gewölbe.

§. 749.

Es handelt sich hier von einem Tonnengewölbe, welches in ein sphärisches Gewölbe eindringt, so dass also diese Aufgabe viel Aehnliches mit der des §. 643 (Taf. 37) hat; dort aber wurde angenommen, das sphärische Gewölbe sei gemauert, wesshalb von einer Anschliessung seiner Wölbungskanten an die des Tonnengewölbes keine Rede sein konnte; während hier, wo das Gewölbe aus Steinen ausgeführt ist, eine solche Anschliessung stattfinden muss und einige wichtige Abänderungen erfordert.

Taf. 50. Es sei a′ l′ m′ n′ b′ der gerade Schnitt des Tonnengewölbes, dessen Anlaufsebene, welche zugleich als horizontale Projectionsebene dient, hier dieselbe ist, wie die des sphärischen Gewölbes. Es sei A a o b der grösste horizontale Kreis des letztern, dessen Mittelpunkt O nicht in der Richtung der Axe o′ o des Tonnengewölbes liegt, daher denn auch das Gewölbeauge schräge wird. Man schneide die Kugel durch eine Meridianebene O A und klappe den Schnitt auf der Vertikalebene auf, wo er sich als ein mit dem Halbmesser O″ A″ beschriebener Halbkreis darstellt; diesen theile man in eine ungerade Anzahl gleicher Theile A″ L″, L″ M″, M″ N″; auf gleiche Weise verfahre man mit der Basis a′ l′ m′ n′ b′ des Tonnengewölbes, nur nehme man den ersten Theilpunkt l′ tiefer als L″ *), und nachdem man noch die Normalfugen gezeichnet hat, vollende man die Zurüstung der Gewölbe nach dem gewöhnlichen Gebrauche.

Um nun die Projection a l m n b der windschiefen Curve zu erhalten, in welcher der Cylinder die Kugel schneidet, wende man mehrere schneidende Horizontalebenen an, wie z. B. n′ n″. Diese schneidet den Cylinder in der Erzeugenden (n′, t n), und die Kugel in einem Kreise, dessen Halbmesser O d bestimmt wird, indem man den Punkt n″, wo eben jene Ebene den in A″ N″ aufgeklappten Meridian schneidet, nach d zurückführt. Zieht man nun mit diesem Halbmesser O d einen Kreis, so schneidet er die Gerade n′ n in einem Punkte n, welcher der gesuchten Curve a l m n b angehört; die übrigen Punkte dieser letztern aber werden auf dieselbe Art construirt. Aus der Anmerkung zu §. 643 ist ersichtlich, dass diese Curve eine Parabel ist, welche zum Hauptdurchmesser die Senkrechte O C hat, die man vom Mittelpunkte O auf die Axe o′ o des Cylinders gefällt hat.

*) Diese Bedingung, der alsdann auch die anderen Punkte m′ und M′, n′ und N′, ... unterliegen, ist desshalb nöthig, damit die Fugenebenen des Tonnengewölbes es seien, welche sich auf der innern sphärischen Wölbungsfläche verlängern und welche die conischen Fugen in ebenen Curven schneiden (§. 750); während, wenn m′ höher läge als M′, der conische Schnitt der Kugel es wäre, welcher sich auf der cylindrischen Wölbung fort verlängerte und daselbst eine Linie von doppelter Krümmung erzeugte, deren Ausführung in Stein viel schwieriger wäre. Zu diesem Grunde (der wegfiele, wenn statt des Tonnengewölbes ein Conoid die Kugel durchdränge (§. 788), weil alsdann die Fugen in beiden Gewölben gekrümmt wären), kommt noch, dass ohne die obige Bedingung die in §. 738 angedeutete Unregelmässigkeit eintreten würde.

§. 750.

Die Fugenebene p′o′o des Tonnengewölbes schneidet die Kugel in einem Kreisbogen, dessen Projection Nno eine Ellipse ist, die wie oben construirt wird. Denn die durch den Punkt N″ des Meridians gelegte Horizontalebene N″N′ schneidet die Kugel in dem Kreise DN und die Fugenebene in der Horizontalen N′N; so dass man aus dem Durchschnitte dieser beiden Linien den Punkt N der Curve Nn erhält; andere Punkte kann man durch neue horizontale Schnitte erhalten.

Vom Punkt (N, N′) an, welcher auf der Wölbungskante (ND, N″Z″) des sphärischen Gewölbes liegt, schneidet die Fugenebene p′o′o die conische Fuge des letzteren Gewölbes, welche gebildet wird durch die Umdrehung der Normalen P″N″O″ um die Vertikale O″Z″ (§. 681), die, in ihrer wahren Lage, sich in O projicirt; der Durchschnitt dieser beiden Fugen aber ist die Hyperbel PNπ. Um irgend einen der Punkte dieser Curve zu erhalten, z. B. P, wende man wieder eine schneidende Horizontalebene P″P′ an, welche die Fugenebene in der Geraden P′P, und die conische Fuge in einem Kreise EP schneiden wird, dessen Halbmesser man erhält, wenn man den Punkt P″ des Meridians in E zurückführt. Will man den Scheitel π dieser Hyperbel finden, der zu genauerer Zeichnung des hier nöthigen Stückes NP dienen kann, so bemerke man, dass dieser Scheitel auf der Erzeugenden des Kegels liegen muss, welche senkrecht ist auf dem Grundschnitt o′oC der schneidenden Ebene (Darst. Geom. §. 247); diese Erzeugende nun ist horizontal offenbar in OC projicirt, und ihre Vertikalprojection ist eine Gerade O′π′, welche der Aufklappung O″N″P″ parallel ist; projicirt man daher den Punkt π′ in π auf OC, so ist letzterer Punkt π der gesuchte Scheitel der Hyperbel PNπ. Ihre Asymptoten kann man nach §. 258 der Darstellenden Geometrie finden.

Die Fugenebene p′o′o schneidet ferner die Rückenfläche des sphärischen Gewölbes in einem Kreisbogen, der sich auf den elliptischen Bogen PR projicirt; hierauf schneidet er die horizontale Seitenfläche R″V″ in der Geraden RS, die cylindrische Fläche V″O′ in einem Ellipsenbogen Sp, und endlich den Rücken des Tonnengewölbes in der Geraden pu: da aber alle diese Linien, wie oben, mittelst horizontaler Schnitte construirt werden, so wurden sie hier dem Leser bloss angedeutet, der leicht auch aus der Figur die Form der andern, durch die Ebenen m′q′, l′L′, ... erzeugten Schnitte erkennen wird.

§. 751.

Auf Fig. 2 wurde die Projection $a_2 l_2 m_2 n_2 b_2$ des Stirnbogens des Tonnengewölbes auf der Kugel und die Grundschnitte $N_2 n_2$, $M_2 m_2$, ... seiner Fugen angegeben; diese Darstellung ist für den Werkmeister unnöthig, aber sie kann dazu dienen, den Anschluss beider Gewölbe an einander klarer zu machen. Man hat sie erhalten, indem man von den verschiedenen Punkten N, n, m, ... Senkrechte auf die Vertikalebene OA fällte, und hierauf die Fusspunkte dieser Senkrechten auf die durch die entsprechenden Punkte N′, n′, m′, .. gezogenen Horizontalen bezog.

§. 752.

Verstreckte Brettungen. Nachdem man den rectificirten orthogonalen Schnitt a′l′m′n′b′ des Tonnengewölbes auf die Gerade $a_1 l_1 m_1 n_1 b_1$ getragen, errichte man Ordinaten, wie Taf. 50. Fig. 4.

$$a_1 a_3 = a' a, \ldots, n_1 n_3 = tn, \ldots, b_1 b_3 = b' b,$$

und zeichne die Curve $a_3 l_3 m_3 n_3 b_3$, welche die Verwandelte des in almnb projicirten Gratbogens ist, und durch welche zugleich die wahre Grösse jeder entwickelten oder verstreckten Wölbungsfläche bestimmt wird. Diejenige Fugenbrettung, welche hier in $n_1 n_3 N_3 P_3 R_3 S_3 p_3 p_1$ aufgeklappt ist, und die allein hier

als Beispiel dienen möge, wird construirt, indem man Abscissen gleich den Distanzen n′N′, n′P′, n′R′, n′p′ auf $a_1\ b_1$ trägt, und die Distanzen der Projectionsaxe a′b′ von den verschiedenen Punkten $n_1\ N_1\ P_1\ R_1\ S_1\ p$ als Ordinaten nimmt.

§. 753.

Fig. 5. **Behauung der Gewölbesteine.** Man nehme z. B. den Gewölbestein, der zum Haupte die Fläche m′n′p′q′ (Fig. 1) und zur horizontalen Projection t n N T U V q v hat. Zuerst behaue man ein gerades Prisma (§. 633), das eben diese Projection zur Basis, und die Höhendifferenz der Punkte m′ und P′ auf Fig. 1 zur Höhe hat; hierauf zeichne man auf die vordere und die seitliche Fläche dieses Prisma (Fig. 5) die Umrisse m′n′p′q′ und M″N″P″R″V″W″Q″M″ mit Anwendung von Brettungen, welche man den Fig. 1 und 2 entnommen hat (der Gewölbestein ist aus den bekannten Gründen umgekehrt). Nun kann man leicht die cylindrische Wölbung und die beiden ebenen Fugen ausführen, welche durch den Kreisbogen m′n′ und durch die Geraden m′q′, n′p′ gehen, weil diese Seitenflächen winkelrecht auf der Ebene des Hauptes stehen; und hat man sie genugsam verlängert, so lege man die entsprechenden, der Fig. 4 entnommenen Brettungen auf sie an, wodurch man die Grenzen N n, m n, m M, M Q, Q X, X q, q q′ … erhält. Die ebene Fläche X Q Q″ W″ ist nach dem Vorhergehenden leicht auszuführen, und da ihre wahre Grösse durch Fig. 3 gegeben ist, so kann man sie leicht durch den Kreisbogen Q Q″ begrenzen. Was die conische Fuge M Q Q″ M″ betrifft, so wendet man ein **Schrägmass** an, dessen Winkel gleich W″ Q″ M″ (Fig. 2) ist, und während nun der horizontale Schenkel über die Ebene X Q Q″ W″ hingleitet in einer auf dem Bogen Q Q″ stets normalen Richtung, beschreibt der andere Schenkel die fragliche Kegelfläche, auf welche man sofort den Kreisbogen M M″ zeichnen muss. Letztere Operation geschieht durch eine Entwicklung jener Fläche, oder ganz einfach dadurch, dass man auf sie, längs jeder Erzeugenden, eine Länge gleich Q″ M″ trägt. Endlich muss noch die sphärische Wölbung N″ M″ M m n N behauen werden, welches mittelst einer convexen **Lehre** geschieht, die man nach der Krümmung des Meridians A″ L″ M″ (Fig. 2) ausgeschnitten hat, und die man über die beiden Kreisbögen M″ M, N″ N hingleiten lassen muss; der letztere dieser Bögen musste zuerst auf die concave Fläche des prismatischen Körpers, Fig. 5, gezeichnet werden. Die Richtpunkte für die Bewegung der **Lehre** sind leicht von Fig. 3 auf Fig. 5 zu bringen.

Von der **oberen** conischen Fuge, welche die Gerade N″ P″ zur Erzeugenden hätte, war keine Rede, weil sie hier ganz unsichtbar ist; nach dem Vorhergehenden aber kann der Leser sich leicht vorstellen, auf welche Art dieselbe behauen werden muss. Die Rückenfläche wird entweder mittelst concaver Lehren, oder, wie gewöhnlich, nach dem Augenmass aus dem Groben gearbeitet.

Gewölbe mit Strebebögen und Schlussmauern.
(Voute en pendentif avec fermerets.)

§. 754.

Taf. 51. Fig. 1. Es sei v x y z ein grösster Horizontalkreis, der zugleich im Anlauf eines halbkugeligen Gewölbes liege. Man schreibe ein Quadrat A B C D in denselben ein und errichte auf seinen Seiten vier Vertikalebenen, welche die inneren Wände der Mauern eines Saales darstellen werden, den das Gewölbe überdecken soll. Diese Vertikalebenen schneiden die Kugelfläche in den in A X″ B, B Y″ C, C Z″ D, D V″ A aufgeklappten Halbkreisen und schneiden somit von ihr vier Segmente ab, nach deren Wegnahme von der Halbkugel noch übrig bleiben: 1) die auf den eingeschriebenen Kreis V X Y Z projicirte Calotte; 2) vier trianguläre auf A V X A, B X Y B, C Y Z C, D Z V D projicirte Stücke. Diese letzteren nennt man **Strebebögen** *(pendentifs)*, während die in

den vertikalen Halbkreisen A X″ B, B Y″ C, ... enthaltenen Theile der Mauern Schlussmauern *(fermerets)* heissen. Fig. 2 stellt die Vertikalprojection der auf diese Art zugestutzten Halbkugel dar.

§. 755.

Um die Zurüstung dieses Gewölbes zu zeichnen, und um die Gestalt der Strebebögen recht deutlich darstellen zu können, wähle man für die vertikale Projection eine Ebene, welche der Diagonale B D parallel ist, und welche zugleich einen in der Richtung dieser Geraden gemachten Gewölbeschnitt darstellt. Dieser Schnitt ist ein über B′ D′, als Durchmesser, beschriebener Halbkreis; man theile ihn in eine ungerade Anzahl gleicher Theile und zeichne die diesen Theilungen entsprechenden Parallelkreise, wodurch man die Wölbungskanten erhält. Eben diese Kreise dienen auch zur Construction der beiden Ellipsen B′ Y′ C′ und C′ Z′ D′, in welchen sich die Kreise projiciren, nach welchen die Kugel von den Vertikalebenen B C und C D geschnitten wird. Der mit dem Halbmesser O F beschriebene Kreis z. B. schneidet den Grundschnitt C D in den Punkten L und M, welche man daher nur auf die Punkte L′ und M′ der durch F′ gezogenen Horizontale projiciren darf. Was den Scheitelpunkt Z′ betrifft, so muss dieser auf dem Parallelkreis Z I liegen, der die Vertikalebene C D berührt. Man darf aber, der Dauerhaftigkeit des Gewölbes wegen, keine Wölbungskante durch diesen Punkt Z′ gehen lassen, wesshalb man nöthigenfalls die gleichen Theile D′ E′, E′ F, F′ G′, ... auf gehörige Weise abändern müsste. Fig. 3 u. 4.

§. 756.

Was den Theil des Gewölbes betrifft, welcher oberhalb der Schlussmauern sich befindet, so bildet man, wie gewöhnlich, die Lagerfugen durch conische Flächen, welche durch Umdrehung um die Vertikale O entstehen; die Stossfugen aber werden durch Meridianebenen gebildet. Diese beiden Fugenreihen verwandeln sich für die Schlussmauern in horizontale und vertikale Ebenen. Man betrachte nun aber einen Gewölbestein, welcher an beiden Arten Theil nimmt, z. B. denjenigen, dessen Wölbungsfläche aus folgenden drei Theilen besteht:

M′ P′ Q′ N′, M′ P′ S′ R′, N′ Q′ T′ U′.

Der erste dieser Theile ist sphärisch, die beiden andern eben. Längs des Kreisbogens (M N, M′ N′) ist die Fuge eine Kegelfläche, welche von den Normalen der Kugel, wie z. B. (O M m, C′ M′ m′), gebildet wird: diese schneidet die Rückenfläche in einem Kreisbogen (m n, m′ n′); denn beide Flächen sind durch Umdrehung um eine gemeinschaftliche Axe (O, C′ ω′) erzeugt (Darst. Geom. § 333). Da ferner die Erzeugende C′ M′ m′ jener Kegelfläche sich auf die Gerade C′ F′ f′ aufklappen würde, welche den Meridian ω′ f′ des Rückens in f′ schneidet, so wird also durch diesen Punkt (f′, f) der Durchschnittskreis (m′ n′, m n) bestimmt. Hier wurde durch den Punkt f′ die obere Fläche f′ f″ der zweiten Schichte gelegt, um einige Verwicklungen zu vermeiden, welche sich in Betreff der Rückenfläche ergeben würden; man dürfte aber diese Horizontalebene f′ f″ nicht oberhalb f′ nehmen, weil diess zu spitzigen Winkeln im oberen Gewölbe führen würde. Was die untere Wölbungskante (P Q, P′ Q′) betrifft, so construirt man auf ähnliche Weise die conische Fuge (P p q Q, P′ p′ q′ Q′), die endigen muss in der Horizontalebene e′ e″, von welcher sie in dem Kreisbogen (p′ q′, p q) geschnitten wird.

§. 757.

Um die conische Fuge M′ m′ n′ N′ an die Fugen der Schlussmauern anzuschliessen, welche letztere durch M′ R′ und N′ U′ gehende Horizontalebenen sind, so kann man eine kleine dreieckige Seitenfläche (M m α,

M′m′α′) einführen, welche durch die auf die Mauerwand gefällte Senkrechte Mα bestimmt wird: aus demselben Grunde setzt man auch links die dreieckige Seitenfläche (Nnб, N′n′б′), und verfährt auf ähnliche Art bei der *conischen Fuge*, welche durch (PQ, P′Q′) geht. Hiedurch erhält der Gewölbestein der zweiten Schichte des Strebebogens eine Form, wie sie in Fig. 5 perspectivisch dargestellt ist, während Fig. 6 den unter ihm liegenden Gewölbestein darstellt.

§. 758.

Fig. 5. Behauung der Gewölbesteine. Um z. B. den Gewölbestein Fig. 5 herzustellen, kann man zuerst ein gerades Prisma aushauen, das zur Basis die horizontale Projection RMNUucr habe, und dessen Höhe der Distanz der Geraden T′S′ und m′n′ (Fig. 4) gleich sei; hat man alsdann auf die Seitenfläche dieses Prisma (Fig. 5) die Linien T′Q′, Q′P′, P′S, u′б′, б′n′, n′m′, m′α′, α′r′, wie sie aus den Fig. 3 u. 4 sich ergeben, gezeichnet, so kann man leicht alle ebenen Seitenflächen des Gewölbesteins zeichnen, wie auch die Stücke R′M′P′S′, U′N′Q′N′ der Schlussmauern, deren Brettungen leicht nach ihrer wahren Grösse darzustellen sind. *Hierauf muss man mittelst einer nach dem Bogen MN ausgeschnittenen Lehre*, die man in der Horizontalebene der Geraden R′M′, U′N′ hält, den Stein so behauen, bis man den Bogen M′N′ darauf zeichnen kann; worauf man mittelst eines Lineals, das man über die beiden, in 4 oder 5 gleiche Theile getheilten Bögen M′N′, m′n′ hingleiten lässt, die conische Fuge M′N′n′m′ ausführen wird. Zur Herstellung der sphärischen Wölbung M′N′Q′P′ endlich bedient man sich einer nach dem Meridian D′E′F′ ausgeschnittenen Lehre.

Andere Art der Zurüstung desselben Gewölbes.

§. 759.

Taf. 51. Fig. 7. Manchmal geschieht es, dass man, statt die Wölbungskanten horizontal zu nehmen, sie in vertikale Ebenen versetzt, welche in der Projection Quadrate bilden, deren Seiten entweder mit den Pfeilern AB und BC, oder, wie in Fig. 7, mit den Diagonalen AC und BD parallel sind, und man hat diese Art der Zurüstung sogar schon bei kleinen, vollkommen halbkugeligen Gewölben angewendet. Bei wichtigen Bauwerken aber *ist eine derartige Anordnung der Gewölbekanten unzulässig*, weil sie der vielen spitzigen Winkel wegen, die dabei vorkommen müssen, sehr wenig Festigkeit gewährte, und weil, wenn man auch durch Abstumpfungen nachhelfen wollte, doch immer ein bedeutender Verlust an Zeit und Material sich herausstellen würde.

§. 760.

Fig. 7 u. 8. Die gegebenen Stücke sind dieselben wie in der vorigen Aufgabe. *Man projicire auf die Diagonale* BD alle Theilpunkte des Kugelmeridians, wie H′ in H, und zeichne hierauf das Quadrat HIKJ...; alsdann schneiden die vier mit den Seiten dieses Quadrats errichteten Vertikalebenen die Kugel in vier Bögen kleinerer Kreise, welche zusammen eine der Wölbungskanten bilden. Diese Bögen schneiden sich auf der Kugel unter ziemlich spitzigen Winkeln, wie man auf der Vertikalebene an den Bögen H′I′ und I′K′J′ sieht; und um letzteren Bogen zu zeichnen, bemerke man, dass sein Scheitel (K, K′) sich in der nämlichen Höhe befinden muss wie (H, H′), und dass also durch die Horizontale H′K′ der gesuchte Halbmesser C′K′ bestimmt wird. Kommt man an einen Theilpunkt F′, für welchen das Quadrat FL..MN... durch die Schlussmauern unterbrochen wird, so setzt man die Wölbungskante aus dem Kreisbogen (F′L′, FL), der Horizontalen (L′M′, LM), dem

Kreisbogen (M′T′N′, MN) etc. zusammen. Der Halbmesser C′T′ dieses letztern Bogens wird wieder durch die von F′ aus gezogene Horizontale bestimmt.

Die den geradlinigen Theilen der Wölbungskanten, wie (L′M′, LM), entsprechenden Lagerfugen sind Horizontalebenen; dagegen sind diejenigen, welche den kreisförmigen Theilen, wie (M′T′N′, MN), entsprechen, durch Umdrehung um die Horizontale (OC, C′) erzeugte Kugelflächen. Die conische Fuge OMN schneidet den Rücken, welcher hier eine mit der innern Wölbung concentrische Kugel ist, in einem vertikalen Kreise (m′t′n′, mn), dessen Spitze t′ und der Halbmesser C′t′ durch die Horizontale bestimmt werden, die man durch den Punkt f′ gezogen hat. In der ersten Schichte aber, wo die conische Fuge OPQ durch die Horizontalebene e′e″ begrenzt wird, ist ihre Grenzcurve ein Hyperbelbogen (prq, p′q′), dessen Scheitel r eben so gefunden wird, wie es für den in der Nähe der Mauerecke D liegenden Scheitel (e, e′) geschehen ist. Alle diese conischen Fugen schliessen sich hier an die ebenen Fugen der Schlussmauern an, mittelst kleiner geneigter Ebenen, wie (Mmα, M′m′α′).

Was die Stossfugen betrifft, so werden sie, für die sphärischen Theile der Wölbungsfläche, gebildet durch Meridianebenen, die man durch den Durchmesser AC oder den Durchmesser BD legt; für die Schlussmauern sind sie Vertikalebenen. Die Fig. 9 u. 10 stellen diejenigen Gewölbesteine der Strebebögen dar, welche in der ersten und zweiten Schichte liegen; man behaut sie fast eben so, wie die der Fig. 5 u. 6 in der vorigen Aufgabe.

Gewölbe mit Strebebögen und einmündenden Tonnengewölben.

§. 761.

Das halbkugelige Gewölbe wird hier von zwei gleich hohen Tonnengewölben durchdrungen, deren jedes die Kugel in zwei gleichen und parallelen Halbkreisen scheidet; diese Tonnengewölbe sind also in vollem Bogen und gewöhnlich gibt man ihnen zu Durchmessern die Seiten des Quadrats, das man in den in der Anlaufsebene liegenden grössten Kreis eingeschrieben hat. Nachdem man also das Quadrat ABCD in die Kreislinie vxyz eingeschrieben, schneidet man von der Kugel die Segmente AxD, AyB, BzC, CvD ab, welche ausserhalb der auf den Seiten AD, AB, BC, CD beschriebenen Halbkreise liegen; statt aber die hiedurch entstandenen Oeffnungen wie in voriger Aufgabe durch Mauern zu schliessen, nimmt man diese vier Halbkreise als Grundlinien eben so vieler gerader Cylinder, welche die in das sphärische Gewölbe einmündenden Gänge überdecken. Es bleibt also von der abgestumpften Kugel noch übrig: 1) die Calotte, welche sich auf den in das Quadrat ABCD eingeschriebenen Kreis projicirt, 2) die vier triangulären Theile, welche sich auf AXYA, BYZB, CZVC, DVXD projiciren, und diese Theile sind es eben, welche man insbesondere Strebebögen nennt. (Taf. 52. Fig. 1.)

§. 762.

Nachdem man nun die im vorigen Paragraphen angegebenen Stücke auf die Anlaufsebene, welche zugleich als Horizontalebene der Figur dient, aufgetragen, nehme man die Vertikalebene so, dass sie senkrecht auf dem ersten Tonnengewölbe stehe, und betrachte sie zugleich als einen längs des Durchmessers xOz gemachten Durchschnitt. Auf diesen zeichne man den Meridian x′ω′z′ der Kugel, und theile ihn in eine ungerade Anzahl gleicher Theile; eben so verfahre man in Beziehung auf den geraden Durchschnitt A′Y′B′ des ersten Tonnengewölbes, mit der Bedingung jedoch, dass alle Theilpunkte E′, F′, G′, H′ unterhalb der entsprechenden Punkte 1, 2, 3, 4 zu liegen kommen, weil sonst die Anschliessung der Fugen der drei Gewölbe (Fig. 3 u. 4.)

einen das Auge beleidigenden Anblick darbieten würde, wie sich später (§. 763, Anmerkung) zeigen wird. Um aber diese Bedingung zu erfüllen, darf man nur den ersten Punkt E′ tiefer oder in derselben Höhe nehmen, wie den Punkt 1; letzteres ist hier geschehen, weil hiedurch auf der ersten sphärischen Wölbungsfläche eine gebrochene Linie vermieden wird, die aus drei sehr kleinen und sehr schiefen Kreisbögen bestehen würde.

Unter dieser Voraussetzung nun wird die erste Wölbungskante nur aus folgenden drei Theilen bestehen: 1) aus der Erzeugenden (E', EE_2), durch welche eine auf dem Tonnengewölbe normale Ebene, nämlich die Ebene E′O′O gelegt werden muss; 2) aus der Erzeugenden ($L'L''$, LL_2), durch welche eine auf dem zweiten Tonnengewölbe normale Ebene gelegt wird, deren horizontaler Grundschnitt Ox ist; 3) aus dem Kreisbogen (E′L′, EL), längs dessen eine auf der Kugel normale Fuge gelegt wird, wodurch ein Umdrehungskegel entsteht, der von den beiden ebenen Fugen in den Halbmessern (O′E′e′, OEe) und (O′L′l′, OLl) geschnitten wird. Diese drei partiellen Fugen müssen in der Horizontalebene endigen, welche die erste Schichte begrenzt, auf Fig. 5, wo man einen Durchschnitt des seitlichen Tonnengewölbes sammt der Zurüstung des letzteren dargestellt sieht; folglich wird jene Ebene die Fugen in dem Kreisbogen (e′l′, el) und in zwei Geraden schneiden, welche den Erzeugenden der Tonnengewölbe parallel sind.

§. 763.

Man betrachte jetzt eine beliebige Schichte, z. B. diejenige, welche auf den Tonnengewölben durch die Erzeugenden (G', GG_2), ($N'N''$, NN_2) begrenzt wird, und sich auf der Kugel bis zu dem Kreisbogen (P′Q′, PQ) erhebt, welcher dem Theilpunkt 3 entspricht.

Nun schneidet die Ebene G′O′O, welche die Normalfuge des ersten Tonnengewölbes bildet, die Kugel in dem Bogen (G′Q′, GQ) eines grössten Kreises, dessen einzelne Punkte man aus den Durchschnitten des vertikalen Grundschnittes O′G′ mit verschiedenen, dem Meridian $x'\omega'z'$ parallelen Kreisen erhält; ebenso schneidet die durch die Erzeugende ($N'N''$, NN_2) gelegte Fugenebene die Kugel in dem Bogen (NP, N′P′), welchen man, um allzu viele Aufklappungen zu vermeiden, auf der Horizontalebene symmetrisch mit GO zeichnen und alsdann auf die Vertikalebene projiciren kann. Was die conische Fuge betrifft, welche durch den Bogen (P′R′, PQ) gehen muss, so wird sie durch Halbmesser (O′Q′q′, OQq), (O′P′p′, OPp) gebildet, welche den Rücken des sphärischen Gewölbes in einem andern horizontalen Kreise (p′q′, pq) schneiden, der leicht zu construiren ist. Denn weil jede Erzeugende des Umdrehungskegels sich auf dem Hauptmeridian in der Geraden (O′3, Ox) aufklappen würde, welche den Rücken in S′ schneidet, so wird also die durch letzteren Punkt gezogene Horizontale die Vertikalprojection p′q′ und den Halbmesser des fraglichen Kreises bestimmen. Ferner sind die Normalen (P′p′, Pp), (Q′q′, Qq) genau die Durchschnitte der conischen Fuge mit den beiden ebenen Fugen der Tonnengewölbe. *)

Die ebene Fuge N″N′P′p′ schneidet den sphärischen Rücken in dem Bogen (p′r′, pr) eines grössten Kreises, und den Rücken des seitlichen Tonnengewölbes in der durch den Punkt r_3 (Fig. 5) bestimmten

*) Man wird jetzt wohl einsehen, warum in §. 762 empfohlen wurde, die Theilpunkte E′, F′, G′, . . . tiefer zu nehmen, als die Punkte 1, 2, 3, . . . des Kugelmeridians. Denn wäre es anders, so wäre der Parallelkreis P′Q′ unterhalb G′ zu liegen gekommen, und statt die ebene Fuge OO′G′ des Tonnengewölbes bis zu jenem Parallelkreise zu verlängern, hätte man die durch P′Q′ gehende conische Fuge bis zu der Horizontalen G′ verlängern müssen, und es hätte alsdann der Kegel den Cylinder in einer Linie von doppelter Krümmung geschnitten, welche viel weniger leicht auf den Stein überzutragen gewesen wäre, als der Bogen (G′Q′, GQ). Der nämliche Uebelstand hätte aber auch bei dem Seitentonnengewölbe stattgefunden.

Erzeugenden ($r''r', r_2r$); den Grenzpunkt (r', r) kann man auch aus dem Durchschnitt jener Erzeugenden mit der aus dem Punkt u' gefällten Vertikalen $u'r'$ finden; denn diese Gerade $u'r'$ ist offenbar die Projection des vertikalen Kreises r u h, durch welchen der Rücken des Tonnengewölbes in den Rücken des Kugelgewölbes eindringt. Ebenso projicirt die in der Ebene $G'O'O$ enthaltene Fuge des ersten Tonnengewölbes sich horizontal auf den Umriss G_2GQqtt_2; ferner befinden die Punkte r und t sich auf einem Kreisbogen r t, welcher den Durchschnitt des sphärischen Rückens mit der Horizontalebene r_3r_4 darstellt; und da eben diese Ebene den Meridian in w' schneidet, so ist die Distanz dieses letzteren Punktes von der Vertikalen $O'Y'$ genau gleich dem Halbmesser des Kreises r t, wodurch also die Richtigkeit der vorhergehenden Operationen geprüft werden kann.

§. 764.

Auf eine ähnliche Art verfährt man in Beziehung auf den Parallelkreis (4,4), durch welchen der Schluss des Tonnengewölbes begrenzt wird; und da oberhalb desselben die Gewölbesteine nur dem Kugelgewölbe angehören, so werden sie wie in §. 680 gebildet. Hierauf nun theile man jede Schichte wieder durch Stossfugen, welche für die sphärischen Wölbungen Meridianebenen und für die cylindrischen Wölbungen Vertikalebenen sind, die auf den Erzeugenden senkrecht stehen; man muss aber diese Fugen so vertheilen, dass jeder einem Strebebogen angehörige Gewölbestein sich in einer gewissen Breite über die Tonnengewölbe hin erstrecke, wie derjenige, von dem jetzt insbesondere die Rede sein wird, und dessen Wölbungsflächen die Umrisse

$$(M\mu\nu NPQG\gamma\varphi FIKM,\ M'\mu'\nu'N'P'Q'G'F'I'K'M')$$

zu Projectionen haben.

§. 765.

Verstreckte Brettungen. Von denjenigen Theilen der Wölbung, welche den Tonnengewölben angehören, befindet sich jeder zwischen zwei vertikalen Ebenen eingeschlossen, die, wie $\varphi\gamma$ und FG oder $\mu\nu$ und MN, auf den Erzeugenden perpendikulär sind; es ist daher überflüssig, diese Theile zu verstrecken, weil die von ihnen gebildeten Seitenflächen gerade so behauen werden, wie die eines zu einem geraden Thore gehörigen Gewölbesteins (§. 614); man hat also bloss die Fugenbrettungen zu construiren. Zu diesem Zwecke denke man sich die Ebene $G'O'O$ um OO' in die Horizontalebene aufgeklappt, und nehme, Fig. 6, die Distanzen $O'G'$, $O'Q'$, $O'q'$, $O't'$ gleich den gleichnamigen Linien auf Fig. 4; hierauf errichte man die Ordinaten $O'O$, $G'G$, $Q'Q$, $q'q$, $t't$ gleich den Distanzen der Projectionsaxe (Fig. 3) von den Punkten O, G, Q, q, t; endlich ziehe man die Kreisbögen QG, qt mit den Halbmessern der innern und äussern sphärischen Wölbung, so erhält man die Brettung $G'GQqtt'$ der obern Fuge des genannten Gewölbesteins. Der Umriss $G'GIii'$ stellt die untere Fuge dar, welche sich hier nicht bis zum sphärischen Rücken verlängert, und auf eine ähnliche Art construirt wird. Der nämliche Gewölbestein enthält auch zwei Fugen, welche dem seitlichen Tonnengewölbe angehören; da sie aber eine ganz identische Form mit den vorhergehenden haben, so können die beiden bereits erhaltenen Brettungen auch für sie angewendet werden, wenn man sie durch Drehung in die gehörige Lage bringt.

§. 766.

Behauung des Gewölbesteins. Nachdem man ein gerades Prisma ausgehauen, das zur Basis die horizontale Projection des Gewölbesteins und zur Höhe die Höhendifferenz der beiden entferntesten Punkte Fig. 7.

auf der Vertikalprojection hat, zeichne man auf die Seitenfläche $\alpha\beta\delta\varepsilon$ den Umriss des Gewölbesteinhauptes mittelst der Brettung $M_3N_3r_3r_4i_4$ der Fig. 5; hierauf behaue man die cylindrische Wölbung M′N′NM, welche winkelrecht auf der Seitenfläche des Hauptes ist, und die beiden ebenen Fugen, von denen hier nur die N′NPprr′ sichtbar und ihrer Form nach durch die Brettungen der Fig. 6 gegeben ist. Man verfährt auf die nämliche Art in Beziehung auf das andere Haupt, das in der auf der ersten senkrechten Seitenfläche des Prisma liegt, und behaut hierauf auch die Wölbung G′F′FG, die Fuge G′GQqtt′ und die untere Fuge, welche unsichtbar ist. Nachdem man hierauf auf die obere Fläche des Prisma den Bogen pq gezeichnet hat, der durch Fig. 3 in seiner wahren Grösse gegeben ist, so höhle man den Stein so weit aus, dass man den Bogen PQ darauf zeichnen kann, mittelst einer Lehre, die in horizontaler Lage gehalten worden, und durch die bereits gefundenen Punkte P und Q gehen muss. Hierauf kann man die conische Fuge PpqQ behauen, indem man ein Lineal über die in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilten Bogen PQ und pq weggleiten lässt. Die sphärische Wölbung MNPQGFIK endlich, deren Umriss aus dem Vorhergehenden bekannt ist, wird mittelst einer Lehre ausgeführt, die man nach dem Meridian $x'\omega'$ (Fig. 4) der Kugel ausgeschnitten hat, und die man durch solche Richtpunkte gehen lassen muss, welche, zu zweien, einem und demselben Halbmesser der Fig. 3 entsprechen.

Die Fig. 8 stellt den Gewölbestein der ersten Schichte dar, welcher noch leichter und auf dieselbe Weise zu behauen ist.

Strebebögen mit Zwischenpfeilern, einmündenden Tonnengewölben und Gurtbögen.

§. 767.

Die Strebebögen werden mit Vortheil statt der Kreuzgewölbe angewendet, weil sie gegen den Anlauf hin sanfter auslaufende Linien und gegen den Scheitel weniger schiefe Fugenschnitte darbieten; auch gewährt ihre Erhöhung einen grossartigern Anblick, so dass sie sich besser zur Ueberwölbung des Centralpunktes eines Gebäudes eignen; endlich kann man bei ihnen das Licht von oben einfallen lassen, wenn man die letzten Schichten der sphärischen Calotte wegnimmt, was bei Kreuzgewölben unmöglich ist. Um aber diese Vortheile zu vervollständigen und den allzu spitzigen Kugeltheil zu vermeiden, den man am Anlaufe des Strebebogens in Fig. 8 der Taf. 52 wahrnimmt, stumpft man die Ecken, welche durch die Pfeiler der Tonnengewölbe gebildet werden, durch einen Bogen, wie BC, Taf. 53, ab, wodurch zwischen zwei benachbarten Einmündungen (*lunettes*) der Tonnengewölbe ein Zwischenpfeiler (*trumeau*) entsteht. Unter der Voraussetzung nun, das Quadrat $\alpha\beta\delta\gamma$,
Taf. 53. das die in der Anlaufsebene beider Tonnengewölbe liegenden Erzeugenden bilden, sei gegeben, nehme man
Fig. 1. einen Halbmesser Ox grösser als $O\alpha$, und beschreibe mit demselben den Kreis xyzv, welcher jene Erzeugenden in den Punkten A, B, C, D, ... schneidet. Diesen Kreis betrachte man als den horizontalen Grundschnitt einer Halbkugel, welche von den Tonnengewölben in vertikalen, über den Durchmessern AB, CD, EF, GH beschriebenen Halbkreisen geschnitten wird. Die Strebebögen sind hier sphärische Vierecke, welche zu Grundlinien die Bögen BC, DE, FG, HA haben, und sich in Figuren, wie (BYZC, B′Y′Z′C′), projiciren.

§. 768.

Die Zurüstung auf Fig. 2, welche einen längs xOz gemachten Durchschnitt darstellt, wird auf dieselbe Art gezeichnet, wie in §§. 762 u. 763. Weil aber zwischen den Halbmessern O′A′ und O′x′ des Tonnengewölbes und der Kugel hier eine grosse Ungleichheit stattfindet, so wird es gut sein, den ersten Theilpunkt

L′ tiefer zu nehmen als den Punkt 1 (§. 762). Ferner wurde hier jeder Gewölbeeinmündung ein Gurtbogen beigefügt, d. h. ein Vorsprung, der von einem Cylinder (a′s′b′, a b b_2 a_2) begrenzt wird, dessen Länge gering, und dessen Durchmesser etwas kleiner ist, als der des Tonnengewölbes; dadurch erhält letzteres mehr Festigkeit, indem die Dicke des Gewölbes sowie die der Pfeiler vermehrt wird. Weil aber die beiden Cylinder A′Y′B′ und a′s′b′ concentrisch sind, so können dieselben Fugenebenen für beide angewendet werden, wodurch bloss auf der horizontalen Projection ein kleiner Vorsprung der Wölbungskanten entsteht, wie die Figur es zeigt.

Man bemerke auch, dass hier die letzten Schichten der Kugelcalotte weggelassen wurden, was der Stabilität des Gewölbes nicht den geringsten Eintrag thut (§. 682).

Was den Pfeilertheil betrifft, der dem Bogen B C entspricht, so ist seine Wand ein vertikaler Cylinder; doch kann man statt des letztern auch nur die Vertikalebene anwenden, welche durch die Punkte B und C geht, weil der Unterschied zwischen dem Bogen B C und seiner Sehne, in der Höhe der Anlaufsebene, durch das Karnies oder die gewöhnlich hier angebrachten Gesimse verdeckt wird.

Fig. 3 stellt den ganzen Gewölbestein der ersten Schichte des Strebebogens A H dar; sein grosses Volumen aber erfordert meistens, dass man ihn durch Meridianebenen in zwei oder drei partielle Gewölbesteine theile, wie es auf Fig. 1 angegeben ist. Dadurch aber wird die Behauung des Steines nach §. 766 nur um so leichter.

§. 769.

Fig. 1 und 2. Manchmal geschieht es, dass man, um dem Gewölbe mehr Höhe zu geben, die Kugel, deren horizontaler Grundschnitt der grösste Kreis A B C D E... ist, durch den Kreis (X Y Z, X′Y′Z′) begrenzt, der auf den Scheiteln der Tonnengewölbe aufliegt; von diesem Kreise an bildet man sodann den obern Theil der innern Wölbungsfläche mittelst einer neuen Halbkugel vom Durchmesser X′Z′. Um aber die Unterbrechung, welche auf diese Art die innere Wölbung erleidet, zu verbergen, wird längs des Kreises (X Y Z, X′Y′Z′) eine vorspringende Einfassung angebracht. Oefters auch wird über letzterm Kreise ein runder Thurm oder eine cylindrische Mauer errichtet, welche eine halbkugelige Calotte trägt. Alle diese Verbindungen geben zu keinen neuen Aufgaben der Stereotomie Veranlassung; die nächste Tafel enthält ein Beispiel für den letztangeführten Fall.

Man bemerke endlich, dass die Anzahl der in einer Halbkugel angebrachten Strebebögen mehr als vier sein kann, besonders wenn jene Einmündungen von Tonnengewölben nicht als Thüren oder Gallerieeneingänge, sondern als Fensteröffnungen zu dienen bestimmt sind, durch welche das Innere des Domes erhellt werden solle. Hiebei hat man aber Sorge zu tragen, dass die Axen der verschiedenen Tonnengewölbe alle durch den Mittelpunkt der Kugel gehen und dass die Tonnengewölbe selbst unter sich gleich seien, oder wenigstens, dass alle die nämliche Höhe haben, wenn das Hauptgewölbe ellipsoidisch ist. Denn man kann auch in Gewölben letzterer Art Strebebögen anbringen, was alsdann einem länglichten Kreuzgewölbe entspricht (§. 722). Dieser Fall ist jedoch sehr selten, und der Leser erkennt wohl von selbst die Abänderungen, welche gegenwärtige Figur erleiden müsste, wenn sie auf diesen Fall angewendet werden sollte (§§. 695, 703 u. 713).

Kern-Strebebögen mit abgestumpften Pfeilern, welche einen runden Thurm tragen.

§. 770.

Es sei A B C D E F G H ein Quadrat, dessen Ecken abgestumpft sind durch die Geraden A H, B C, D E, F G; Taf. 53. Fig. 4.

diese sind so genommen, dass sie ein in einen Kreis einschreibbares Viereck bilden, das denselben Mittelpunkt O hat, wie das ursprüngliche Quadrat. Auf den Seiten AB, CD, EF, GH beschreibe man, als über Durchmessern, vier vertikale Halbkreise und betrachte diese als die Stirnbögen von vier geraden Tonnengewölben, die durch Gurtbögen verstärkt sind, deren einer a′y′b′ zum geraden Durchschnitt hat. Ueber diesen Tonnengewölben errichte man einen runden Thurm, d. h. eine cylindrische Mauer, deren innere Wand ein vertikaler Cylinder ist, welcher den Horizontalkreis (V X Y Z, X′ Y′ Z′), der die Scheitel der vier Tonnengewölbe berührt, zur Basis hat. Es bleibt nun noch übrig, jeden der vier Räume, welche auf Vierecke wie B Y Z C projicirt sind, zu überdecken. Man könnte hiezu, wie in voriger Figur, einen Theil der Kugel anwenden, welche den um das Vieleck A B C D... beschriebenen Kreis zum grössten Kreise hätte. Denn diese Kugel würde offenbar (§. 761) durch den Bogen (Y Z, Y′Z′), sowie durch die Hauptkreise (B Y, B′ Y′), (C Z, C′ Z′) der Tonnengewölbe gehen; sie würde zwar den obersten Stein des Pfeilers in einem Kreisbogen B C und nicht in der Sehne desselben schneiden, aber der ohnehin geringe Unterschied würde durch das Karnies oder die gewöhnlich hier angebrachten Gesimswerke maskirt werden. Somit wäre diess also die beste Form für den gesuchten Strebebogen, besonders auch wegen der Fugen, welche man, wie in voriger Figur, vollkommen normal nehmen könnte. Dessen ungeachtet wird es interessant sein, eine Fläche kennen zu lernen, Kernstrebebogen (*Pendentif en voussure*) genannt, die zwar von weniger einfacher Natur ist, dafür aber eine genaue Anschliessung der Wölbungsfläche des Strebebogens an die geradlinige Seite B C des Pfeilers gestattet.

§. 771.

Man lege eine Vertikalebene $O \alpha \varepsilon$ senkrecht durch die Mitte α des Pfeilers B C, und nachdem man sie in Fig. 6 aufgeklappt, bemerke man auf ihr den Punkt (δ, δ'), in welchem sie den oberen Kreis (Y Z, Y′ Z′) des Strebebogens schneidet. Hierauf lasse man durch die Punkte (α, α'), (δ, δ') einen Kreisbogen gehen, dessen Mittelpunkt (ω, ω') in der Anlaufsebene liege. Nun nehme man diesen Bogen $(\alpha \delta, \alpha' \delta')$ und die beiden Hauptkreise (B Y, B′ Y′), (C Z, C′ Z′) der Tonnengewölbe als Leitlinien an, und lasse über diese drei Linien einen veränderlichen aber stets horizontalen Kreis hingleiten, so erhält man auf diese Art die Wölbungsfläche des Strebebogens. Man kann jede Lage der Erzeugenden finden mittelst schneidender Horizontalebenen, wie z. B. 2 S′ auf Fig. 5, und 2 γ' auf Fig. 6; denn diese Ebene schneidet die Leitlinien in den Punkten S, γ, T, durch welche man einen Kreis S γ T gehen lassen muss, dessen Mittelpunkt O_2 leicht zu finden ist. Ebenso verfährt man, um den Kreis L θ K zu erhalten; und ist endlich die Erzeugende in der Anlaufsebene angelangt, so liegen die drei Punkte B, α, C, durch welche sie gehen muss, in gerader Linie, und sie nimmt also, einem stetigen Gesetze folgend, die verlangte geradlinige Form B α C an.

§. 772.

Um die Zurüstung dieses Gewölbes zu zeichnen, theile man den Halbkreis A′ Y′ B′ in eine ungerade Anzahl gleicher Theile, mit der Beschränkung jedoch, dass der Theilpunkt L′ nicht höher sei, als die obere Lagerfläche 1 K′ der ersten Schichte. Hier ist er in derselben Höhe genommen wie 1 K′, und da die Horizontalfläche L′K′1 nur eine geringe Schiefe gegen das Tonnengewölbe und den Strebebogen darbietet, so macht man hier keinen eigentlichen Lagerfugenschnitt. In der zweiten Schichte wird die Fuge des Tonnengewölbes gebildet durch die Normalebene O O′ M′ P′, welche die Wölbung des Strebebogens in einer leicht zu bestimmenden Curve M′ P′ schneidet. In der dritten Schichte muss die Normalebene O O′ N′ des Tonnengewölbes zuerst bis u′, wo der Strebebogen endigt, verlängert werden; hierauf bis U′, so dass sie den vertikalen Cylinder X Y Z, der die innere Wand des runden Thurmes bildet, in einem sehr gedehnten Ellipsenbogen schneidet.

§. 773.

Was die Fuge des Strebebogens längs des Kreises (P′ Q′, P Q) betrifft, so wurde hier vorausgesetzt, die Horizontalebene 2 Q′ P′ werde noch beibehalten; würde man aber finden, dass diese Ebene zu schief ist, so müsste man (ohne die verschiedenen Normalen der inneren Wölbung längs jenes Kreises zu construiren, was sehr mühsame, in §. 716 angedeutete Operationen erforderte) als Fuge den Kegel annehmen, der zur Leitlinie den Kreis (P Q, P′ Q′) und zum Scheitel den Punkt (ω, ω') hätte, der durch die auf den vertikalen Bogen ($\alpha' \delta'$, $\alpha \delta$) gezogene Normale $\omega' \gamma' \lambda'$ bestimmt würde. Bei dieser Annahme müsste man auch die Höhe [1, 2] der zweiten Schichte ein wenig vergrössern (Fig. 6), damit die conische Fuge eine hinreichende Breite $\gamma' \lambda'$ erhielte; oder man könnte auch den Punkt γ' etwas tiefer setzen, und mithin die Horizontalebene (P′ Q′, P Q) etwas unterhalb der Horizontalebene 2 nehmen. Es wäre ferner auch noch der Durchschnitt dieser conischen Fuge mit der Fugenebene O O′ M′ P′ des Tonnengewölbes zu zeichnen gewesen; um aber die in einem ohnehin sehr verkleinerten Massstabe gezeichnete Figur nicht mit Linien zu überhäufen, wurde solches unterlassen.

§. 774.

Die Stossfugen werden gebildet durch Ebenen, welche man durch die Vertikale O legt, und zwar in derjenigen Vertheilung, wie sie in Fig. 4 und 5 dargestellt ist. Die Behauung der Steine wird wie in §. 766 ausgeführt, nachdem man die Fugenbrettungen analog denen der Taf. 52, Fig. 6 construirt hat; nur muss man, weil die Wölbung des Strebebogens keine Erzeugende von constanter Form hat (§. 771), sich wenigstens drei Lehren verschaffen, die nach den Kreisen P Q, L K und einem dazwischen liegenden Kreise ausgeschnitten sind; hierauf sie an die kreisförmigen Leitlinien L M, K R anlegen, indem man sie stets in horizontaler Lage erhält. Oberhalb der dritten Schichte gehören die Gewölbesteine nur dem runden Thurme an, und können ohne Schwierigkeit, wie für eine cylindrische Mauer, behauen werden

Ringförmiges Kreuzgewölbe.
(Voute d'arêtes en tour ronde.)

§. 775.

Das Hauptgewölbe ist hier ein ringförmiges Tonnengewölbe *(berceau tournant)*, das zu Pfeilern zwei cylindrische Mauern hat, deren Grundschnitte auf der Anlaufsebene die vier mit den Halbmessern ω D, ω A, ω B, ω d beschriebenen concentrischen Kreise sind. Die innere Wölbung ist ein Wulst *(tore)* oder ringförmige Fläche, und wird erzeugt durch den Halbkreis A′ F′ E′ B′ (Fig. 4), der, in die Vertikalebene A′ B′ ω aufgerichtet, sich um die vertikale Axe ω dreht. Man zeichne zuerst die Zurüstung dieses Gewölbes, als ob es allein vorhanden wäre; zu diesem Zwecke theile man den Meridian A′ F′ E′ B′ in eine ungerade Anzahl gleicher Theile und ziehe die Normalen F′ G′, E′ H′, ... bis zu ihrem Durchschnitt mit den Horizontalebenen 1 G′, 2 H′, ... welche die Mauer in Schichten abtheilen. Gewöhnlich werden die Höhen dieser verschiedenen Schichten gleich genommen; da aber die wichtigen geometrischen Betrachtungen, die in Beziehung auf die erste Fuge F′ G′ anzustellen sind, es erfordern, dass dieselbe auf der Figur nicht zu schmal ausfalle, so wurde jene Bedingung der Gleichheit hier überschritten. Die Fugen des Schlusssteines, wie E′ H′, schneiden hier die Rückenfläche unter einem ziemlich spitzigen Winkel; dieser Uebelstand verschwindet aber bei der wirklichen Anwendung, weil diese stets viel mehr als fünf Gewölbesteine verlangt, wodurch alsdann die letzte Fuge der vertikalen Richtung viel näher kommt, als es hier auf der Figur geschieht. Gebrochene Taf. 54. Fig. 3.

Fugen oder Hacken dürfen nie beim Schlussstein angewendet werden (§. 611), wohl aber bei anderen Gewölbesteinen, trotz der in dem eben citirten Paragraphen bezeichneten Nachtheile, und die ganze Zurüstung kann somit auch nach Fig. 2 angeordnet werden. Da aber Abänderungen dieser Art die Aufgabe nicht schwerer und interessanter, sondern nur weitläufiger machen, so wird hier die Zurüstung Fig. 4 angenommen.

Während der Umdrehung des Meridians A′ F′ E′ B′ um die Vertikale ω beschreiben die Punkte F′, E′,... horizontale Kreise F M..., E N...., welche die Wölbungskanten des ringförmigen Gewölbes sind. Die Halbmesser F′ G′, E′ H′, ... aber, welche die vertikale Axe ω in unveränderlichen Punkten schneiden, beschreiben conische Zonen, durch welche die auf der innern Wölbung normalen Lagerfugen gebildet werden. Nun darf man, um die Zeichnung dieses Gewölbes zu vollenden, nur noch jede Gewölbesteinreihe durch Meridianebenen, wie $\gamma\,\varepsilon$,...., in die einzelnen Gewölbesteine zerlegen, wobei man die Fugen von einer Schichte zur andern, wie in Fig. 6 der Taf. 52, mit einander abwechseln lassen muss.

§. 776.

Fig. 3. Nun aber handelt es sich darum, in diesem Ringgewölbe ein oder mehrere Thore anzubringen, deren jedes zwischen zwei vertikalen nach der Axe ω convergirenden Ebenen C c und D d enthalten sei; ferner soll das Gewölbe, durch welches ein solches Thor überdeckt wird, die nämliche Anlaufsebene und dieselbe Höhe haben, wie das Tonnengewölbe selbst. Es muss also die innere Fläche dieses Thorgewölbes durch ein Conoid gebildet werden, das durch die Bewegung einer Geraden entsteht, welche, indem sie stets horizontal bleibt, über die Vertikale ω und eine zweite Leitcurve hingleitet, die auf folgende Art bestimmt wird. Man rectificire den Bogen C O″ D und mache seine Länge gleich der Tangente C″ O″ D″, welche ihn in seiner Mitte berührt. Hierauf beschreibe man über C″ D″, als der grossen Axe, eine Ellipse C″ Z″ D″, deren vertikale Halbaxe O″ Z″ gleich dem Halbmesser O′ Z′ des Ringgewölbes sei, und denke sich die Vertikalebene dieser Ellipse so um den äussern Cylinder, welcher den Kreis C O″ D zur Basis hat, herumgelegt, dass die Abscissen mit den Bögen dieses Kreises, und die Ordinaten mit den Cylinderkanten zusammenfallen: hiedurch verwandelt die Ellipse sich in eine Linie von doppelter Krümmung, welche sofort als Basis oder als zweite Leitlinie des Conoids angenommen wird, und welche zugleich den Stirnbogen dieses kleinen Gewölbes bildet. *)

§. 777.

Um den Durchschnitt des Conoids mit dem Ringgewölbe zu erhalten, muss man beide durch verschiedene Horizontalebenen schneiden. Diejenige, welche durch den Punkt F′ des Meridians geht (Fig. 4), schneidet den Wulst in zwei auf F M und $F_2 L_2$ projicirten Kreisen, und das Conoid in zwei Geraden fω und $f_2\omega$; aus dem Zusammentreffen dieser vier Linien aber ergeben sich die Punkte M und M_2, L und L_2. Um die Erzeugende fω z. B. zu finden, muss man auf der Ellipse C″ Z″ D″ den Punkt f″ suchen, welcher die gleiche Ordinate hat, wie der Punkt F′; hierauf muss man den Bogen O″ f gleich der Abscisse O″ f′ nehmen und den Punkt f mit ω verbinden: dieses Verfahren rechtfertigt sich aus der im vorigen Paragraphen

*) Es ist am Besten, die Ellipse C″ Z″ D″ mittelst zweier über den Axen beschriebener Kreise zu zeichnen, wie auf der Figur geschehen, weil man dadurch unmittelbar die Punkte e″, f″, ... erhält, welche in gleicher Höhe mit E′, F′, ... liegen, und die man gleich nachher braucht. Ueberdiess ist es, bei dieser Construction, sehr leicht, die Tangenten an jenen Punkten zu finden, welche man ebenfalls nöthig hat. Die Gleichung dieses Conoids findet man in der Analytischen Geometrie im Raum, §. 309.

gegebenen Definition von der Basis des Conoids. Durch Wiederholung ähnlicher Operationen erhält man endlich die Curven

$$A\,M\,N\,O\,K_2\,L_2\,B_2 \text{ und } B\,L\,K\,O\,N_2\,M_2\,A_2$$

als horizontale Projectionen der windschiefen Linien, in welchen sich der Wulst und das Conoid schneiden; aus der Darst. Geom. §. 633 ist bekannt, dass diese Projectionen archimedische Spiralen sind. Man bemerke aber wohl, dass die beiden inneren Wölbungsflächen von ihrem gegenseitigen Zusammentreffen an unterbrochen werden müssen, damit ein freier Durchgang unter beiden Gewölben entstehe; d. h. im Conoid müssen alle inneren Theile der Erzeugenden, wie

$$A\,B,\; M\,L,\; N\,K,\; N_2\,K_2,\; M_2\,L_2,\; A_2\,B_2,$$

und im Wulste alle inneren Bögen, wie

$$A\,A_2,\; M\,M_2,\; N\,N_2,\; K\,K_2,\; L\,L_2,\; B\,B_2$$

weggelassen werden. Hieraus folgt, dass die beiden Winkelräume A O B, A_2 O B_2 vom Wulste, und die Räume A O A_2, B O B_2 vom Conoid überdeckt werden, wodurch zwei sehr hervorspringende, in A O A_2 und B O B_2 projicirte Gratbögen auf der innern Wölbung entstehen. Endlich bemerke man noch, dass die Horizontalprojection als von oben gesehen angenommen wird, woraus sich die verschiedenen Arten der Punktirung erklären werden.

§. 778.

Normalfugen. Im Ringgewölbe wird längs der Wölbungskante F M die Lagerfuge (wie bereits in §. 775 gesagt worden) durch eine zwischen die Kreise F M und G X projicirte conische Zone gebildet. Im Conoid aber und zwar längs der Wölbungskante f M ω muss die Fuge der Ort aller Normalen sein, welche man durch die Punkte der Geraden f M ω auf jene Fläche gefällt hat; um nun diese Normalen zu erhalten, muss man zuerst die Berührungsebenen construiren, was nach §. 568 der Darstellenden Geometrie mittelst eines Anschliessungs-Paraboloids geschieht. Fig. 3 u. 6.

Man nehme zu diesem Zwecke eine neue vertikale Projectionsebene an (Fig. 6), welche senkrecht auf der Erzeugenden f M ω stehe, und auf welcher eben diese Gerade sich als ein einziger Punkt M′ projicirt, der in einer Höhe U′ M′ = f′ f″ = F F′ liegt. Hierauf ziehe man die Tangente f″ T″ an die ebene Ellipse, und trage alsdann die Subtangente f′ T″ auf die Tangente f T der Basis des äussern Cylinders; projicirt man nun den Punkt T in T′ auf Fig. 6, so ist die Gerade (f T, M′ T′) Tangente an der Basis des Conoids. Lässt man nun über (f T, M′ T′) und über die Vertikale ω die Erzeugende (f M ω, M′) in immer horizontaler Lage hingleiten, so erzeugt sie ein Paraboloid, welches längs (f M ω, M′) dieselben Berührungsebenen hat, wie das Conoid; und die in der Anlaufsebene gezeichnete Gerade T ω ist offenbar eine zweite Lage der Erzeugenden dieses Paraboloids. Schneidet man nun letztere Fläche durch verschiedene Vertikalebenen M P, L Q, ..., die senkrecht auf f M ω stehen, und mithin den beiden Leitlinien parallel sind, so ist bekannt, dass die auf diese Art entstandenen Schnitte geradlinig sein müssen. Projicirt man daher die Punkte P, Q, ... auf Fig. 6 in P′, Q′, so sind die Ebenen M′ T′ T, M′ P′ P, M′ Q′ Q, ... Berührungsebenen am Paraboloid und mithin auch am Conoid in den Punkten f, M, L, ...

Nun können die Normalen des Conoids für die letztgenannten Punkte leicht gefunden werden; es sind die Geraden (M′ R′, f R), (M′ S′, M S), (M′ V′, L V) .., die zusammen die Fuge des conoidischen Gewölbes bilden; diese Fuge ist ebenfalls ein hyperbolisches Paraboloid (Darst. Geom. §. 583), und es müsste sogar mit dem Anschliessungs-Paraboloid zusammenfallen, wenn man letzteres eine Viertelsumdrehung um die Horizontale (ω M f, M′) machen liesse. Um ferner die Fuge des Conoids in derselben Höhe zu begrenzen, wie

die conische Fuge des Ringgewölbes, muss man auf Fig. 6 die Vertikale U′ G″ gleich G G′ (Fig. 4) nehmen, und hierauf durch G″ die Horizontalebene G″ R′ legen, welche die verschiedenen Normalen in den Punkten (R′, R), (S′, S), (V′, V), ... schneiden; zieht man nun durch diese die Curve R S V ..., so ist solche die Grenze der Fuge des conoidischen Gewölbes. Um diese Curve leichter zeichnen zu können, merke man sich, dass sie eine gleichseitige Hyperbel ist, welche die Gerade ω M f und die im Punkte ω errichtete Senkrechte zu Asymptoten hat; *) der Scheitel dieser Hyperbel wird also unmittelbar gefunden, wenn man eine mittlere Proportionale zwischen den beiden asymptotischen Coordinaten eines der Punkte der Curve sucht, wie solches auf der Figur angedeutet ist.

§. 779.

Die Hyperbel R S V wird im Punkte X von dem Kreise G X geschnitten, welcher die conische Fuge des Ringgewölbes begrenzt; dieser Punkt gehört also dem Durchschnitte M x X beider Fugen an. Um noch irgend einen andern Punkt dieser Durchschnittscurve zu finden, lege man durch die Mitte g′ von F′ G′ eine Horizontalebene, welche die conische Fuge in dem Kreise g x schneidet: nimmt man alsdann auf Fig. 6 die Höhe U′ g″ = g g′, so schneidet die Horizontale g″ r′ die verschiedenen Normalen in Punkten, welche, auf die Horizontalebene projicirt, die Hyperbel r x liefern, aus deren Durchschnitt mit g x sich der gesuchte Punkt x ergibt. Diese neue Hyperbel ist der erstern ähnlich, und hat die nämlichen Asymptoten.

§. 780.

Fig. 3 u. 7. Die obere Fuge des Gewölbesteines E′ F′ G′ I′ H′, von dem hier insbesondere die Rede ist, wird, in dem Ringgewölbe, durch die conische Fuge N E H Y gebildet, welche von der Normale E′ H′ bei ihrer Umdrehung um die Vertikale ω erzeugt wird; im Conoid aber ist diese Fuge der Ort aller Normalen, welche durch die Punkte der Erzeugenden ω N e auf die conoidische Fläche errichtet werden. Um diese Normalen zu finden, nehme man eine neue vertikale Projectionsebene (Fig. 7) an, welche senkrecht auf ω N e stehe, und auf welcher sich diese Gerade in einem einzigen Punkte N′ projicirt, der in einer Höhe W N′ = e′ e″ = E E′ liegt. Hierauf ziehe man an die ebene Ellipse die Tangente e″ t″, welche sich auf e θ projicirt, wenn jene Curve um den Cylinder gewunden wird; da aber hier der horizontale Grundschnitt dieser Tangente in eine unbequeme Entfernung fällt, so wende man den Punkt derselben an, welcher in θ projicirt ist, oder in der Vertikalebene ω O″ liegt. Man darf aber nicht glauben, dieser unbekannte Punkt sei derjenige, welcher in Fig. 5 durch t″ bezeichnet ist; denn wegen der Umgestaltung, welche die ebene Ellipse erleidet, wenn sie um den Cylinder C O″ D gewunden wird, muss man die Länge e θ von e′ nach ζ tragen, und hierauf die Vertikale $\zeta\,\zeta''$ errichten, welche den gesuchten Punkt ζ'' liefert. Trägt man also auf die aus θ

*) Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke auf Fig. 6 findet man leicht, dass das Product einer jeden Subtangente in die entsprechende Subnormale constant ist, d. h. dass

$$U'T' \times G''R' = U'P' \times G''S',$$

oder auch, auf Fig. 3

$$fT \times fR = MP \times MS;$$

setzt man nun statt der Linien f T und M P die ihnen proportionirten Distanzen f ω und M ω, so erhält man

$$f\omega \times fR = M\omega \times MS, \text{ oder auch } xy = x'y',$$

wenn man die Gerade ω f zur Axe der x und eine im Punkte ω errichtete Senkrechte zur Axe der y nimmt. Somit ist also die Gleichung der Curve R S V von der Form $xy = k^2$, wo k eine Constante bezeichnet von der gemeinschaftlichen Grösse der beiden asymptotischen Coordinaten des Scheitels.

gezogene Vertikale eine Höhe u $\theta' = \zeta\,\zeta''$, so ist die Gerade ($e\,\theta$, $N'\,\theta'$) die Tangente an der Curve von doppelter Krümmung.

Lässt man nun die Erzeugende ω N e in stets horizontaler Lage über diese Tangente ($e\,\theta$, $N'\,\theta'$) und die Vertikale ω hingleiten, so erzeugt sie ein Anschliessungs-Paraboloid; und ist sie zum Punkte (θ, θ') gekommen, so projicirt sie sich horizontal auf $O\,O''\,\theta$ und vertikal auf die durch θ' parallel mit der Projectionsaxe gezogene Gerade $\theta'\,\omega'$. Schneidet man nun dieses Paraboloid durch verschiedene Vertikalebenen e θ, n p, l q, ..., die man senkrecht auf ω N e und mithin parallel mit beiden Leitlinien nimmt, so erhält man geradlinige Schnitte (Darst. Geom. §. 539), welche sich auf die Geraden $N'\,\theta'$, $N'\,p'$, $N'\,q'$, ... projiciren. Diese Geraden sind, auf der Vertikalebene, die Grundschnitte und zugleich die Projectionen der Berührungsebenen am Paraboloid und folglich auch am Conoid für die Punkte e, n, l, ...; mithin erhält man als Normalen für eben diese Punkte die Geraden ($N'\,\varrho'$, $e\,\varrho$), ($N'\,S'$, n s), ($N'\,v'$, l v), welche zusammen wieder ein hyperbolisches Paraboloid bilden (Darst. Geom. §. 583), das dem Conoid längs der Wölbungskante ω N e als Fuge dient.

§. 781.

Es muss nun noch diese windschiefe Fuge durch die nämliche Horizontalebene $H'\,I'$ (Fig. 4) begrenzt werden, durch welche auch die conische Fuge des Ringgewölbes begrenzt wird. Man nehme desshalb auf Fig. 7 die Höhe $W\,H'' = H\,H'$, lege durch den Punkt H'' eine Horizontale, welche die Normale in den Punkten ϱ', s', v' schneidet, und projicire diese letzteren auf Fig. 3, wodurch man die gleichseitige Hyperbel ϱ s v erhält, deren Asymptote die Gerade ω N e ist.

Diese Hyperbel schneidet den Kreis H Y in einem Punkte Y, welcher der Durchschnittscurve N Y der windschiefen mit der conischen Fuge angehört. Um noch einen andern Punkt eben dieser Curve zu erhalten, darf man nur beide Fugen durch eine und dieselbe Horizontalebene schneiden, und verfahren, wie in §. 779.

§. 782.

Verstreckte Brettungen. Da, in jeder Schichte, diejenigen Theile beider Gewölbe, welche in der Gratcurve $A\,M\,N\,O\,B_2$ aneinanderstossen, aus einem einzigen und demselben Steine bestehen müssen, und doch das Volumen des letztern nicht zu gross sein darf, so muss man den Gratgewölbestein, der bisher insbesondere betrachtet wurde, auf der einen Seite durch eine gewisse Meridianebene $\gamma\,\varepsilon$ und auf der andern durch einen vertikalen Cylinder $\alpha\,6$ begrenzen, der mit dem Thurme concentrisch ist; diese beiden Hauptflächen werden alsdann beziehungsweise normal auf beiden Wölbungen sein. Somit ist also $\alpha\,6\,X\,\gamma\,\varepsilon\,N\,\alpha$ die vollständige Projection dieses Gewölbesteines. Um ihn aber zu behauen, muss man vorerst annehmen, der Cylinder $\alpha\,6$ verlängere sich bis zu seinem Durchschnitte δ mit der Meridianebene, so dass es sich bei den ersten Operationen also nur um die Herstellung eines prismatischen Körpers handelt, der das Viereck $\alpha\,\delta\,\varepsilon\,N$ zur Basis hat. Fig. 3 u. 8.

Hat man dem Steinblocke diese Form gegeben, so müssen die Durchschnitte der beiden cylindrischen Seitenflächen $\alpha\,\delta$ und N ε mit der windschiefen Wölbung und den Fugen des Conoids gesucht werden. Man entwickle daher beide Cylinder, indem man auf Fig. 8 die Abscissen $\alpha'\,\psi'$, $\alpha'\,\lambda'$, $\alpha'\,\mu'$, $\alpha'\,6'$, $\alpha'\,\delta'$ den gleichnamigen Bögen auf Fig. 3 gleich macht, und hierauf Ordinaten errichtet, deren Grösse leicht zu finden ist. Denn was die Punkte α'' und μ'' betrifft, so müssen sie offenbar dieselbe Höhe erhalten, wie e'' und f'' auf der Ellipse der Fig. 5. Um ferner die Höhe des zwischen ihnen liegenden Punktes λ'' zu erhalten, verlängere man die beliebig gezeichnete Erzeugende $\lambda\,\pi\,\omega$ des Conoids (deren man auch noch mehrere andere ziehen

kann) bis zum Punkte l_2, wo sie den äussern Cylinder des Thurmes trifft; hierauf mache man die Abscisse $O'' l'$ gleich dem rectificirten Bogen $O'' l_2$ und errichte die Ordinate $l' l''$ der ebenen Ellipse, so gibt diese die Höhe des Punktes λ'' an. Die Curve $\alpha'' \lambda'' \mu''$, welche man auf diese Art als Verwandelte der Durchschnittscurve des Conoids mit dem vertikalen Cylinder $\alpha \beta$ erhält, muss eine Ellipse sein, welche eine eben so grosse vertikale Axe hat, wie $C'' Z'' D''$ (Analytische Geometrie im Raum, §. 309), was hier schon daraus folgt, dass die Bögen $\alpha \lambda$ und $e\, l_2$, $\alpha \mu$ und $e\, f$ mit ihren Halbmessern in Proportion stehen. Was die der obern Fuge entsprechende Curve $\alpha'' \psi''$ betrifft, so muss man die Ordinate $\psi' \psi''$ gleich $H H'$ auf Fig. 4 nehmen; und um die Curve $\mu'' \beta''$, die der untern Fuge entspricht, zu erhalten, muss $\beta' \beta'' = G G'$ genommen werden. Wie die Ordinate für einen zwischenliegenden Punkt gefunden werden kann, ist leicht einzusehen.

Die zweite Brettung $y'' N'' \pi'' \eta'' \varepsilon''$ der Fig. 8 wird auf eine ganz ähnliche Art construirt, indem man die Bögen des Kreises $N \varepsilon$ als Abscissen nimmt. Der Grundschnitt der untern auf $f M X R$ projicirten, windschiefen Fuge ist weggelassen worden, weil man bei der Behauung keinen Gebrauch davon machen könnte; denn wollte man diese Fuge bis zum vertikalen Cylinder $N \varepsilon$ verlängern, so müsste man ein Stück von dem Steine zerstören, das doch beibehalten werden muss.

§. 783.

Fig. 4. Die Behauung des Gewölbesteines erfordert noch, dass man die wahre Grösse der untern conischen Fuge, welche auf $\varphi M X \gamma$ projicirt ist, kenne. Zu diesem Zwecke muss man den Kegel entwickeln, welcher durch Umdrehung der Normale $O' F' G'$ um die Vertikale ω erzeugt wird. Man klappe daher letztere Gerade mit dem Meridian $A' F' B'$ um $A' O' \omega$ auf, so wird sie offenbar die auf $\omega A'$ senkrechte Lage $\omega \omega''$ annehmen, und nun wird der Durchschnitt der Geraden $\omega \omega''$ und $G' O' \omega''$ der Scheitel des fraglichen Kegels sein. Wenn man daher mit den Halbmessern $\omega'' F'$, $\omega'' G'$, $\omega'' g'$ drei Kreisbögen $F' M''$, $G' X''$, $g' x''$ beschreibt, die an absoluter Länge den Bögen φM, γX, $\gamma_2 x$ der Horizontalprojection gleich sind, und die Curve $X'' x'' M''$ zeichnet, so ist $G' X'' M'' F''$ die Brettung der conischen Fuge, um die es sich handelt.

§. 784.

Taf. 54. Fig. 9. **Behauung des Gewölbesteines.** Man behaue zuerst ein gerades Prisma (Fig. 9), das zur Basis den Umriss $\alpha \delta \varepsilon N$ der Horizontalprojection (Fig. 3) und zur Höhe die Höhendifferenz der beiden Punkte F' und H' auf Fig. 4 habe; hierauf lege man auf die convexe und die concave Seitenfläche dieses Prisma die Brettungen der Fig. 8. Diese Brettungen müssen in biegsamem Carton ausgeführt sein, damit, wenn man sie auf jene beiden cylindrischen Seitenflächen anlegt, die Curven wieder die ursprüngliche Form annehmen, welche sie vor der in §. 782 ausgeführten Entwickelung hatten. Nun kann man auf das Prisma (Fig. 9) die Umrisse $y N' \pi \eta \varepsilon \varepsilon'$, $\psi \alpha' \lambda \mu \beta \delta'' \delta'$, so wie die Geraden $\alpha' N'$, $\mu \eta$ und die Hyperbel ψy zeichnen, deren wahre Grösse aus Fig. 3 bekannt ist. Ist diess geschehen, so müssen alle durch punktirte Linien angegebenen Theile weggehauen werden, worauf die conoidische Wölbung $\alpha' N' \eta \mu$ ausgeführt wird mittelst eines Lineals $\lambda \pi$, das man über die Leitlinien $\alpha' \lambda \mu$, $N' \pi \eta$ hingleiten lässt, während man es stets durch zwei zusammengehörige Richtpunkte, wie λ und π, λ_2 und π_2, ... gehen lässt, die schon auf den Brettungen der Fig. 8 angemerkt wurden. Eben so führt man die windschiefe Fuge $\alpha' N' y \psi$ aus, indem man über die Gerade $\alpha' N'$ und die Hyperbel ψy ein Lineal hingleiten lässt, das man in einer auf $\alpha' N'$ senkrechten Richtung hält. Auf diese Art erhält man den Stein, wie in Fig. 10 dargestellt ist.

Fig. 10. Nun trage man ferner auf die Erzeugenden $\lambda \pi$, $\mu \eta$, ... der conoidischen Wölbung die Längen

$\lambda\sigma$, μM,... die man aus Fig. 3 erhält, und zeichne auf den Stein die Curve NσM, welche den Gratbogen des Gewölbesteines bildet. Alsdann zeichne man auf die windschiefe Fuge αNyψ auf ähnliche Art die Curve NY. Hierauf trage man auf die zur Seite liegende Fläche des Prisma den Umriss EFGγ'H nach der Brettung E'F'G'I'H' des Hauptes (Fig. 4) und endlich die Kreisbögen NE, YH, MF mittelst eines biegsamen Lineals und dreier nach Fig. 3 gebildeter Lehren. Nun ist es leicht, die Umdrehungsfläche ENMF auszuführen, indem man über die Bögen NE und MF eine nach dem Meridian E'F' ausgeschnittene Lehre hingleiten lässt, die stets durch zwei einander entsprechende Richtpunkte gehen muss; diese Richtpunkte können leicht auf Fig. 3 gefunden und auf Fig. 10 übergetragen werden. Die conische Fuge NYHE wird mittelst eines Lineals ausgeführt, das man über die Bögen YH, NE hingleiten und durch die leicht zu bestimmenden Richtpunkte gehen lässt. Hierauf trage man den Umriss β'X'γ' nach der in Fig. 3 angegebenen Form auf, und behaue mittelst des Winkeleisens die vertikalen Seitenflächen $\beta'\beta$XX', γ'GXX', die in einem Kreisbogen GX und einem Hyperbelbogen βX endigen, welche beide wieder aus Fig. 3 erhalten werden. Alsdann behaue man die untere conische Fuge FGXM, und rücke so lange vor, bis man auf diese Fläche die biegsame Brettung F'G'X''M'' (Fig. 4) anlegen kann; hiedurch erhält man die Curve XM, durch welche diese conische Fuge von der untern windschiefen Fuge $\mu\beta$XM getrennt wird. Diese Operation erfordert mehr Vorsicht, weil ein auswärts gehender Winkel vorkommt, und weil, wenn man den Stein über die wahren Grenzen hinaus behauen würde, diess ein Fehler wäre, der nicht mehr gut gemacht werden könnte. Hat man aber einmal diese Grenze XM erhalten, so hat die Behauung der windschiefen Fuge $\mu\beta$XM keine Schwierigkeit mehr; man bedient sich dabei eines Lineals, das man über μM und βX in einer auf μM senkrechten Richtung hingleiten lässt.

§. 785.

Bemerkungen. Um eine Tangente an irgend einen Punkt M der Gratcurve AMOB$_2$ zu ziehen, darf man nur die Berührungsebene des Conoids, welche in §. 778 construirt wurde, mit der Berührungsebene des Wulstes, welche vermittelst des Meridians A'F'B leicht construirt werden kann, combiniren. Da aber diese allgemeine Methode für die Anlaufsebene A und für den Scheitel O nicht mehr genügt, so möge der Leser in den §.§. 635 u. 636 der darstellenden Geometrie nachsehen, wo ein sehr einfaches Mittel zur Construction der Tangenten an jenen besonderen Punkten angegeben ist.

§. 786.

Statt als Leitlinie des Conoids eine um den Cylinder des runden Thurmes gewundene Ellipse anzunehmen, begnügt man sich meistens mit einer über der Sehne AA$_2$ als grosser Axe beschriebenen ebenen Ellipse von der Höhe des Ringgewölbes. Alsdann aber bietet der Hauptbogen, welcher aus dem Durchschnitte des Conoids mit dem äussern Cylinder des Thurmes entsteht, öfters Biegungen oder Aenderungen in der Krümmung dar, welche unangenehm für das Auge sind; und da gleichwohl auch hier wieder eine Entwickelung der Brettungen für die Häupter und Fugen vorgenommen werden muss, so wird also durch diese Methode nichts Erhebliches gewonnen, und es ist ihr daher die auf Taf. 54 angewendete vorzuziehen.

§. 787.

Statt der windschiefen und stetigen Fuge, welche von den verschiedenen, durch alle Punkte der Wölbungskante eαNKl (Fig. 3) auf das Conoid gezogenen Normalen gebildet wird, wenden die Werkmeister nicht selten eine Reihe von Ebenen an, deren jede normal auf einem einzigen Punkte ist. So ist z. B., in Fig. 11, Taf. 11.

die ebene Fläche $e \varrho \varrho' \alpha$ durch die Normale des Conoids im Punkte e gelegt, die Ebene $\alpha \psi \psi' \delta$ ist normal in α, und die Ebene $\delta \varphi \varphi' N$ normal in δ; hieraus folgt, dass diese verschiedenen Ebenen die horizontale Fläche des Rückens in den Geraden $\varrho \varrho'$, $\psi \psi'$, $\varphi \varphi'$ schneiden, welche mit der Erzeugenden $e \alpha \delta N$ parallel sind, und die Hyperbel $\varrho \psi \varphi Y$ ersetzen. Für's Erste aber zeigt diese unterbrochene Fuge an der Basis der kleinen triangulären Ebenen, welche auf Fig. 11 mit Schraffirung versehen sind, einwärts gehende Winkel, durch welche die Schwierigkeiten der Ausführung vermehrt werden. Für's Zweite ist es sehr selten, dass bei zwei über einander liegenden Gewölbesteinen die vorspringenden Ecken des einen vollkommen in die einwärts gehenden des andern passen; ist aber diese Bedingung nicht erfüllt, so ruhen die Lagerfugen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung sich berühren sollten, nur in einer geringen Anzahl von Punkten auf einander, und die Gewölbesteine sind also der Gefahr ausgesetzt, unter der Last, welche sie zusammendrückt, wenn einmal das Gerüste weggenommen ist, zu springen. Will man daher der Mühe, eine windschiefe Fuge auszuführen, durchaus enthoben sein, so ist es besser, für die ganze Länge $e \alpha N$ eine einzige Ebene anzuwenden und diese durch diejenige Normale des Conoids gehen zu lassen, welche der Mitte jener nie sehr beträchtlichen Länge entspricht. Eine solche stetige Fuge würde sich, gegen ihre beiden Enden hin, nicht viel von der normalen Richtung entfernen, welche sie haben sollte. Zu diesem letzten Mittel muss man auch seine Zuflucht nehmen, wenn nur die Gewölbesteine des Grates massiv sind, der übrige Theil des Gewölbes aber gemauert ist.

§. 788.

Der kreisförmige, von dem innern Cylinder c l d (Fig. 3) umschlossene Raum, kann durch ein Halbkugelgewölbe überdeckt werden, wie Fig. 1 es zeigt. Da aber der Anlauf dieses letztern Gewölbes viel höher liegt als die Scheitel der Thore, so schneiden die Gewölbesteine des conoidischen Gewölbes nur den vertikalen Cylinder c l d, auf welchem die Hauptcurve der auf dem äussern Cylinder $C O'' D$ analog ist. Wäre hingegen der Umlauf des sphärischen Gewölbes in der nämlichen Höhe, wie der des Conoids, so müsste man den Durchschnitt dieser beiden Flächen, nach §. 777, suchen, wodurch man als Hauptcurve auf der Kugel eine windschiefe Linie erhielte, deren horizontale Projection durch die Punkte c, z, d gienge; denn der Meridian dieser sphärischen Wölbung würde, nachdem man ihn um $\omega O' A'$ aufgeklappt hätte, mit der Kreislinie $c l d z'$ zusammenfallen. Hierauf würde man, ohne an den Fugen des Conoids etwas zu ändern, die Zurüstung des sphärischen Gewölbes wie in §. 749 zeichnen, aber so, dass die Theilpunkte seines Meridians höher zu liegen kämen, als die ihnen entsprechenden Wölbungskanten des Conoids, und diess aus den in der Anmerkung zu §. 749 angeführten Gründen.

Wenn endlich das Conoid eine kleinere Höhe hätte als das Ringgewölbe, so würde ihr Durchschnitt aus zwei nicht zusammenstossenden Aesten bestehen, die man wie vorher erhalten würde, und von denen der eine durch die Punkte A und A_2, der andere durch B und B_2 gienge. Dieser Fall gehörte alsdann zu der Aufgabe des §. 738 und müsste auch auf eine ähnliche Art behandelt werden, besonders in Betreff der zwischen den Wölbungskanten des Conoids und denen des Ringgewölbes bestehenden gegenseitigen Abhängigkeit.

Sechstes Kapitel.

Von den absteigenden Gewölben *(Descentes).*

Ein gerade absteigendes Gewölbe, in ein gemauertes Tonnengewölbe einmündend.

§. 789.

Ein Tonnengewölbe heisst absteigend (*rampant, en descente*), wenn die Erzeugenden des Cylinders, der die innere Wölbung bildet, gegen den Horizont geneigt sind. Diess kommt vor, wenn ein Gang überwölbt werden soll, der von oben in ein tiefer liegendes Geschoss führt. Es sei A′ L′ M′ B′ der auf die Vertikalebene A B gezeichnete Stirnbogen; A′ A sei die Höhe und A C die Basis der Rampe; alsdann gibt die Hypotenuse des aus den genannten Geraden construirten rechtwinkligen Dreiecks die Richtung der Erzeugenden des schiefen Cylinders an, der den Kreis A′ M′ B′ zur Basis hat. Um aber diese Richtung genau zu bestimmen, wende man eine Profilebene an, d. h. eine Vertikalebene E G, welche parallel mit A C ist. Nachdem man diese um E E′ auf die erste vertikale Projectionsebene aufgeklappt hat, zeichne man das rechtwinklige Dreieck E′ E G″ darauf, dessen Hypotenuse sofort die wahre Neigung der Rampe darstellen wird. Diese Hypotenuse E′ G″ ist zugleich auch der Grundschnitt der Anlaufebene auf dem Profil, während E′ A′ B′ der vertikale und G H der horizontale Grundschnitt dieser Anlaufsebene ist. Die beiden Rampen, d. h. die absteigenden Widerlager oder Pfeiler, auf welchen das Gewölbe ruht, sind auf die Rechtecke A C G E und B D H F projicirt. Taf. 55. Fig. 1.

Da endlich angenommen wird, das absteigende Gewölbe münde in ein grosses Tonnengewölbe ein, dessen Anlauf in der Horizontalebene der Figur liege, und dessen erste Erzeugende G H ist, so darf man nur, um letzteres Gewölbe völlig zu bestimmen, mit einem durch die Aufgabe selbst gegebenen Halbmesser den Kreisbogen G″ X″ auf die Profilebene zeichnen, der sofort den geraden, mittelst der Vertikalebene E G gemachten Durchschnitt des Tonnengewölbes darstellen wird. Dieser Bogen G″ X″ könnte auch eine andere, beliebige Curve sein, wenn das Tonnengewölbe nicht im vollen Bogen ist, und diess würde in den folgenden Constructionen durchaus nichts ändern.

§. 790.

Man zeichne die Zurüstung des absteigenden Gewölbes auf die Hauptebene des Gewölbes wie gewöhnlich. Nun sieht man leicht ein, dass die Wölbungskanten sich auf die Profilebene in den Geraden L″ L‴, M″ M‴, ... welche mit der Rampe E′ G″ parallel sind, projiciren. Diese Projectionen sind zugleich die wahren Längen der Wölbungskanten, denn sie treffen offenbar in den Punkten L‴, M‴, ... das Tonnengewölbe. Ebenso verhält es sich mit den Kanten der Rückenfläche, welche gleich P″ P‴, Q″ Q″ sind; so dass man jetzt nur noch die wahren Breiten der Fugen und Wölbungsflächen zu kennen braucht. Dazu aber muss man den orthogonalen Schnitt des schiefen Cylinders suchen.

§. 791.

Gerader Schnitt. Man lege senkrecht auf die Richtung E′ G″ der Rampe die Ebene Y″ E F: diese schneidet die Wölbungskanten in Punkten, welche sich in l″, m″, ... projiciren. Legt man nun die schneidende Ebene um ihren horizontalen Grundschnitt E F in die Horizontalebene um, so bleiben jene Punkte in den

Vertikalebenen L′K l, M′V m, ... welche senkrecht auf E F stehen; auch sind die wahren Entfernungen eben jener Punkte von E F durch die Geraden E l″, E m″, ... bezeichnet. Nimmt man daher

$$A a = E e'', \; K l = E l'', \; V m = E m'', ..$$

so erhält man die verschiedenen Punkte der Curve a l m b, welche der orthogonale Schnitt des schiefen Cylinders der innern Wölbungsfläche ist. Auf eine ganz ähnliche Art findet man auch die Punkte p, q, ... der Rückenkanten, mittelst der Entfernungen E p″, E q″, ...; und die Geraden l p, m q, ... messen die wahre Breite jeder Fuge.

§. 792.

Fig. 4. Verstreckte Brettungen. Um den Cylinder der innern Wölbung zu entwickeln, muss man bekanntlich den orthogonalen Schnitt a l m b rectificiren. Man nehme daher auf einer unbegrenzten Geraden die Distanzen $a_2 l_2$, $l_2 m_2$, ... gleich den Längen der Bögen a l, l m, ...; hierauf errichte man Senkrechte und trage auf diese die Längen, in welche jede Wölbungskante auf Fig. 3 durch den orthogonalen Schnitt getheilt ist; d. h. man nehme

$$a_2 A_2 = e'' E', \; l_2 L_2 = l'' L'', \; m_2 M_2 = m'' M'', ...$$
$$\text{und } a_2 A_3 = e'' G''', \; l_2 L_3 = l'' L''', \; m_2 M_3 = m'' M''', ...$$

Nun ist es leicht, die beiden Curven $A_2 L_2 M_2 B_2$, $A_3 L_3 M_3 B_3$ zu zeichnen, welche die Verwandelten des Kreises A′L′M′B′ und die Durchschnittscurve des absteigenden Gewölbes mit dem Tonnengewölbe sind; zugleich gibt Fig. 4 die wahre Grösse jeder Wölbungsfläche, wie $L_2 M_2 M_3 L_3$, an. Man nehme ferner die wahre Breite einer jeden Fuge, wie m q, aus Fig. 2 und trage sie nach $m^2 p^2$; hierauf errichte man die Senkrechte $q_2 Q_2 = q'' Q''$, so ist die Gerade $M_2 Q_2$, welche gleich M′Q′ sein muss, die auf dem Haupte liegende Fugenseite. Um die andere Seite $M_3 Q_3$, welche eine auf dem Tonnengewölbe liegende Curve ist, zu finden, nehme man wieder $q_2 Q_3 = q'' Q'''$, und um sich noch einen zwischenliegenden Punkt zu verschaffen, verfahre man auf eine ähnliche Art in Beziehung auf eine durch die Mitte der Fuge M′Q′ mit den Wölbungskanten parallel gezogene Gerade.

§. 793.

Die Curve $\alpha_2 \lambda_2 \mu_2 \beta_2$, welche man auf Fig. 4 ebenfalls dargestellt sieht, bezieht sich auf den Fall, wenn die Stirnebene des absteigenden Gewölbes eine Böschung, wie Z″E F hätte: alsdann müsste man die Distanzen e″ε, l″λ, m″μ über $a_2 b_2$ auftragen, und die Fugen endigten in der Geraden E Z″. In diesem Falle müsste man aber auch noch die wahre Grösse des Stirnbogens α′λ′μ′β′ (Fig. 1) suchen, indem man die Ebene Z″E F um ihren horizontalen Grundschnitt E F auf die Vertikalebene aufklappte. Auch müsste man die Fugenseiten aufklappen, um die wahre Grösse der Seiten eines jeden Gewölbesteinhauptes zu erhalten; es bleibt aber dem Leser überlassen, Alles das auszuführen, was diesen besondern Fall betrifft, der hier nur angedeutet werden sollte.

§. 794.

Behauung der Gewölbsteine. Als Beispiel nehme man denjenigen, der L′M′Q′R′S′P′ zum Haupte hat. Will man nun aus dem Rechtwinkligen arbeiten, so stelle man zuerst ein gerades Prisma her, das die Brettung l m q r s p des orthogonalen Schnittes zur Basis und die aus Fig. 3 erhaltene Distanz Q″y″ zur Länge habe. Hierauf lege man auf die Seitenflächen dieses Körpers, welche den Linien l m, m q, l p entsprechen, die Brettungen der Wölbungsfläche und der anliegenden Fugen (Fig. 4) und zeichne die Umrisse

beider Gewölbesteinhäupter. Die Seitenfläche des äussern Hauptes ist eben und also leicht zu behauen; und um die Hauptfläche auf dem Tonnengewölbe auszuführen, wende man ein Lineal an, das man über jenen Umriss hingleiten und durch die, leicht von der Figur auf den Stein überzutragenden Richtpunkte gehen lässt.

Mittelst des Schrägmasses. Nachdem man eine Seitenfläche des Steines hergerichtet, und die Brettung der ebenen Fuge, $M_2 Q_2 Q_3 M_3$ (Fig. 4) darauf angelegt, bilde man ein Schrägmass, dessen Eröffnung dem geradlinigen Winkel l m q (Fig. 2) gleich ist, und arbeite nun mittelst desselben die platte Wölbungsfläche $M_2 M_3 L_3 L_2$ aus. Auf dieser ziehe man die Gerade $L_2 L_3$ in einer Entfernung von ihrer Parallelen $M_2 M_3$, welche der Sehne lm gleich ist. Ebenso behaue man mittelst eines Schrägmasses, dessen Winkelöffnung gleich p l m ist, die untere Fuge und lege auf sie die Brettung $L_2 L_3 P_3 P_2$ (Fig. 4) an. Nun kann man das äussere Haupt, das eben ist, und von welchem man drei Seiten $Q_2 M_2$, $M_2 L_2$, $L_2 P_2$ kennt, behauen. Ist diess geschehen, so verwandle man die platte Wölbungsfläche durch Aushöhlen in einen Cylinder mittelst einer nach dem Bogen l φ m ausgeschnittenen Lehre, lege alsdann auf diesen Cylinder die biegsame Brettung $L_2 L_3 M_3 M_2$ (Fig. 4) und zeichne den Stirnbogen $L_3 M_3$ in seiner wahren Gestalt. Endlich führe man das Haupt $Q_3 M_3 L_3 P_3 S_3 R_3$, das an der innern Fläche des Tonnengewölbes Theil nimmt, mittelst eines Richtscheites aus, das man parallel mit $Q_3 R_3$ über den Umriss des Hauptes hingleiten lässt. Am genauesten kann letztere Arbeit geschehen, wenn man auf dem Umrisse die Richtpunkte bemerkt, welche den Erzeugenden des Tonnengewölbes entsprechen. Fig. 5.

§. 795.

Bemerkungen. Es wurde im §. 790 stillschweigend angenommen, das Tonnengewölbe, in welches das absteigende Gewölbe einmündet, sei gemauert. Wäre es aus Steinen construirt, so müsste man die Zurüstung Fig. 1 mit der des Tonnengewölbes, dessen gerader Durchschnitt G″ X″ ist, in Uebereinstimmung bringen, was fast auf dieselbe Weise geschehen würde, wie es in §. 738 für das auf Tafel 48 dargestellte Gewölbauge geschehen ist.

Die Fugen des absteigenden Gewölbes, welche durch Ebenen gebildet werden, die durch einen Halbmesser O′ M′ Q′ und durch die von M′ ausgehende Erzeugende gelegt sind, stehen schief auf der innern Wölbungsfläche. Erforderte es aber die Wichtigkeit des Gewölbes, dass die Fugen normal auf jener Fläche wären, so müsste man zuerst den geraden Schnitt a l m n b construiren, und alsdann die Normalen l p, m q auf ihn ziehen, die bis zu den Punkten p und q gehen mussten, wo sie von den durch s und r gezogenen Horizontalen geschnitten werden. Hierauf würde man durch die in umgekehrter Ordnung angewendeten Operationen des §. 791, aus den Punkten p und q die Punkte P′ und Q′ ableiten, durch welche die Richtung der Fugenseiten L′ P′, M′ Q′ auf dem Haupte bestimmt würde.

Ist die Länge E′ G″ des absteigenden Gewölbes zu gross, als dass jede Schichte aus Einem Steine gebildet werden könnte, so wendet man Stossfugen an, welche in bekannter Abwechslung mittelst mehrerer Schnitte, die man parallel mit der Ebene Y″ E F senkrecht auf die Erzeugenden macht, gebildet werden. Dadurch wird alsdann die Behauung der partiellen Gewölbesteine noch leichter.

§. 796.

Ist die Länge E′ G″ schon etwas bedeutend, wie z. B. wenn das Gewölbe eine Treppe von zwölf oder mehr Stufen bedecken sollte, so wäre es unklug, diese ganze Masse von Steinen auf zwei geneigten Ebenen,

wie hier auf den beiden in ACGE und BDHF projicirten Rampen, ruhen zu lassen; denn durch die nach der Richtung E′G″ zersetzte Schwere würden die Gewölbesteine das Bestreben hinabzugleiten erhalten und dadurch würde auf das Tonnengewölbe G″X″ ein Druck ausgeübt werden, der seinen Einsturz bewirken könnte. Um diess zu verhüten, wendet man mehrere Mittel an; eines derselben ist angedeutet in Fig. 7, welche einen durch die höchste Erzeugende gehenden Vertikalschnitt darstellt. Die Gewölbsteine der ersten Schichte, wie A′B′C′D′E′F′, reichen hier in das Innere der Pfeiler hinein, wo sie auf horizontalen Lagern ruhen; und ihre Wölbungsfläche, welche nur die Breite CD hätte haben sollen, ist nach EF verlängert und bietet einen Einschnitt dar, welcher dem Gewölbestein V_2 der zweiten Schichte als Anhalt dient, damit er nicht vorwärts gleite: dieser Gewölbestein V_2 hat wieder einen solchen Einschnitt, um den Gewölbestein V_3 der dritten Schichte aufzuhalten u. s. f. Ausser diesen aber kommen einige Gewölbesteine vor, welche einfach sind, und welche auf Fig. 8, wo die Aufklappung der cylindrischen Wölbung auf die Horizontalebene dargestellt ist, durch ihre Diagonalen bezeichnet sind. Derartige Gewölbesteine müssen in der ganzen Länge des Schlusses angewendet werden, damit sie, unabhängiger von den andern, so tief in den für sie leergelassenen Raum eindringen können, als nöthig ist, und somit also den Dienst eigentlicher Keile erfüllen.

Da in den Anordnungen der Figuren 3 und 6 die Fugen und selbst die Wölbungsfläche des absteigenden Gewölbes ziemlich schief auf die Stirnebene und das Tonnengewölbe treffen, so wäre es vorzuziehen, das absteigende Gewölbe am Anfang und Ende mit einem kleinen horizontalen Cylinder zu versehen, wie man es in Fig. 9 dargestellt sieht. Diese Anordnung wäre gefälliger und würde zugleich auch mehr Festigkeit gewähren, weil der untere kleine Cylinder einen Anhalt für das Hinabgleiten der Gewölbesteine bildete. Der Durchschnitt dieses Cylinders mit dem grossen Tonnengewölbe müsste nach §. 738 behandelt werden.

Schräg absteigendes Gewölbe, in ein gemauertes Tonnengewölbe einmündend.

§. 797.

Taf. 56. Es sei wieder ALMB der in der vertikalen Projectionsebene liegende Haupt- oder Stirnbogen; ferner seien EG, AC, BD, FH die horizontalen Projectionen der Seiten beider Rampen; und da diese Projectionen nicht senkrecht auf dem Grundschnitte EF der Stirnebene sind, so heisst das Gewölbe schräge absteigend. Die Gerade GH stelle die erste Erzeugende des grossen Tonnengewölbes dar, in welches das schräg absteigende Gewölbe einmünden soll und dessen Anlauf in der Horizontalebene der Figur liegt. Man bemerke ferner, dass der Durchmesser AB über der Projectionsaxe EF liegen sollte, und zwar um die Grösse Eε, welche der Höhe des Gewölbefalls gleich ist. Da aber die eigentlich brauchbaren Projectionen auf die Ebene der Fig. 3 gezeichnet werden, so lässt man gewöhnlich jene Höhendifferenz auf der Stirnebene weg. Als Fugen nehme man endlich die durch die Halbmesser OL, OM,... und durch die entsprechenden Erzeugenden gelegten Ebenen an, obgleich diese nicht normal auf der innern Wölbung sind.

Nun wähle man eine Vertikalebene EGX parallel mit den Erzeugenden des schiefen Cylinders und bemerke auf dieser die Fallhöhe EE′ des Gewölbes; hierauf ziehe man die Horizontale E′F′ und projicire auf diese die Punkte A, B, F in A′, B′, F′, alsdann sind E′G, A′C′, B′D′, F′H′ die Projectionen der Seiten beider Rampen. Um die von irgend einem Punkte L ausgehende Erzeugende zu finden, projicire man den Punkt I in I′, und ziehe, nachdem man die Ordinate I′L′ = IL errichtet hat, die Gerade L′L″ parallel mit E′G. Ebenso verfährt man in Beziehung auf die von M ausgehende Erzeugende, welche sich auf M′M″ projicirt; und so erhält man endlich die Ellipse A′L′S′M′B′ als Seitenprojection der Stirncurve ALMB. Was die

Rückenkanten betrifft, welche von den Punkten N und P ausgehen, so erhält man ihre Projectionen $N'N''$, $P'P''$ auf eine ähnliche Art. Die Fugenseiten $N'L'$ und $M'P'$ müssen im Punkt O' zusammenlaufen, welcher die Seitenprojection des Mittelpunktes O ist.

§. 798.

Nun muss man die Punkte suchen, in welchen das grosse Tonnengewölbe von den unbestimmt langen Parallelen $L'L''$, $N'N''$,... geschnitten wird. Zu diesem Zwecke ziehe man die Axe XY dieses Tonnengewölbes und lege durch einen Punkt Y dieser Linie zwei vertikale Ebenen YV, YH, die eine senkrecht auf GH, die andere parallel mit der Rampe AC; die erste schneidet das Tonnengewölbe in einem Kreis, der, um seinen Halbmesser YV aufgeklappt, in UV zu liegen kommt. Die zweite schneidende Ebene erzeugt eine Ellipse, welche um YH aufgeklappt, die Lage $H\beta'W$ annimmt. Um diese Ellipse zu construiren, ziehe man irgend eine Linie $\alpha\beta$ parallel mit GH, und bemerke, dass die beiden Punkte des Tonnengewölbes, welche in α und β projicirt sind, gleiche Höhe haben müssen; errichtet man daher die senkrechte $\beta\beta'$ und macht sie gleich der Ordinate $\alpha\alpha'$ des Kreises, so wird der Punkt β' der gesuchten Ellipse $H\beta'W$ angehören.

Schneidet man nun aus Holz oder Carton eine Lehre aus, welche die Form $YH\beta'W$, oder nur die Form eines hinreichenden Theiles $\beta H\beta'$ jenes Ellipsenviertels hat, und denkt sich diese Lehre in die Vertikalebene $LI\lambda$ gestellt, so dass der Scheitel H in λ zu liegen kommt, so ist leicht einzusehen, dass der Durchschnitt dieser Lehre mit der von L ausgehenden Wölbungskante den Punkt liefert, in welchem letztere Gerade das Gewölbe schneidet. Projicirt man nun Alles auf die Seitenebene Fig. 3, so wird man der praktischen Regel gemäss, die Lehre so an diese Ebene anlegen müssen, dass ihr Scheitel H mit λ' und ihre Axe HY mit $\lambda'X$ zusammenfällt. Nach dem Umriss dieser Lehre ziehe man hierauf die Curve $\lambda'L''$, deren Durchschnitt mit der unbegrenzten Geraden den gesuchten Punkt L'' liefert. Man kann auch, ohne die Curve $\lambda'L''$ zu zeichnen, die Lehre nur in der angegebenen Weise anlegen und unmittelbar den Punkt L'' bemerken, in welchem sie von $L'L''$ geschnitten wird. Ebenso lege man, nachdem man μ in μ' projicirt hat, die Lehre an $\mu'M''$ an, um den Endpunkt M'' der Wölbungskante $M'M''$ zu bestimmen; auf diese Art erhält man endlich $C'L''S''M''D'$ als Projection des Durchschnitts beider Cylinder. *)

Um die Fugenseiten, wie $L''N''$, $M''P''$ zu bestimmen, construire man mehrere ihrer Punkte durch dasselbe Verfahren wie oben; die Curve $H'Q$, aber wird identisch mit der Lehre $H\beta'W$, und die Rückenseiten, wie $P''Q''$, werden Horizontale sein. Um den Gewölbestein, dessen Haupt BMPQF ist, besser unterscheiden zu können, wurde der Umriss seiner Projection auf Fig. 3 schraffirt.

§. 799.

Gerader Schnitt. Man lege durch einen beliebigen Punkt eine schneidende Ebene $F'KR$, (Fig. 3), senkrecht auf die Erzeugenden des schiefen Cylinders. Der Punkt, in welchem diese Ebene die Erzeugende ($L'L''$, $I\lambda$) schneidet, projicirt sich offenbar in l', und liegt in der Vertikalebene $I\lambda$, in der er auch bleiben

*) Wenn man auf Fig. 3 die Gerade $S'S''$ zeichnen will, welche eine gemeinschaftliche Tangente an beiden Stirncurven des absteigenden Gewölbes seyn soll, so muss man den sichtbaren Umriss dieses schiefen Cylinders suchen, indem man eine Berührungsebene an ihn legt, welche senkrecht auf der Vertikalebene $Z'EF$ ist. Zu diesem Zwecke ziehe man die Horizontale Gg senkrecht auf EX, und durch die beiden Geraden Gg und GE' lege man eine Ebene, deren vertikaler Grundschnitt εg ist. Zieht man hierauf an den Stirnbogen eine Tangente $S\delta$ parallel mit εg, so ist, der Berührungspunkt S der Ausgangspunkt der gesuchten Erzeugenden, und man findet nun ihre Seitenprojection $S'S''$ auf die in §. 797 für die Punkte L, M, ... angewendete Art.

wird, wenn man die Ebene F′KR um KR dreht, um sie in die Horizontalebene aufzuklappen. Die kürzeste Entfernung eben dieses Punktes von KR ist offenbar gleich Kl′ und hat ihren Fusspunkt in γ. Nimmt man daher γl = Kl′, und ebenso δm = Km′,... so erhält man die Curve almb als Aufklappung des orthogonalen Schnittes der innern Wölbungsfläche. Auf dieselbe Art findet man auch die Punkte n und p der Fugen und endlich bmpqf als die wahre Grösse des orthogonalen Schnittes, den man durch die ganze Dicke des oben als Beispiel angenommenen Gewölbesteines gemacht hat.

§. 800.

Verstreckte Brettungen. Auf einer unbegrenzten Geraden (Fig. 5) nehme man die Distanzen a′l′, l′m′, m′b′ gleich den Bögen al, lm, mb der Fig. 2; hierauf errichte man die Senkrechten a′A′ und a′C′, l′L′ und l′L″, m′M′ und m′M″, b′B′ und b′D′ beziehungsweise gleich den beiden Stücken jeder der gleichnamigen Erzeugenden auf Fig. 3. Auf diese Art erhält man die Curven A′L′M′B′, C′L″M″D′ als die Verwandelten der beiden Stirnbögen des absteigenden Gewölbes, durch welche zugleich die Brettungen der Wölbungsfläche, wie M′B′D′M″ bestimmt werden. Um die Fugenbrettungen zu bilden, nehme man die Breite m′p′ gleich mp auf Fig. 2, und errichte die zwei Senkrechten p′P′ und p′P″ so gross als die gleichnamigen Linien auf Fig. 3. Die Seite M′P′ dieser Fuge ist eine Gerade, und was die krummlinige Seite M″P″ betrifft, so muss man sich einen zwischenliegenden Punkt verschaffen, durch dasselbe Verfahren, welches man für die Mitte der Seite MP auf Fig. 1 angewendet hat. Es ist leicht, auf Fig. 5 die Punkte O′, O″ wieder zu finden, in welcher diese Fugenseiten auf Fig. 3 zusammenlaufen.

§. 801.

Behauung der Gewölbesteine. Will man denjenigen Gewölbestein, der BMPQF zum Haupte hat, nach der Methode aus dem Rechtwinkligen, als der genauern behauen, so muss man zuerst ein gerades *Prisma* ausführen, dass die Brettung bmpqf des orthogonalen Schnittes zur Basis und zur Länge die Distanz der beiden Geraden hat, welche man, parallel mit KF′ durch P′ und H′ gezogen. Hierauf lege man auf diejenigen Seitenflächen die Körpers, welche den Linien bm, mp, bf entsprechen, die Brettungen der Wölbungskante und der Fuge (Fig. 5) an, wodurch man in den Stand gesetzt wird, den Umriss beider Häupter des Gewölbesteines zu zeichnen. Das äussere Haupt ist eben und lässt sich ohne Schwierigkeit behauen, und was das innere am Tonnengewölbe theilnehmende Haupt betrifft, so wird dasselbe mittelst Anwendung eines Lineals bearbeitet, das man über den Umriss hingleiten lässt, aber so, dass es immer durch die auf letzterm bezeichneten Richtpunkte geht, welche leicht auf der Figur zu finden und auf den Stein überzutragen sind.

Will man, um Zeit und Mühe zu ersparen, das Schrägmass anwenden, so muss man nach §. 794 verfahren. Alle zu den §§. 795 und 796 gemachten Bemerken gelten auch für diesen Fall.

Schräge absteigendes Gewölbe, in ein Tonnengewölbe einmündend.

Zweite Auflösung.

§. 802.

Taf. 57. Die gegebenen Stücke seien wieder dieselben wie in §. 797. Man nehme noch eine Hilfsebene ZFH, welche vertikal und parallel mit den Seiten der Rampe sei; aber statt orthogonale Projectionen anzuwenden, nehme man die projicirenden Linien mit der Erzeugenden GH des Tonnengewölbes parallel. Es wird also

dieses Gewölbe selbst sich in dem schiefen Schnitte H 6′ W projiciren, der aus dem geraden Schnitte auf dieselbe Art wie in §. 798 abgeleitet wird; ferner wird jede Stirnebene sich seitlich in einer einzigen Geraden projiciren, welche bei Aufklappung der Hilfsebene die auf F H senkrechte Lage F Z′ annimmt. Trägt man hierauf von F nach F die Höhe der Rampe, welche man auf Fig. 6 weggelassen hat, so ist F′ H die Seitenprojection der obern Rampenfläche und alles dessen, was in der Anlaufsebene des absteigenden Gewölbes enthalten ist.

Projicirt man nun die Punkte L und M, N und P,... in M′ P′ (Fig. 8) und zieht man parallel mit F′ H die Geraden M′ M″, P′ P″..., so sind diese die Projectionen der Kanten der innern Wölbung und des Rückens, welche das Tonnengewölbe genau in den Punkten M″, P″,... schneiden, in welchen sie die Curve H 6′ W treffen. Um also hier die Stirncurve zu suchen, hat man keiner Lehre mehr nöthig, wie bei der ersten Auflösung (Fig. 3). Zwar sind die Operationen, welche man zur Construction des geraden Schnittes anwenden muss, nicht durchaus so einfach wie dort, aber doch stellt Figur 8 mit Fig. 3 verglichen sich weit weniger verwickelt dar, als letztere.

§. 803.

Man lege die Ebene F′ R K senkrecht auf die Erzeugenden des absteigenden Gewölbes und bemerke wohl, dass, obgleich es sich hier von schiefen Projectionen handelt, der Grundschnitt F′ R dieser Ebene doch senkrecht auf F′ H sein muss, weil diese Gerade parallel mit der Projectionsebene Z′ F H ist. Ferner bemerke man, 1) dass diese schneidende Ebene die von M ausgehende Erzeugende in einem Punkte schneidet, der in der Vertikalebene T μ liegt, in welcher er auch bleiben wird, wenn man die Ebene F′ R K um R K aufklappt; 2) dass die kürzeste Entfernung dieses Punktes von R K eine Gerade ist, die ihren Fuss in δ hat, und senkrecht auf der Erzeugenden selbst ist. Da nun die Schenkel des auf diese Art gebildeten rechten Winkels mit der Ebene Z′ F H parallel sind, so wird er ein rechter bleiben, wenn er sich schief auf die genannte Ebene projicirt; fällt man daher von δ' die Senkrechte δ' m′ auf M′ M″, so gibt diese Linie die wahre Grösse jener kürzesten Entfernung an, und nimmt man daher δ m $=$ δ' m′ ferner γ l $=$ γ' l′...., so ist die Curve a l m b die Aufklappung des in den schiefen Cylinder gemachten geraden Schnittes.

§. 804.

Nun rectificire man die Bögen dieser Curve, und mache die Abschnitte a′ l′, l′ m′, m′ b′ (Fig. 10) gleich den Längen dieser Bögen; hierauf errichte man Senkrechte, und mache ihre Verlängerungen über und unter a′ b′ gleich den Abschnitten a′ F′ und a′ H, l′ M′ und l′ M″, m′ M′ und m′ M″, b′ F′ und b′ H auf Fig. 8. Ebenso verfahre man bei Construction der Fugenbrettungen, deren Breiten gleich a e, l n, m p, b f genommen werden müssen. Alle aus diesen Operationen erhaltenen Resultate aber müssen denen der Fig. 5 identisch sein. Was die Behauung der Gewölbesteine betrifft, so wird sie ganz nach §. 801 ausgeführt, nur kann die Länge des Prisma nicht mehr nach Fig. 8 gemessen werden, sondern sie ist auf Fig. 10 gegeben, als die Entfernung der Parallelen, welche man durch die beiden am meisten vorspringenden Punkte P′ und H′ gezogen hat.

Siebentes Kapitel.

Von den Trompengewölben *(trompes)*.

§. 805.

So nennt man alle Gewölbe, welche die Bestimmung haben, Bauwerke zu tragen, die gegen die Pfeiler oder Mauern eines Gebäudes im Vorsprung sind, z. B. ein Thürmchen, das in einer gewissen Höhe über dem Boden und im Vorsprunge gegen die Vorderwand einer geraden Mauer, oder über der Ecke zweier Mauern im Innern eines Hofes sich erheben soll; ein Haus an einer Strassenecke, das, mit Beibehaltung der obern Stockwerke, gegen die Basis hin abgestutzt werden soll, um dem öffentlichen Wandel mehr Raum zu gestatten; ein Kai, dessen Breite man durch ein vorspringendes Tonnengewölbe (*berceau en encorbellement*) vergrössern wollte etc. Die alten Baumeister haben vielfache Arten dieser Gewölbe angewendet, deren einige sich wirklich auch durch ihre Kühnheit auszeichnen; aber mit Recht hat man alle diese hängenden Bauwerke aus der modernen Architektur verbannt und nie sollte man sie mehr nach Willkür in einen Bauriss aufnehmen. In stereotomistischer Hinsicht aber ist das Studium der Trompen- oder Trompetengewölbe interessant, und überdiess können sie hie und da zur Benutzung oder auch zur Verbindung schon bestehender Bauwerke dienen. Es sollen desshalb zwei Fälle hier angeführt werden, in welchen man sie mit Vortheil und ohne die Regeln des guten Geschmacks und die Bedingungen der Stabilität zu verletzen, angewendet hat: 1) um die Anfahrt einer Brücke zu erweitern mittelst Anwendung einer geradlinig oder kreisförmig abgestutzten Ecke, durch welche die Brustwehr des Kai's sich an die der Brücke anschliessen soll; 2) um den Ruheplatz einer Treppe zu unterwölben, oder auch um den Stufen an der Seite, wo sie eine bedeutende Tracht haben, d. h. in den von den Mauern des Treppenhauses gebildeten Ecken, mehr Festigkeit zu geben. Es gibt von letzterem Fall Beispiele, wo das Trompengewölbe dem Auge einen sehr befriedigenden Anblick gewährt, durch die Art, wie es sich an die windschiefe Fläche anschliesst, die das Untertheil der Stufen begrenzt.

Trompengewölbe über einer schrägen Ecke mit Böschung.

§. 806.

Taf. 58. Fig. 1. Man denke sich eine Böschungsmauer, deren äussere Wand zum horizontalen Grundschnitt die Gerade YAB hat; diese Mauer sei aus irgend einem Grunde durch den Winkelraum ASB unterbrochen; dieser soll nun durch ein Gewölbe überdeckt werden, über welchem man fortbauen könne, wie wann die Grundlage von A bis B vorhanden wäre. *) Die Form des Raumes ASB erfordert offenbar für die innere

*) Um die Errichtung dieses Trompengewölbes auf eine vernünftige Art zu motiviren, könnte man als Gegebene zwei Mauern RS und TS (Fig. 5) annehmen, welche unter irgend einem Winkel zusammentreffen; man will nun die obere Mauerfläche in der Nähe von S vergrössern mittelst eines Gewölbes, das beide Mauern verbinde, was um so mehr begründet erscheinen muss, da die vorspringende Ecke S_2 zu irgend einem Zwecke abgestumpft werden musste. Man könnte auch annehmen, es solle die Anfahrt einer Brücke (Fig. 9) erweitert werden durch eine abgestumpfte Ecke, die von einem Trompengewölbe getragen werde, das die Kaimauer ST mit dem ersten Brückenkopfe verbinde, wie man es an mehreren Brücken in Paris sieht. Bei dem alten Schlosse Chantilly sieht man an der über den Hauptarm des Kanales führenden Brücke Trompengewölbe, deren Stirnfläche durch einen vertikalen Cylinder wie A′B′ begrenzt wird.

Wölbung der Trompe eine konische Fläche, welche man, als durch Umdrehung erzeugt, annehmen kann, trotz der von der Ungleichheit der Seiten S A und S B herrührenden Schräge der Ecke. Denn nimmt man S C = S A und beschreibt über A C, als Durchmesser, einen Halbkreis, den man sich um A C in die Vertikalebene A C aufgerichtet denkt, so ist dieser Halbkreis die Leitlinie und S der Scheitel des Kegels, der bis zur Böschungsmauer verlängert werden muss, wenn man die Stirncurve der Trompe finden will.

§. 807.

Um die Böschungsmauer, deren horizontaler Grundschnitt A B ist, völlig zu bestimmen, nehme man eine auf A B senkrechte Vertikalebene Y X, klappe sie um ihren Grundschnitt X Y (als um eine Projectionsaxe) auf, und ziehe auf ihr eine Gerade Y Z, welche mit der in YY″ aufgeklappten Vertikalen Y einen Winkel Z Y Y″ bilde, der dem gegebenen Böschungsmittel gleich sei; alsdann ist Z Y B die Stirnebene der Trompe. Ein beliebiger Punkt d′ des Leitkreises nun projicirt sich horizontal in d auf dem Durchmesser A C; und auf der Seitenebene der Fig. 2 projicirt er sich in einer der Ordinate dd′ gleichen Höhe $d_2 d''$. Mithin ist S″ d″ die Seitenprojection der entsprechenden Erzeugenden, und verlängert man sie bis D″, wo sie von der Böschungsebene Z Y B geschnitten wird, so darf man nur diesen Punkt D″ in D auf die horizontale Projection S d der nämlichen Erzeugenden projiciren. Eben so projicirt die Erzeugende, welche durch e′ geht, sich in S e und S″ e″, und der Punkt E″, wo sie die Böschungsmauer schneidet, projicirt sich horizontal in E, so dass man A E D B als die Horizontalprojection für die Stirncurve des Trompengewölbes erhält.

Um aber die wahre Grösse dieser Curve zu erhalten, klappe man die Ebene Z Y B, in welcher sie enthalten ist, um ihren horizontalen Grundschnitt Y B. Bei dieser Umdrehungsbewegung beschreiben die verschiedenen Punkte (D, D″), (E, E″), ... Kreisbögen von den Halbmessern D″ Y, E″ Y, ... ohne aus den Vertikalebenen D D′, E E′, ... die senkrecht auf A B sind, herauszugehen; diese Punkte kommen also durch die Aufklappung in D′, E′, ... zu liegen, und man erhält AE′D′ B als die Stirncurve in ihren wahren Dimensionen.

§. 808.

Will man die Tangenten dieser Curve construiren, entweder in Projection oder in der Aufklappung, so muss man die Ebene Z Y B mit der Berührungsebene des Kegels combiniren; letztere Ebene erhält man aber mittelst der Tangente an der kreisförmigen Basis des Kegels. Was den Punkt A betrifft, für welchen die Berührungsebene vertikal wird, so projicirt sich seine Tangente offenbar in S A; um aber ihre Aufklappung zu erhalten, muss man die Vertikalebene X Y zu Hilfe nehmen, auf welche jene Tangente sich längs des Grundschnittes Y Z projicirt; nimmt man also auf diesen Projectionen A S, Y Z zwei einander entsprechende Punkte x und Z, so erhält man leicht die Aufklappung x′ eines Punktes der gesuchten Tangente A x′. Man sieht leicht ein, dass diese Tangente A x′ und diejenige, welche an B gezogen wird, auf der in S errichteten Vertikalen sich schneiden müssen.

§. 809.

Es ist von Nutzen, den culminirenden Punkt der Stirncurve, d. h. den Punkt, in welchem die Tangente horizontal ist, zu kennen. Da nun in diesem Punkte die Berührungsebene des Kegels eine Tangente an der Curve A E′ D′ B enthalten muss, welche der Projectionsaxe parallel ist, so muss ihr Grundschnitt die mit A B parallel gezogene Gerade S T sein. Verlängert man also diesen Grundschnitt bis zu seinem Durchschnitt T mit dem Durchmesser A C und zieht hierauf an den Kreis die Tangente T u′, so erhält man aus dem Berührungspunkte u′ die Erzeugende S u, welche sofort, durch ihren Durchschnitt mit der Ebene Z Y B, den

gesuchten Punkt (U, U') liefert; der Durchschnitt selbst wird wie in §. 807 construirt. Fällt der Punkt T zu weit hinaus, so ziehe man durch die Mitte von S O und parallel mit A B eine Gerade, durch welche man den Mittelpunkt ω des Kreises erhält, welcher den Berührungspunkt u' unmittelbar bestimmt.

Statt dieser allgemeinen Methode kann man ein kürzeres Verfahren anwenden, das sich auf folgende besondere Eigenschaft der Curven zweiten Grades gründet: die beiden Tangenten A S und B S, welche man an die Curve A E D B durch die Endpunkte der Sehne A B gezogen hat, müssen sich in dem mit A B conjugirten Durchmesser schneiden; und die Tangente an dem Punkt, wo dieser Durchmesser die Curve trifft, ist parallel mit A B. Zieht man also aus S durch die Mitte ω von A B eine Gerade S ω, so wird diese der Durchmesser sein, welcher den gesuchten Punkt U enthält; und um diesen Punkt nach der Methode des §. 807 zu erhalten, muss man von dem Punkte u ausgehen, wo die Gerade S ω die A C schneidet.

§. 810.

Man theile nun das conische Gewölbe in Gewölbesteine, durch Ebenen, welche man durch die Axe S O I und durch die Theilpunkte d', e', ... legt, die man gehörig auf der kreisförmigen Basis A e' d' C gewählt hat; denn wegen der Schräge des Gewölbes würden gleiche Theile des Kreises auf der Curve A E' D' B allzu ungleiche Bögen hervorbringen, daher es gut ist, die Kreisbögen in der Nähe der Ecke C ein wenig kleiner zu nehmen. *) Hienach erhält man als Grundschnitte der Fugenebenen auf der aufgeklappten Stirnebene die Geraden I D' H', I E' F', ..., welche man bis zu den Horizontalen gehen lässt, durch welche die verschiedenen Mauerschichten von einander geschieden werden, und so erhält man denn D' E' F' G' H' als das aufgeklappte Haupt eines der Gewölbesteine. Um hieraus die Horizontalprojection D E F G H abzuleiten, darf man nur die Geraden I D, I E ziehen und auf sie die Punkte F', H' durch Senkrechte auf A B beziehen. Zur Probe kann man, mittelst eines Kreisbogens, die Distanz Y Z' der Schichte F' G' von der Projectionsaxe auf Y Z beziehen; zieht man alsdann durch Z eine Parallele mit A B, so erhält man die Horizontale F G, durch welche das Haupt D E F G H begrenzt werden muss.

§. 811.

Taf. 58. Fig. 1. Es ist leicht einzusehen, dass, wegen der conischen Form des Gewölbes und der Zerbrechlichkeit des Materials, die Gewölbesteine nicht bis zum Scheitel S verlängert werden dürfen, wo einzelne Theile derselben allzuspitzig ausfallen würden; man lässt sie daher in einer Entfernung von 15—20 Centimetern vom Scheitel S aufhören, und bildet den noch übrigen Theil des Gewölbes aus einem einzigen Steine, Trompillon oder Auge genannt. Um ihn dem grossen Trompengewölbe ähnlich zu machen, schneide man dieses durch eine Ebene z y a b, die man parallel mit Z Y A B nimmt, und suche den Durchschnitt derselben mit der conischen Wölbung. Nun werden auf der Seitenebene, Fig. 2, die Projectionen S'' D'', S'' E'' der Erzeugenden durch den Grundschnitt y z in den Punkten m'' und n'' geschnitten; projicirt man daher diese Punkte in m und n auf S D und S E, so erhält man die Projection a n m b der Stirncurve des Trompillon, in welcher sich die Wölbungsflächen der Gewölbesteine endigen.

*) Einige Versuche reichen gewöhnlich hin, um eine allzu grosse Ungleichheit in den Stirnbogen oder auch in den Breiten der Wölbungsflächen zu vermeiden. Wünscht man aber ein regelmässigeres Verfahren, so theile man zuerst den Halbkreis in gleiche Theile, und suche auf der Stirncurve A E' D' B die entsprechenden Theilpunkte; hierauf theile man diese Curve A E' D' B in Bögen von gleicher Länge, wodurch man ein zweites System von Theilpunkten erhält, das man aber auch nicht beibehalten darf, weil dadurch die Breiten der Wölbungsflächen zu ungleich würden. Nimmt man nun aber Theilpunkte an, die zwischen den beiden schon vorhandenen Systemen liegen, so vermeidet man dadurch eine allzu grosse Ungleichheit in den Stirnbögen sowohl, als auch in den Breiten der Wölbungsflächen.

§. 812.

Was die Gewölbesteine selbst betrifft, so müssen sie nicht durch die Ebene z y a b, sondern durch eine auf der conischen Wölbung normale Fläche begrenzt werden, welche sich im Innern des Trompillon bis zum Scheitel S verlängert. Man suche daher die Normale im Punkte m, indem man die Erzeugende S m auf S B aufklappt; bei dieser Bewegung wird der Punkt m in den Punkt m''' einer auf der Axe S O senkrechten Geraden zu liegen kommen, und zieht man nun senkrecht auf S B die Gerade m''' L, so ist diese die Aufklappung der Normale, aus welcher man L m als die Projection derselben erhält. Durch ein ähnliches Verfahren erhält man auch die übrigen Normalen K n, ... und alle diese Linien zusammen erzeugen eine windschiefe Fläche, welche die Fuge sein wird, in der die Gewölbesteine mit dem Trompillon zusammenstossen.

§. 813.

Man denke sich nun einen Steinblock, der das zwischen den Vertikalebenen a b und V P enthaltene Parallelepiped fassen kann (ohne jedoch schon die Lage der Nebenseitenflächen zu bestimmen), und suche den Durchschnitt R N M seiner obern Basis mit der windschiefen Fläche der Normalen. Da nun auf der Vertikalebene des Kreises A C alle Normalen des Kegels sich in Halbmessern dieses Kreises projiciren, so projicirt man am Besten auf diese Ebene auch das Parallelepiped, dessen obere Fläche sich als eine Horizontale R' M' darstellen wird. Da nun diese Gerade R' M' von den verschiedenen Halbmessern in den Punkten M', N', R' geschnitten wird, so darf man nur diese Punkte in M, N, R, auf die Projectionen der Normalen L m, K n, ... zurückführen, um die gesuchte Curve M N R zu erhalten. In dem Falle, da die Projection eines dieser Punkte, z. B. N', zu schiefe Linien erforderte, dürfte man nur den Punkt N', so wie die Normale K n um O S aufklappen.

Um hierauf die einwärts gehenden Winkel an den Theilen der Gewölbesteine zu vermeiden, welche an den Trompillon anstossen, muss man dafür sorgen, dass von den beiden seitwärts liegenden Kanten des Parallelepipeds jede in eine Fugenebene zu liegen komme; man wird also für diese Kanten die Geraden M P und R V annehmen, welche man parallel mit der Axe S O durch die Punkte (M, M') und (R, R') gezogen hat. Nun ist die Form des geraden Parallelepipeds vollkommen bestimmt, weil seine Basis ein bekanntes Parallelogramm, und R_1 R' seine Höhe ist. Man darf also jetzt nur noch die Durchschnitte seiner Seitenflächen M P und R V mit der Fläche des Trompillon suchen. Nun schneiden die Normalen a α und r R die Vertikalebene V R in den Punkten α und R, deren letzterer sich in R_2 aufklappt; construirt man daher eine oder mehrere zwischenliegende Normalen, so findet man von selbst ihre Durchschnitte mit der Seitenfläche V R und man erhält auf diese Art die Seitenbrettung des Trompillon in α R_2 V_2 V aufgeklappt. Durch ein ähnliches Verfahren erhält man auch die Brettung der vertikalen Seitenfläche P M, welche hier in P δ M_2 P_2 aufgeklappt ist. Nun hat man zur Behauung des Trompillon nur noch die wahre Grösse der in a r n m b projicirten Stirncurve nöthig, die man durch Aufklappung der Ebene z y a b um a b auf dieselbe Art erhält, wie man in §. 807 die Curve A E' D' B erhalten hat.

Man haue nun das oben angegebene Parallelepiped aus, und stumpfe es nach einer unter dem Winkel z y X gelegten Ebene ab; hierauf zeichne man auf letztere Seitenebene die Curve a r n m b (Fig. 4), und lege alsdann auf die obere Seitenfläche die Brettung V_2 R N M P_2, und auf die Nebenseitenflächen die Brettungen V α R V_2 und P δ M P_2 an. Nun kann man die windschiefe Fläche mittelst eines Lineals herstellen, das man über den Umriss a α R M δ b hinführt, während man es stets durch die einander entsprechenden Richtpunkte R und r, N und n, M und m, die man aus den Brettungen der Fig. 1 erhält, gehen lässt. Hier- Fig. 4.

auf zeichne man auf die untere Seitenfläche das durch Fig. 1 gegebene Dreieck a S b, und höhle den Stein aus, um die conische Wölbungsfläche behauen zu können. Letzteres geschieht mittelst eines Lineals, das, indem es beständig durch S geht, zugleich über die Curve a r n m b hingleitet. Schliesslich ist noch zu bemerken, dass, auf Fig. 1, die auf den Trompillon sich beziehenden Linien punktirt sind unter der Voraussetzung, dieser Körper sei isolirt und nicht durch Gewölbesteine überdeckt, wodurch er völlig unsichtbar würde.

§. 814.

Taf. 58. Fig. 1. Fugenbrettungen. Da die Gewölbesteine an die windschiefe Fläche des Trompillon und an die obere horizontale Seitenfläche anstossen sollen, so müssen die Fugen durch Normalenstücke und durch Gerade begrenzt werden, die mit der Axe S O parallel sind. Die Umrisse der beiden Fugen des Gewölbesteines, dessen Haupt D′ E′ F′ G′ H′ ist, projiciren sich also in

F E n N Q f F und H D m M P h H.

Um sie aber in ihrer wahren Grösse zu erhalten, muss man sie um S O auf die Horizontalebene aufklappen, und dabei bemerken, 1) dass jeder Punkt einen Kreisbogen beschreibt, der sich in einer senkrecht auf S O gezogenen Geraden projicirt; 2) dass die Fusspunkte K und L der Normalen unbeweglich bleiben; 3) dass die Geraden I E F und I D H stets durch den Punkt I gehen, und die Linien I′ E′ F′ und I′ D′ H′ auf Fig. 3 zu wahren Längen haben. Hienach findet man leicht als Fugenbrettungen:

F‴ E‴ n‴ N‴ Q‴ f‴ F‴ und H‴ D‴ m‴ M‴ P‴ h‴ H‴.

§. 815.

Platte Wölbungen. Was die conischen Wölbungsflächen der Steine betrifft, so entwickelt man sie nicht, weil es für die Behauung bequemer ist, sogenannte platte Wölbungsflächen an ihre Stelle zu setzen. Als solche dienen hier die triangulären Seitenflächen der in den Kegel eingeschriebenen Pyramide, welche das aus den Sehnen B D′, D′ E′, ... gebildete Vieleck zur Basis hat. Man fängt also den Stein so zu behauen an, als ob seine innere Wölbung eines dieser Dreiecke wäre. Man entwickle daher diese platten Wölbungsflächen. Diess könnte leicht dadurch geschehen, dass man die Längen ihrer Seiten suchte; aber es ist genauer, sich hiezu der entsprechenden Sehnen in dem Halbkreise A C zu bedienen, der unmittelbar gegeben ist.

Fig. 5. Man beschreibe daher (Fig. 5) mit einem Halbmesser S C, welcher der gleichnamigen Linie auf Fig. 1 gleich ist, einen Kreisbogen und trage in diesen die Sehnen C d′, d′ e′, ... aus Fig. 1. Verbindet man nun die hiedurch entstandenen Theilpunkte mit dem Mittelpunkte S, so erhält man die Richtungen der Wölbungskanten. Hierauf trage man auf diese unbestimmt langen Linien die Längen S B, S D‴, S E‴, ... so gross, als die gleichnamigen Linien auf den Fugenbrettungen Fig. 1, und verbinde die Endpunkte durch die Geraden B D‴, D‴ E‴, ..., welche den Sehnen B D′, D′ E′, ... der Fig. 3 gleich sein müssen. Endlich schneide man von den Kanten der entwickelten Pyramide die, abermals aus den aufgeklappten Fugen der Fig. 1 genommenen Längen S b, S m‴, S n‴, ... ab, weil die Wölbungskanten der Steine sich in der Curve a n m b des Trompillon endigen müssen.

§. 816.

Weil aber der Körper des Gewölbesteines von der windschiefen Fläche des Trompillon begrenzt wird, so muss man, um den Umriss der platten Wölbung vollständig zu erhalten, den Durchschnitt ihrer Ebene mit

der windschiefen Fläche construiren. Man schneide daher beide mittelst einer Ebene, welche durch die Axe S O des Kegels und einen Punkt γ' geht, den man beliebig auf der Sehne d′ e′ (Fig. 1) genommen hat. Diese Ebene schneidet die platte Wölbung in der Geraden S γ und den Kegel in der Erzeugenden S δ, welche die Curve a n m b im Punkte ε trifft. Construirt man daher die Normale $\varepsilon\,\lambda$, wie in §. 812, so ist der Punkt φ, wo diese Normale die Gerade S γ schneidet, offenbar der platten Wölbung und der windschiefen Fuge gemeinschaftlich, und wird also der gesuchten Curve n φ m angehören.

Um aber diese hier nur in der Projection erhaltene Curve auf die Entwickelung (Fig. 5) übertragen zu können, klappe man die Gerade S γ in S γ'' (Fig. 1) auf, mittelst eines mit dem Halbmesser O γ' beschriebenen Kreisbogens; alsdann wird die aufgeklappte Normale $\lambda\,\varepsilon''$ die S γ'' in einer Entfernung S φ'' schneiden, die man auf S γ' (Fig. 5) tragen muss, um einen Punkt der Curve n‴ φ''' m‴, welche die platte Wölbung begrenzen soll, zu erhalten. Man bemerke, dass gewöhnlich die Werkmeister nur die in diesem Paragraphen beschriebenen Operationen ausführen, ohne den Punkt φ und die Projection n φ m der Fig. 1 zu zeichnen.

§. 817.

Endlich muss man auch noch die Neigung des Hauptes F′ E′ D′ gegen die platte Wölbung suchen (Fig. 3). Diese beiden Ebenen aber bilden mit der Fuge eine körperliche Ecke, deren Scheitel in E projicirt ist, und deren drei ebene Winkel man kennt; man trage daher an den Punkt E‴ der Fig. 5 einen Winkel D‴ E‴ F′ gleich dem Winkel D′ E′ F′ der Fig. 3, und einen andern Winkel S E‴ F‴ so gross, als den gleichnamigen auf der aufgeklappten Fuge (Fig. 1); hierauf wende man die allgemeine Methode an, welche in der darstellenden Geometrie (§. 59) dazu gedient hat, die Neigung zweier Seitenflächen einer körperlichen Ecke zu bestimmen. Bekanntlich besteht diese Methode darin, dass man durch den Punkt, welcher einerseits in F′, andererseits in F″ aufgeklappt ist, zwei Ebenen legt, die eine senkrecht auf D‴ E‴, die andere auf S E‴; diese Ebenen schneiden sich in der Vertikalen ω, welche mit $\varrho\,\omega$ ein rechtwinkliges Dreieck bildet, dessen Hypotenuse gleich ϱ F″ ist. Klappt man daher dieses Dreieck in $\varrho\,\omega\,\zeta$ auf, so erhält man den stumpfen Winkel $\pi\,\varrho\,\zeta$ als den gesuchten Neigungswinkel, nach welchem zur Behauung des Steines ein Schrägmass verfertigt werden muss.

§. 818.

Behauung des Gewölbesteines, dessen Haupt D′ E′ F′ G′ H′ ist. Man wähle einen Steinblock aus, der diesen Gewölbestein fassen kann, was sich sehr leicht nach den Projectionen der Figuren 1 und 2 beurtheilen lässt. Hierauf richte man diejenige Seitenfläche her, welche die platte Wölbung werden soll, und zeichne auf dieselbe den Umriss D m φ n E γ D (Fig. 6) mittelst der Brettung Fig. 5. Ferner behaue man die Seitenfläche des Hauptes mittelst eines Schrägmasses, dessen Winkel gleich $\pi\,\varrho\,\zeta$ ist, und dessen einer Schenkel auf der platten Wölbung aufliegt, während seine Ebene in einer auf der Sehne D γ E normalen Richtung gehalten wird; auf diese Hauptfläche zeichne man den Umriss D E F G H mittelst der Brettung Fig. 3. Nun richte man die Ebene der obern Fuge her, von welcher man zwei in derselben liegende Gerade E n, E F kennt, und zeichne auf sie den Umriss E n N Q f F nach der Brettung E‴ n‴ N‴ Q‴ f‴ F‴ der Fig. 1. Man hätte diese Ebene auch mittelst eines Schrägmasses herrichten können, dessen Eröffnung man gleich dem Winkel gemacht hätte, den die Fuge und die platte Wölbung mit einander bilden; ein Winkel, den man leicht aus Fig. 5 erhalten kann. Eben so verfahre man in Beziehung auf die untere Fuge, welche durch die beiden bekannten Geraden D m und D H gehen soll, und auf welche man die aus Fig. 1 erhaltene Brettung D‴ m‴ M‴ P‴ h‴ H‴ anlegen muss. Fig. 6.

Nun ist es leicht, die ebene Seitenfläche P M θ N Q zu behauen. Man arbeitet so lange in den Stein hinein, bis man die durch Fig. 1 gegebene Lehre M θ N anlegen kann; hierauf führt man die windschiefe Fläche M m φ n N aus, mittelst eines Lineals, das man auf die beiden bekannten Leitlinien M θ N und m φ n so anlegt, dass es zugleich durch die ebenfalls aus Fig. 1 erhaltenen Richtpunkte M und m, θ und φ, N und n geht. Auf diese windschiefe Fläche zeichnet man endlich die Curve m ε n, indem man auf jede Gerade $\varphi\,\theta$ eine Länge $\varphi\,\varepsilon$ gleich $\varphi''\,\varepsilon''$ (Fig. 1) trägt. Nun darf man nur noch die platte Wölbung aushöhlen, um sie in eine conische Wölbung zu verwandeln, was mittelst eines Lineals geschieht, das man über die beiden bekannten Richtlinien m ε n und D δ E hingleiten lässt, so dass es gleichzeitig durch die Richtpunkte D und m, δ und ε, E und n geht, welche den Erzeugenden dieser conischen Fläche entsprechen.

Trompengewölbe über einer abgestumpften Ecke.

§. 819.

Taf. 59. Fig. 1. Zwei Mauern treffen sich unter einem Winkel A C B, der beliebig sein kann, hier aber als ein rechter angenommen wird, um regelmässigere Formen zu erhalten. Um nun den Strassenraum zu vergrössern, oder aus irgend einem andern Grunde, soll der Winkelraum A C B vom Boden an bis zu einer gewissen Höhe frei bleiben, aber unbeschadet der über diesem Vorsprunge sich erhebenden Bauwerke. Es muss also an diesen Mauern ein Trompengewölbe angebracht werden, für welches hier die conische Form gewählt wird und zwar so, dass sein Scheitel S in den Durchschnitt der beiden Vertikalebenen A S und B S zu liegen komme, die man parallel mit den abgeschnittenen und als gleich vorausgesetzten Theilen B C und A C gelegt hat. Die Figur A C B S ist also ein Quadrat, und damit die Kegelfläche durch Umdrehung erzeugt sei, wird als Leitlinie für dieselbe der vertikale Halbkreis (A B, A′ d′ e′ B′) angenommen.

Nachdem man diesen in eine ungerade Anzahl symmetrischer Theile getheilt hat, die aber vom Anlaufe gegen den Schluss hin an Grösse etwas abnehmen müssen, damit die Theile des Stirnbogens nicht zu ungleich werden, lege man die Fugenebenen durch die Theilpunkte und durch die Axe S O, wodurch man als Wölbungskanten die Erzeugenden (S′ d′, S d), (S′ e′, S e) ... erhält. Diese verlängere man bis zur Vertikalebene A C und projicire die Punkte D, E, .. in D′, E′, ... wodurch man die Projection A′ D′ E′ C′ der Stirncurve erhält, welche ein Parabelbogen ist. Den Punkt C′ kann man auf diese Art nicht erhalten; man klappe daher die Erzeugende S C, um die Axe S O, in die Anlaufsebene auf, so kommt der Punkt C in C_2 zu liegen, welchen letztern man in den Punkt C'_2 projicirt; erhebt man hierauf diesen durch einen mit S′ C'_2 beschriebenen Kreisbogen wieder, so erhält man den Punkt C′. Dieses Verfahren könnte man auch auf die anderen Punkte D′, E′ anwenden, um den Durchschnitt allzu schiefer Linien zu vermeiden. Nun müssen die Fugenebenen bis zu den Horizontalen verlängert werden, welche die Schichten der Mauer von einander scheiden; hiedurch erhält man D′ E′ F′ G′ H′ als Haupt für den dritten Gewölbestein. Um aber die wahre Grösse dieser und der anderen Seitenflächen (Fig. 3) zu finden, klappe man die Stirnebene A C um eine Vertikale Z auf die vertikale Projectionsebene auf, so wird jeder Punkt (E, E′) dieselbe Höhe beibehalten und daher die Lage E″ erhalten. Da ferner der Grundschnitt E′ F′ der Fuge auf der Stirnebene nach dem Punkte C gehen muss, welcher seine Lage in γ erhält, so ist γ E″ seine Aufklappung, die man bis zu ihrem Durchschnitte F″ mit der Mauerschichte verlängern muss.

Bemerkung. Es wird angenommen, die Horizontalprojection (Fig. 1) werde von unten gesehen. Die Vertikalprojection (Fig. 2) wurde einzig desswegen construirt, um dem Leser eine bestimmtere Vorstellung von dem Anblicke zu geben, den die Trompe dem Beobachter von vorn darbietet. Der Werkmeister

hat nur die in Fig. 3 gezeichnete Aufklappung nöthig, und diese erhält er unmittelbar und ohne Hilfe der Fig. 2, indem er jede Vertikale $\varepsilon E''$ durch einen Kreisbogen schneidet, dessen Halbmesser $\gamma E''$ der Geraden CE_2 gleich ist, welche die wahre Distanz des Punktes C vom Punkte (E, E') im Raume misst.

§. 820.

Der Trompillon fängt mit dem vertikalen Kreise (ab, a'l'm'b') an, und die Fuge wird durch die verschiedenen Normalen des Kegels längs jener Curve gebildet. Da nun diese hier ein Parallelkreis der Umdrehungsfläche ist, so laufen alle Normalen in Einem Punkte ω der Axe zusammen und bilden einen zweiten Umdrehungskegel. Man zieht es vor, diese Normalfuge hier durch den Halbkreis ($\alpha\beta, \alpha'\lambda'\mu'\beta'$) zu begrenzen und das übrige Stück des Trompillon aus einem horizontalen Cylinder ($\alpha PQ\beta, \alpha'\lambda'\mu'\beta'$) zu bilden. Wollte man hier wieder ein rechtwinkliges Parallelepiped anwenden, so müsste man drei Hyperbelbögen zeichnen, als Durchschnitte des Normalkegels mit der obern und den beiden Nebenseitenflächen dieses Parallelepipeds; diese Operationen wären zwar geometrisch leicht auszuführen, aber ihre Uebertragung auf den Stein wäre ziemlich unbequem und erforderte, dass jede der Nebenseitenkanten des Parallelepipeds in eine der Fugenebenen zu liegen käme, um einwärts gehende Winkel am Gewölbesteine zu vermeiden. Auf letztere Art wurde in §. 873 verfahren, und es wird eine gute Uebung für den Leser sein, ein ähnliches Verfahren auch hier anzuwenden.

Die Behauung des Trompillon ist leicht. Zuerst stellt man eine ebene Fläche her und zeichnet auf diese die beiden Halbkreise $\alpha_2 z_2 \beta_2$ und almb, worauf man leicht den Halbcylinder ausführen kann, mittelst eines Winkeleisens, dessen einer Schenkel nach und nach mit jedem der Halbmesser des Kreises $\alpha_2 z_2 \beta_2$ zusammenfallen muss. Alsdann biegt man einen Streifen Carton oder Papier über die convexe Fläche dieses Cylinders und zeichnet auf diese den Halbkreis $\alpha\lambda\mu\beta$; nun kann man die conische Fläche behauen, indem man das Richtscheit über die beiden Leitlinien $\alpha\lambda\mu\beta$ und almb hingleiten lässt, so dass es zugleich durch die Richtpunkte λ u. l, μ u. μ,... geht, welche man durch Theilung jener beiden Kreislinien in eine und dieselbe Anzahl gleicher Theile erhält. Die innere conische Wölbung Salmb endlich erhält man auf eine ähnliche Art, nachdem man auf die ebene Unterfläche des Halbcylinders das Dreieck aSb gezeichnet hat, dessen wahre Grösse aus Fig. 1 zu entnehmen ist. Fig. 4.

§. 821.

Fugenbrettungen. Dreht man die Fugenebene E'S'O um die Axe SO des Kegels, so klappt der Punkt (E, E') sich in E_2 auf, und die Fugenseite kommt in die Richtung CE_2F_2, auf welche man sofort eine Länge $E_2F_2 = E''F''$ (Fig. 3) tragen muss. Da nun ferner die Normale $m\mu$ mit $a\alpha$ zusammenfallen wird, so findet man $f_2F_2E_2a\alpha P$ als die Brettung der Fuge in ihrer wahren Grösse. Die zweite in der Ebene D'S'O liegende Fuge wird durch $h_2H_2D_2a\alpha P$ dargestellt, u. s. f.

§. 822.

Platte Wölbungsflächen. Diese Wölbungsflächen sind, wie schon gesagt worden, die Seitenflächen der in den innern Kegel eingeschriebenen Pyramide. Man beschreibe also mit einem Halbmesser $S_2A_2 = SA$ einen Kreisbogen und trage in diesen die Sehnen A_2i', i'd', d'e',... gleich den Sehnen des Halbkreises A'i'd'e'B' (Fig. 2). Hierauf zeichne man die entsprechenden Halbmesser, verlängere sie dergestalt, dass S_2I_2, S_2D_2, S_2E_2,... so gross seien als die gleichnamigen Linien auf den Fugenebenen der Fig. 1, und verbinde ihre Endpunkte durch die Geraden A_2I_2, I_2D_2, D_2E_2,... welche so gross sein müssen Taf. 59. Fig. 5.

als die Sehnen A″ I″, I″ D″, D″ E″ der Fig. 3. Endlich schneide man von allen diesen Wölbungskanten eine constante Länge $S_2 a_2 = Sa$ ab. Was die platte Wölbung des Schlusssteines betrifft, so hat sie ausser der Sehne $E_2 E_3 = E E_1$ noch zwei andere Seiten $E_2 \gamma_2$ und $E_3 \gamma_2$, die einem gleichschenkligen Dreiecke angehören, dessen wahre Grösse man finden muss. Da nun die Ebene dieser Wölbung die mit $E E_1$ parallele Gerade SR (Fig. 1) zum horizontalen Grundschnitte hat, so wird, wenn man den Punkt R auf R″ in Fig. 3 bezieht, die Gerade R″ E″ der Durchschnitt der ebenen Wölbung mit der Vertikalebene A1 sein; und da diese Gerade R″ E″ die γ C″, welche hier die Vertikale C vorstellt, in γ'' schneidet, so folgt, dass E″ γ'' die Grösse ist, welche man den beiden Seiten $E_2 \gamma_2$ und $E_3 \gamma_2$ der Fig. 5 geben muss.

§. 823.

Für jede platte Wölbungsfläche, wie $l_2 D_2 E_2 m_2$, muss man noch die Curve $l_2 \varphi_2 m_2$ finden, in welcher sie die Normalfuge des Trompillon schneidet, welche ein Umdrehungskegel ist und ihren Scheitel in ω auf Fig. 1 hat. Man lege daher durch einen Punkt δ' der Curve d′e′ eine schneidende Ebene δ' S′ O′; diese schneidet den Normalkegel in einer Erzeugenden, welche sich in $\omega a \alpha$ aufklappt und die platte Wölbungsfläche in einer Geraden, deren Aufklappung $S\delta$ man erhält, wenn man die Distanz $O\delta$ gleich $S'\delta'$ nimmt; der Durchschnittspunkt φ dieser beiden Geraden ωa und $S\delta$ nun bestimmt die Länge $S\varphi$, die man auf $S_2 \delta_2$ (Fig. 5) tragen muss, um einen Punkt φ_2 der gesuchten Curve zu erhalten.

§. 824.

Endlich muss man auch noch den Neigungswinkel bestimmen, den diese platte Wölbungsfläche und das Haupt D″E″ F″ G″H″, welches eigentlich in der Vertikalebene AC enthalten ist, mit einander bilden. Hiezu aber kann man statt der allgemeinen Methode des §. 817 ein direktes und einfacheres Verfahren anwenden. Die Ebenen der beiden fraglichen Seitenflächen schneiden sich in einer Geraden, welche auf RAC projicirt und auf die Sehne E″D″V″ aufgeklappt ist; legt man daher durch die Erzeugende AS eine auf jenem Durchschnitte senkrechte Ebene, so schneidet diese die Ebene des Hauptes in einer, auf Fig. 3, durch A″T″ dargestellten Geraden, welche sich, bei Umdrehung der schneidenden Ebene um AS, in AT auf die Horizontalebene aufklappen wird. Zugleich aber ist TS die Aufklappung des durch dieselbe Ebene in die platte, durch S gehende Wölbung gemachten Schnittes; mithin ist RTS das Mass des gesuchten Neigungswinkels.

Um nun den in Fig. 6 dargestellten Gewölbestein zu behauen, wende man ganz dieselben Mittel an, wie in §. 818, d. h. man stelle zuerst die platte Wölbung $D\varrho EFGH$ des Hauptes mittelst eines Schrägmasses, dessen Eröffnung gleich dem Winkel RTS ist; alsdann führe man die beiden Fugen, die Cylinderfläche $L\lambda\mu M$ und die Normalfuge $\lambda l \varphi m \mu$ aus, auf welche letztere die Curve $m \pi l$ gezeichnet werden muss; endlich höhle man die conische Wölbung aus, welche die beiden Curven $m \pi l$ und DE zu Leitlinien hat.

Ein Trompengewölbe, welches den Ruheplatz einer Treppe trägt.

§. 825.

Taf. 59. Fig. 7. Man kann die Trompe, von welcher eben die Rede war, auch zur Unterwölbung eines auf das Quadrat SACB projicirten Ruheplatzes einer Treppe anwenden. Die beiden Parallelbögen (AC, A′C′) und (BC, B′C′) sind alsdann die Leitlinien der beiden geneigten vorspringenden Tonnengewölbe (*en encorbellement*), auf welchen die Stufen der beiden, nach diesem Ruheplatze zulaufenden Treppenarme ruhen. Die letzte Schichte dieses Gewölbes ist zu weit von dem Treppenhause entfernt, als dass die Steine, aus welchen sie besteht, in

die Mauer eingelassen werden könnten; man gibt aber ihren Stossfugen d, e, dieselbe Richtung, wie beim scheitrechten Bogen. Man könnte ferner einen Hacken anbringen, mittelst dessen jeder Gewölbestein L sich auf die untere Schichte stützte, und eine kleine Vertiefung, in welche eine unterhalb der Stufe M angebrachte Hervorragung eingriffe, während das entgegengesetzte Ende dieser Stufe in der Mauer fest sitzt. Diese Vorsichtsmassregel ist überflüssig für den in der Ecke (C, C') des Ruheplatzes befindlichen Gewölbestein, welcher durch den Druck beider Treppenarme hinlänglich gehalten wird.

Man könnte den Ruheplatz sacb auch durch ein Klostergewölbe (§. 723) unterstützen, welches durch den Durchschnitt der beiden Tonnengewölbe gebildet würde, die zu geraden Schnitten die beiden Parabelbögen (ac, a'c') und (bc, b'c') haben. Der Durchschitt dieser beiden Gewölbe erzeugt eine einwärtsgehende Ecke, deren innerer Grat wieder eine auf die Diagonale sc projicirte Parabel ist. Dieses Gewölbe würde aber weniger Festigkeit gewähren als die Trompe, Fig. 7.

Cylindrisches Trompengewölbe, ein Thürmchen tragend.

§. 826.

Man will in einer gewissen Höhe über dem Boden und im Vorsprunge gegen die vertikale Wand AB einer geraden Mauer ein Thürmchen errichten, dessen Projection der Kreisbogen ADB sei. Dieses Thürmchen soll durch ein Trompengewölbe getragen werden, dessen innere Wölbung ein horizontaler Cylinder sei, der auf folgende Art gebildet wird. In der auf die Mauer senkrechten Vertikalebene AC zeichne man einen Kreis, der hier in A'D'' (Fig. 2) aufgeklappt ist, und den man als den geraden Schnitt eines mit AB parallelen Cylinders annimmt. Der Durchschnitt dieses letztern mit dem vertikalen Cylinder ADB wird also die Stirncurve Taf. 60. Fig. 1.

(AFEDEFB, A'F'E'D'E'F'B')

des Trompengewölbes bilden.

Diese Curve kann leicht construirt werden; denn die Erzeugende des horizontalen Cylinders, welche durch irgend einen Punkt F'' (Fig. 2) geht, hat F''F' und FF zu Projectionen; und da letztere Gerade die Basis ADB des vertikalen Cylinders im Punkt F schneidet, so erhält man, wenn man diesen Punkt auf F''F' projicirt, einen Punkt F' der gesuchten Curve.

§. 827.

Bemerkungen. 1) Man muss den Halbmesser A'C'' des horizontalen Cylinders grösser nehmen als den Vorsprung YD des Thürmchens, damit im letzten Punkte D'' des Bogens A'D'' die Tangente nach innen gegen die Mauer geneigt sei; im andern Falle würde die Wirkung der Schwere die letzte Schichte des Trompengewölbes von dieser Mauer zu entfernen streben. Hier wurde der Halbmesser A'C'' gleich der Geraden OD genommen, welche dem Bogen ADB, der kleiner ist als ein Halbkreis, zum Halbmesser gedient hat; woraus folgt, dass der höchste Punkt D' des Stirnbogens dem über A'B' als Durchmesser beschriebenen Kreise angehört. Diese Bedingung ist jedoch nicht nothwendig, wenn sie gleich der Symmetrie sehr günstig ist.

2) Statt den geraden Schnitt A'D'' des horizontalen Cylinders als unmittelbar gegeben anzunehmen, könnte man auch als Stirncurve die, horizontal auf den Bogen ADB und vertikal auf den Halbkreis A'D'B' projicirte Linie annehmen, was ihr, von vorn gesehen, eine regelmässigere Form geben würde; hierauf würde man diese windschiefe Curve als Leitlinie eines mit AB parallelen Cylinders annehmen, und durch

das umgekehrte Verfahren des §. 826 die Aufklappung A′ D″ des orthogonalen Schnittes dieses Cylinders construiren; da aber dieser Schnitt nicht mehr kreisförmig wäre, so wäre es nicht so leicht die Normalen, welche man später nöthig hat, zu erhalten.

§. 828.

Um die Trompe in Gewölbesteine zu zerfällen, muss man den über A′ B′ beschriebenen Halbkreis in eine ungerade Anzahl gleicher Theile theilen, und durch jeden der Theilpunkte und die auf der Mauer senkrechte Gerade Y Y′ eine Fugenebene legen. Jede dieser Ebenen, wie z. B. F′ Y′ Y, schneidet die innere cylindrische Wölbung in einer Curve F n f Y, deren Punkt (n, n′) z. B. sich aus dem Durchschnitte einer Erzeugenden des horizontalen Cylinders A′ D″ mit dem vertikalen Grundschnitte F′ Y′ dieser Ebene ergibt. Hierauf muss die Fuge von F′ bis K′ auf der Wand des Thürmchens und ferner von K′ bis G′ auf der Mauer bis zu der entsprechenden Schichte verlängert werden.

§. 829.

Der Trompillon erhält als Stirnbogen eine Curve (a e d e b, a′ e′ d′ e′ b′), die man findet, wenn man den mit A D B concentrischen Kreisbogen a d b beschreibt, und hierauf den Durchschnitt des vertikalen Cylinders a d b mit dem horizontalen Cylinder A′ D″, nach §. 826, sucht. Die Fuge aber muss durch die Normalen der innern Wölbung gebildet werden, die man durch die verschiedenen Punkte der Stirncurve gezogen hat. Man wähle nun, um diesen Trompillon zu behauen, ein Parallelepiped, das in dem Rechtecke V″ Z″ U″ aufgeklappt ist, und suche den Punkt $(\varepsilon, \varepsilon'')$, in welchem eine Normale des Cylinders, wie C″ e″, die obere Seitenfläche schneidet; auf diese Art findet man die Curve $\omega \lambda \varepsilon \delta \varepsilon \lambda \omega$ als Durchschnitt der Normalfuge mit jener Seitenfläche. Mit der hintern Seitenfläche erzeugt dieser Durchschnitt zwei Aeste $a' \varphi' \omega'$ und $b' \varphi' \omega'$, deren Construction aus der Figur zu erkennen ist.

Die ebene Fuge (E e, E′ e′) geht also bis zum Punkte (e, e′) der innern Wölbung; hierauf schneidet sie die windschiefe Fuge des Trompillon in einer leicht zu construirenden Fuge $e \lambda$ und die obere Fläche des Parallelepipeds in einer mit Y Y′ parallelen Geraden λL. Als Aufklappung dieser Fuge erhält man sofort $H_2 E_2 e_2 \lambda_2 L_2 h_2$, und durch ein ähnliches Verfahren auch $G_2 K_2 F_2 f \ldots$ als Aufklappung der untern Fuge.

§. 830.

Zur Behauung des Steines ist auch noch der Durchschnitt der innern cylindrischen Wölbung mit der durch die Sehne e′ f′ (Fig. 3) senkrecht auf die Mauer gelegten platten Wölbung nöthig. Man klappe daher diese Ebene um ihren horizontalen Grundschnitt auf, so erhält man leicht die Brettung $q\, e_3 f_3\, p$. Endlich entwickle man die innere cylindrische Wölbung der Trompe, indem man zuerst (Fig. 4) Abscissen aufträgt, welche den Bögen des Kreises A′ C″ der Fig. 2 gleich sind, nämlich

$$Y_4 f_4 = A' f'', \quad Y_4 e_4 = A' e'', \quad Y_4 F_4 = A' F'', \quad Y_4 E_4 = A' E'', \quad Y_4 D_4 = A' D'';$$

und alsdann links und rechts Ordinaten errichtet gleich den, auf Fig. 1 gemessenen, Theilen der Erzeugenden. Hiedurch erhält man die Verwandelten $A D_4 B$ und $a d_4 b$ des Stirnbogens der Trompe und des Trompillon. Die Seiten der Fugen E e, F f werden auf eine ähnliche Art construirt.

§. 831.

Um nun den in Fig. 5 dargestellten Gewölbestein zu behauen, richte man die Fläche der obern Fuge her, lege auf sie die in Fig. 1 construirte Brettung $L \lambda e E H h$ an und ziehe parallel mit H h die Gerade e q.

Hierauf behaue man, unter Anwendung eines nach dem Winkel E′e′f′ (Fig. 3) geöffneten Schrägmasses, die platte Wölbung, deren genaue Form p f t e q man durch die in Fig. 3 aufgeklappte Brettung erhält; eben so behaue man, von der Geraden p f an, die untere Fuge mittelst eines durch den Winkel F′f′e′ bestimmten Schrägmasses. Endlich führe man die cylindrische Wölbung E e t f F aus, und lege die Brettung Fig. 4 auf dieselbe an, mittelst der man die beiden Curven e θ f und E f ziehen kann. Nun ist es leicht, das cylindrische Haupt H R K F E auszuhauen. Hat man endlich die kleine ebene Seitenfläche L $\lambda\omega$, deren Brettung durch Fig. 1 gegeben ist, in den Stein gegraben, so kennt man den ganzen Umriss der windschiefen Fuge $\pi f \theta e \lambda \omega$, die man nun mittelst eines Lineals, das man nach vorher bezeichneten Richtpunkten bewegt, ausführen wird.

Bei der oben verlangten Behauung der cylindrischen Wölbungsfläche E e t f F kannte man die Seite E F ihres Umrisses noch nicht, so dass die Arbeit in der Nähe des Punktes E etwas unsicher werden musste. Es wäre daher besser, statt der Entwickelung Fig. 4 die Entwickelung des Thurmcylinders vorzunehmen und mit Behauung des cylindrischen Hauptes H R K F E anzufangen, wozu das Winkeleisen sammt dem Kreisbogen H R als Leitlinie hinreichen. Auf diese Seitenfläche legt man alsdann die Brettung des durch die oben genannte Entwickelung erhaltenen Hauptes, wodurch man den Bogen E F erhält, so dass nun die cylindrische Wölbung E F f t e leicht und ohne Brettung behauen werden kann. Auf diese Art erhält man freilich die kleine Curve e θ f nicht mehr; trägt man aber auf eine Erzeugende die auf Fig. 1 gemessene Länge t θ, so erhält man den Punkt θ, der zur Zeichnung der Curve e θ f hinreicht; diese ist die eigentliche Grenze der Wölbung und der windschiefen Fuge, welche letztere wie oben ausgeführt wird.

§. 832.

Bemerkung. Wenn in §. 829 für die Fuge des Trompillon eine auf der innern Wölbung normale Fläche angenommen wurde, so geschah diess nur, um dem Leser eine Uebungsaufgabe der Stereotomie vorzulegen. Denn die Brettungen, die man hiedurch erhält, sind für die Anwendung unbequem, wie auch die einwärts gehenden Winkel in den Gewölbesteinen, z. B. der der Seitenfläche L $\lambda\omega$, welcher daher rührt, weil man die Nebenseitenkante des Parallelepipeds *nicht* in eine der Fugenebenen versetzt hat, wie in §. 813 geschah. Gewöhnlich bildet man daher die Fuge des Trompillon aus einem auf der Mauer A B senkrechten Cylinder, der durch die Curve (a d b, a′ d′ b′) geht; und da die Höhe dieser Curve nur gering ist, so bilden die Erzeugenden mit der innern Wölbung des Trompengewölbes Winkel, die sich nicht weit von 90° entfernen. Dadurch verhütet man auch, die gegen den Horizont geneigte Fläche, auf welcher der Gewölbestein durch die Wirkung der Schwere ein Bestreben herabzugleiten und sich von der Mauer zu entfernen, erhalten würde. Auch wird durch diese Modification die Behauung der Gewölbesteine und des Trompillon sehr erleichtert, wie der Leser selbst einsehen wird.

Cylindrisches Trompengewölbe über einer abgestutzten Ecke.

§. 833.

Nachdem man durch eine schneidende Ebene A B die vorspringende Ecke C, welche durch das Zusammentreffen zweier Mauern gebildet wird, abgeschnitten hat, kann man die über dieser Ecke liegenden Bauwerke durch eine Trompe unterstützen, deren innere Wölburg wieder ein horizontaler Cylinder ist; dieser hat zum geraden Durchschnitt den in die vertikale, auf A B senkrechten Ebene A O erhobenen Kreisbogen A C″. Man muss aber den Halbmesser dieses Kreises so nehmen, dass der dem Punkte C entsprechende Bogen A C″ stets kleiner als 90° ist. Die beiden Stirnebenen A C und B C schneiden hier den Cylinder der innern Wölbung in Taf. 60. Fig. 6.

zwei Ellipsenbögen, die man leicht aufklappen kann, wie auch auf Tafel 29 geschehen ist. Die Theilung in Gewölbesteine geschieht wie auf Tafel 60, und der Trompillon wird auf die in §. 832 angegebene Art gebildet.

Nischenartiges Trompengewölbe.

§. 834.

Taf. 42. Fig. 3. Dieses von einem Kugelviertel gebildete Gewölbe, das einen vertikalen Halbcylinder mit kreisförmiger Basis überdeckt, wird öfters unter die Trompen gerechnet, wegen der Richtung der Fugen, die man alle auf einen Punkt (I, O′) hinlaufen lässt, wodurch die Anwendung eines aus Einem Steine gehauenen Trompillon nöthig wird. Da aber Alles, was diese Nische betrifft, bei Gelegenheit der sphärischen Gewölbe (§. 690) gesagt wurde, so wird hier nur noch bemerkt, dass die Fuge des Trompillon auch normal auf die sphärische Wölbung hätte gemacht werden können, wenn man zu ihrer Bildung einen Umdrehungskegel angewendet hätte, ganz identisch mit dem auf Tafel 59. Die Behauung dieses Trompillon hätte nach §. 820 geschehen können.

Achtes Kapitel.

Von den Treppen.

§. 835.

Die Treppen werden in verschiedenen Formen construirt; bei allen aber müssen gewisse Regeln eingehalten werden, die theils im Bedürfnisse, theils in der Gewohnheit oder in der Wohlangemessenheit ihren Grund haben. Die Stufen einer Treppe sind Steine, welche so über einander gelegt werden, dass jeder gegen den nächst untern um etwas zurücktritt; hieraus folgt, dass jede Stufe nach aussen zwei Hauptseitenflächen, eine horizontale und eine vertikale (die Stufenhöhe, Steigung, *contre-marche*), darbieten muss. Unter dem Auftritte (*giron*) einer Stufe, versteht man denjenigen Theil der horizontalen Fläche, welcher nicht von der obern Stufe bedeckt ist, und auf welchen man den Fuss setzt; er heisst auch die Stufenbreite. Wenn freilich die vorspringenden Kanten der Stufen nicht parallel mit einander sind, so ist die Stufenbreite eine, in der Ausdehnung einer und derselben Stufe, veränderliche Grösse; alsdann aber wird diese Breite, für alle Stufen einer und derselben Treppe, auf einer Curve gemessen, welche mit der Horizontalprojection der Rampe parallel und 48 Centimeter von ihr entfernt ist; denn hierdurch wird eine Richtung bestimmt, in welcher man am bequemsten die Treppe auf- und absteigen und das Geländer derselben fassen kann. Man nennt diese Curve auch Auftrittscurve (*ligne de foulée*); sie spielt eine wichtige Rolle bei den Treppen mit krummen Armen (*à rampes courbes*), wo sie wesentlich zur Abtheilung der Stufen dient, wie sich in der Folge zeigen wird.

§. 836.

Die Breite G der Auftritte und die Höhe H der Stufen müssen bei einer und derselben Treppe durchaus constant sein, wenn letztere einen befriedigenden Anblick und einen bequemen Gang gewähren soll; von einer Treppe zur andern aber können diese Grössen innerhalb gewisser Grenzen sich ändern, je nach der Wichtigkeit und Bestimmung des Gebäudes und nach dem disponiblen Raume im Grundrisse, verglichen mit der Höhe,

die erreicht werden soll. Gewöhnlich nimmt man $G = 0{,}32$ Meter und $H = 0{,}16$ M.; nach Umständen jedoch kann die Seitenbreite sich von 25 bis 40 Centimetern und die Höhe von 11 bis 19, ja, wann die Noth es erfordert, bis 20 Centimetern ändern, in welchem Falle jedoch das Steigen sehr gefährlich wird.

Zwischen G und H muss stets die in der Formel

$$G + 2H = 64 \text{ Centimeter}$$

ausgedrückte Abhängigkeit stattfinden, aus welcher man ersieht, dass wenn G grösser wird, H kleiner werden muss, aber nicht um eine gleiche Grösse, und umgekehrt. Dieses von den alten Baumeistern aufgestellte Abhängigkeitsverhältniss scheint auf folgende Beobachtungen gegründet zu sein. Die grösste Distanz, welche man auf einer Horizontalebene überschreiten kann, beträgt ungefähr 64 Centimeter, während auf einer Vertikalebene, z. B. auf einer Leiter, jene Distanz nur 32 Centimeter beträgt. Die Erfahrung also, dass die Fortbewegung in vertikaler Richtung mühsamer ist, als in horizontaler, muss in das für alle möglichen Fälle aufgestellte Abhängigkeits-Verhältniss beider Bewegungen mit aufgenommen werden, und zugleich muss dieses Verhältniss den beiden äussersten Grenzen genügen. Die obenangeführte Formel gibt aber wirklich

$$\text{für } H = 0,\ G = 0^m,64 \text{ und für } G = 0,\ H = 0^m,32.$$

Es geht aber schon aus diesen Betrachtungen hervor, dass man nicht mit mathematischer Strenge an der fraglichen Formel festhalten könne, und je nach Umständen kann die Summe $G + 2H$ gleich 60 oder 65 Centimetern gesetzt werden *), wobei man aber die bereits angegebenen Grenzen

$$H > 11 \text{ und } < 19,\ G < 40 \text{ und } > 25$$

nicht überschreiten darf.

§. 837.

Treppenarm (*rampe, volée*) heisst eine ununterbrochene Folge von Stufen zwischen zwei **Ruheplätzen** (*paliers*). Durch letztern Namen aber bezeichnet man einen horizontalen Raum, breiter als eine Stufe, der immer wieder in gewissen Distanzen angebracht wird, um den aufsteigenden Personen eine Gelegenheit zum Ausruhen darzubieten. Jeder Ruheplatz sollte so viel Breite haben, dass von der letzten Stufe an, welche die **Austrittsstufe** (*marche palière*) heisst, wenigstens einen mittelgrossen Schritt ($0^m,48$) machen kann; demnach sollte die Breite eines Ruheplatzes wenigstens $0^m,80$ betragen. Was die Zahl der Stufen eines Treppenarmes betrifft, so soll sie 21 nicht übersteigen, weil die Erfahrung lehrt, dass man, auf dieser Höhe angekommen, etwas Ruhe nöthig hat; ferner soll diese Zahl auch nicht kleiner als drei sein, weil eine Treppe von einer oder zwei Stufen nicht nur einen armseligen Anblick gewährt, sondern auch in der Dunkelheit, da man sie leicht übersehen kann, gefährlich wird. Nach einem alten Gebrauche endlich soll jeder Treppenarm eine ungerade Anzahl Stufen enthalten; es wäre aber thöricht, bloss um dieses Gebrauches willen, irgend eine gut getroffene Anordnung aufgeben zu wollen.

§. 838.

Hinsichtlich des Baues gibt es viererlei Arten von Treppen. Zur ersten Art gehören diejenigen, deren Stufen mit beiden Enden in zwei, gewöhnlich parallele Mauern eingelassen und befestigt sind. Die Treppen

*) Obige Regel wird von **Blondel** in seinem *Cours d'Architecture* angeführt, während einige neuere Praktiker die Formel $G + H = 48$ Centimeter annehmen. Diese aber würde, wenn man G zu 25 annähme, für H 23 Centimeter geben, was viel zu viel ist. Im Alterthume wurde, nach **Vitruv**, die Neigung einer Treppe durch ein rechtwinkliges Dreieck bestimmt, das 3 zur Höhe, 4 zur Grundlinie und 5 zur Hypotenuse hatte. Eine so steile Treppe aber wäre für unsere modernen Wohnungen durchaus unzulässig, und sie konnte in den Häusern der Alten nur in so fern passend sein, als diese meist nur ein Erdgeschoss hatten, und die Treppen hauptsächlich dazu dienten, um auf Terrassen oder auf die Höhe der Amphitheater zu führen.

der zweiten Art ruhen auf einem absteigenden Tonnengewölbe, das zwischen zwei Mauern angebracht ist. Die dritte Art enthält solche Treppen, deren Stufen nur mit einem Ende in einer Mauer befestigt sind, und auf einem vorspringenden Halbtonnengewölbe (*demi-berceau en encorbellement*) lagern; eine solche zeigt Fig. 7 der Tafel 59 (§. 825). Zur vierten Art endlich gehören die Freitreppen (*escaliers suspendus*), deren Stufen auch nur mit einem Ende in einer Mauer befestigt sind, und die, was ihren übrigen Theil betrifft, einander gegenseitig tragen. Die Untertheile dieser Stufen bilden eine stetige, steigende Fläche. Die Freitreppen können eine Wange haben oder nicht. Unter der Wange (*limon*) versteht man eine kleine freischwebende Mauer, welche die Häupter der Stufen aufnimmt, damit diese mehr unter sich verbunden werden und die ganze Construction mehr Festigkeit erhalte.

Die Arme aller dieser verschiedenen Treppen können gerade oder krumm sein, und man könnte also noch vielerlei Arten von Treppen unterscheiden; da aber alle diese Arten auch wieder viel Gemeinschaftliches haben, so wurde hier zum Anfange ein Beispiel gewählt, das, in seiner Allgemeinheit, viele der einzelnen Fälle in sich enthält, und überdiess zu wichtigen und feinen geometrischen Betrachtungen Veranlassung gibt. Die Anwendung auf einfachere Fälle kann der Leser selbst machen.

Freitreppe mit einer runden Oeffnung in der Mitte.
(*Escalier suspendu, dit: vis-à-jour.*)

§. 839.

Taf. 61. Es sei V X Y Z das auf der Horizontalebene des Bodens von der vertikalen Mauer des Treppenhauses gebildete Vieleck: hier wurde ein Rechteck dafür angenommen; aber die folgenden geometrischen Betrachtungen werden so allgemein gehalten werden, dass sie sich auch auf irgend welche andere Form des Grundrisses anwenden lassen. Auf einer Geraden O Z, die man senkrecht auf eine der Seiten des Treppenhauses gezogen, nehme man eine Distanz Z U gleich der Stufenweite (*emmarchement*), welche man der Treppe geben will (d. h. gleich der kleinsten Länge der Stufen, da diese gegen die Ecken des Treppenhauses hin länger werden). Von dieser Weite ziehe man eine Distanz U z von ungefähr 48 Centimetern (§. 835) ab und ziehe die Gerade z y parallel mit Z Y. Auf gleiche Weise verfahre man in Beziehung auf jede Seite des Treppenhauses, so erhält man ein von V X Y Z gleich weit abstehendes Vieleck v x y z, in welches man sofort eine Curve v a z einschreiben muss, die alle Seiten desselben berührt und welche die Auftrittscurve (*ligne de foulée*) genannt wird. Diese Curve ist hier eine Ellipse; wenn aber das Vieleck v x y z mehr Seiten hat oder unregelmässig ist, so kann man sie aus mehreren sich an einander anschliessenden Bögen zusammensetzen. Man theilt hierauf diese Curve in n gleiche Theile oder Stufenbreiten (*girons*),

$$z\varphi = \varphi\psi = \ldots = ab = bc = cd = \ldots\ldots,$$

deren Anzahl so gross sein muss, dass die allen gemeinschaftliche Grösse G noch innerhalb der in §. 836 angegebenen Grenzen enthalten ist. Da ferner die Anzahl der Stufen von z bis v (*inclusive*) $n + 1$ betragen wird, so muss man untersuchen, ob der Quotient, den man erhält, wenn man den gewöhnlich bekannten Höhenunterschied dieser Punkte durch $n + 1$ dividirt, innerhalb der in §. 836 angegeben Grenzen für die Höhe H einer Stufe enthalten ist; wenn nicht, so muss man die Zahl n und folglich die Grösse $G = ab$ ändern, um H in jene Grenzen zu bringen, und zugleich zwischen G und H das in §. 836 ausgedrückte Abhängigkeitsverhältniss wenigstens annähernd herzustellen. Sollte man trotz aller dieser Versuche, fortwährend zu grosse Werthe für H oder zu kleine für G erhalten, so bliebe als letztes Mittel die Verminderung der Stufenweite Z U,

wodurch die Curve v a z dem Treppenhause näher gerückt und mehr ausgebreitet würde, so dass man nun den Stufen eine hinreichende Breite geben könnte.

§. 840.

Nach Vollendung dieser vorbereitenden Operationen ziehe man Normalen an die Curve v a z, durch alle Theilpunkte, so wie durch die Mitten l, m, n, ... der Stufenbreiten; alsdann bilden die auf einander folgenden Durchschnitte aller dieser Normalen ein Polygon, dessen Umhüllungscurve $\omega \lambda \mu \alpha \zeta$ genau die Evolute der Curve v a z ist. Ferner trage man auf diese Normalen die Längen a A, b B, c C..., gleich dem Abschnitte z U, so erhält man die Curve U A B C D W (welche keine Ellipse mehr ist), als Basis eines vertikalen Cylinders, in welchem alle Stufen sich endigen. Die Theile AA', BB', CC'... sind die Projectionen der vorspringenden Stufenkanten.

Um die Lage dieser Kanten im Raume völlig zu bestimmen, denke man sich auf dem vertikalen Cylinder z a b c d ... eine Schraubenlinie gezogen, d. h. eine Curve, deren vertikale Ordinaten zu den krummlinigen, auf der Basis z a b c genommenen Abscissen das constante Verhältniss von H zu G haben; und da der Punkt z der ersten Kante bereits die Höhe H hat, so fällt der Anfang dieser Abscissen und der Schraubenlinie offenbar in den Punkt φ_2, der um den Bogen $z \varphi_2 = G$ hinter z liegt. Ferner sind die Punkte a, b, c, d, ... Projectionen der fortwährend um H zunehmenden Ordinaten. Hiedurch nun ist die Schraubenlinie hinreichend bestimmt, ohne dass man nöthig hätte eine Vertikalprojection derselben zu zeichnen. Denkt man sich nun eine Gerade, welche in stets horizontaler Lage sich so bewegt, dass sie beständig die Schraubenlinie z a b c ... bestreift, während sie Tangente an dem vertikalen Cylinder $\omega \lambda \alpha \zeta$ bleibt, so erhält man die stetige Fläche, in welcher die auf A'A, B'B, C'C, .. projicirten Stufenkanten liegen. Es ist leicht zu erkennen, dass diese Rückenfläche stets windschief sein wird, selbst wenn die Auftrittscurve ein Kreis wäre; nur bei einem geraden Treppenarme findet eine Ausnahme statt.*)

§. 841.

Was die innere Wölbungsfläche betrifft, so ist sie identisch mit der vorigen; aber die Schraubenlinie, die ihr als Leitcurve dient, und die wieder auf der Cylinderfläche z a v sich befindet, liegt in jedem ihrer Punkte um eine gewisse, später (§. 843) zu bestimmende constante Grösse δ tiefer, welche von der Dicke abhängt, die man dem Gewölbe geben will. Die Geraden A A', B B', C C', ... sind also wieder die Projectionen verschiedener Erzeugenden der innern Wölbung; letztere Fläche ist aber vollkommen stetig und ununterbrochen, während von der Rückenfläche nur einzelne Erzeugende erhalten bleiben. Um die ganze innere Taf. 61.

*) Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass die Curve z a v mit Recht den Namen Auftrittscurve führt, weil durch sie die einzige Richtung bestimmt wird, in welcher eine regelmässige auf- oder abwärts gehende Bewegung möglich ist. Denn die Curven a b c d v und A B C D W, so wie alle übrigen von der ersten gleich weit entfernten Linien haben dieselben Normalen und eine gemeinschaftliche Evolute $\omega \alpha \zeta$; aber ihre Krümmungshalbmesser differiren um eine constante Grösse $Aa = D$. Nimmt man nun die Punkte a und b als sehr nahe bei einander an, so fallen die Bögen a b und A B mit ihren Krümmungskreisen zusammen und man hat

$$\frac{AB}{ab} = \frac{\varrho - D}{\varrho} = 1 - \frac{D}{\varrho}; \text{ ebenso } \frac{CD}{cd} = 1 - \frac{D}{\varrho'}.$$

Da nun $cd = ab$ und $\varrho' < \varrho$, so muss $CD < AB$ sein, und mithin werden die Bögen AB, BC, CD,... zugleich mit ihren Krümmungshalbmessern kleiner. Will man also auf einer andern als der Curve a b c d v die Treppe auf- oder absteigen, so kann die Bewegung nicht mehr gleichförmig sein, weil, bei gleichen Höhenabsätzen, die horizontalen Räume, die man überschreiten muss, ungleich sind. Dieser Fehler wird besonders merklich, wenn man auf einer dem Treppenhaus nahen Linie schnell abwärts steigen will.

Wölbung in partielle Wölbungsflächen zu theilen, und damit die Stufen, indem sie sich zum Theil überdecken, sich gegenseitig tragen, nehme man als Wölbungskanten die Normalen 1λ, $m\mu$, $n\nu$, ... an, welche man durch die Mitten der Stufenbreiten d c, c b, b a, .. gezogen hat, so dass also eine der Stufen sich, im Grundrisse, von B B′ bis L L′ erstrecken wird. Um hierauf die Fuge zu bilden, welche, längs der Kante L L′, normal auf der Fläche sein soll, müsste man, wie in §. 778, durch die verschiedenen Punkte dieser Erzeugenden Normalen auf die windschiefe Fläche ziehen, wodurch man ein hyperbolisches Paraboloid erhalten würde (Darst. Geom. §. 583). Hier aber begnügt man sich damit, an die Stelle einer solchen Normalfuge die Ebene zu setzen, welche man durch die Erzeugende L L′ und durch die in der Mitte P dieser Geraden auf die Fläche errichtete Normale gelegt hat.

§. 842.

Um diese Normale zu finden, muss man zuvor die Berührungsebene an dem Punkte P der windschiefen Fläche construiren, was mit Hilfe eines Anschliessungs-Paraboloids geschieht (Darst. Geom. §. 569). Man ziehe daher an den Punkt 1 der leitenden Schraubenlinie eine Tangente, deren Projection 1 d sein wird, und welche eine beliebig angenommene Horizontalebene, die z. B. 3 Stufenhöhen unterhalb der Erzeugenden L L′ liegt, in einer Distanz 1 d schneidet, welche 3 Stufenbreiten oder 3 l m gleich ist; denn die Subtangente einer Schraubenlinie ist stets der krummlinigen Abscisse des Berührungspunktes gleich (Darst. Geom. §. 449), und letztere muss gleich 3 G sein, weil die Ordinate gleich 3 H genommen worden ist. Man bemerke ferner, dass die Erzeugende $1 L \lambda$ der windschiefen Wölbung den vertikalen Cylinder der Evolute in einem Punkte der Vertikalen λ berührt; lässt man daher diese Erzeugende, während sie immer horizontal bleibt, über die Vertikale λ und über die Tangente 1 d der Schraubenlinie hingleiten, so entsteht dadurch ein Paraboloid, das dieselbe Leitebene, wie die Wölbungsfläche, und zwei Berührungsebenen mit ihr gemeinschaftlich hat. Denn im Punkte 1 ist die Berührungsebene offenbar gemeinschaftlich: für den auf λ projicirten Punkt aber würde die Berührungsebene an der windschiefen Wölbung durch die Erzeugende 1λ und durch die Tangente an der Curve gehen, welche auf dem Cylinder $\omega \lambda \alpha$ durch die Aufeinanderfolge der Berührungspunkte der verschiedenen Erzeugenden gebildet wird. Diese Berührungsebene ist also keine andere als die, welche den Cylinder längs der Vertikalen λ berührt; letztere aber fällt auch mit der Berührungsebene am Paraboloid zusammen, welche offenbar durch die Erzeugende 1λ und die vertikale Leitlinie λ geht.

Hieraus nun folgt, nach §. 564 der darst. Geometrie, dass das auf die angegebene Art gebildete Paraboloid die windschiefe Wölbung nach der ganzen Länge von $L' L \lambda$ berührt, und dass es also hinreichend ist, die Berührungebene an dem Punkte dieses Paraboloids zu construiren. Zu diesem Zwecke bemerke man, dass die Horizontale λ d eine zweite Lage der Erzeugenden λ l ist; schneidet man daher diese beiden Geraden durch die Vertikalebene P Q, welche senkrecht auf λ l und folglich parallel mit beiden Leitlinien des Paraboloids ist, so wird die Gerade, welche den Punkt Q mit dem in P projicirten Punkte im Raume verbindet, ganz auf der Fläche des Paraboloids liegen (Darst. Geom. §. 539) und also, in Verbindung mit der Erzeugenden $P\lambda$, die gesuchte Berührungsebene bestimmen. Wenn man nun die Vertikalebene P Q um die als Projectionsaxe betrachtete Gerade P Q aufklappt, so ergibt sich als Vertikalprojection der Erzeugenden $P\lambda$ ein Punkt P′ von solcher Lage, dass P P′ = 3 H, und P′ Q erscheint nun als vertikaler Grundschnitt derjenigen Ebene, welche das Paraboloid und die windschiefe Wölbung zugleich berührt: ihr horizontaler Grundschnitt ist die mit P L parallele Gerade Q q. Hieraus folgt, dass die Normale auf der innern Wölbung für den Punkt P zur Vertikalprojection die auf P′ Q senkrechte Gerade P′ G′ und zur Horizontalprojection die Gerade P G hat. Die Fugenebene also, welche durch diese Normale und durch die Wölbungskante $P L \lambda$ gehen soll,

muss senkrecht auf der Vertikalebene P Q stehen und hat also zum vertikalen Grundschnitte die G′ P′ selbst, während ihr horizontaler Grundschnitt die auf der Projectionsaxe senkrechte p′ p ist.

§. 843.

Die Fuge muss bis zur obern Seitenfläche der Stufe gehen; denkt man sich also in einer beliebigen Höhe P′K′ die Horizontalebene K′ G′, welche jene Seitenfläche vorstellen soll, so schneidet sie die Fugenebene P′ G′ in einer mit P L parallelen Geraden, welche sich vertikal in G′ und horizontal in G R projiciren wird; so dass also die Fuge zwischen L′L und R′R enthalten ist. Man bemerke aber wohl, dass wenn gleich die Höhe P′K′ wegen der Festigkeit des Gewölbes wenigstens 4 oder 5 Centimeter betragen muss, der Punkt R doch nicht den Endpunkt C der Kante C′ C der obern Stufe erreichen darf; denn sonst würde diese letztere Stufe den Auftritt der vorhergehenden nicht mehr gehörig überdecken, was ein grosser Fehler wäre. Die Höhe P′ K′ hängt auch mit von der vertikalen Distanz δ ab, welche die äussere und innere Wölbung von einander trennt, und welche in §. 841 unbestimmt gelassen wurde. Da nämlich der Bogen l m b der Auftrittslinie gleich $^3/_2$ G ist, so folgt, dass auf der leitenden Schraubenlinie der Wölbungsfläche der in l projicirte Punkt und mithin auch die Erzeugende L l L′ um $^3/_2$ H höher ist als die Erzeugende B b B′. Fügt man zu dieser Höhendifferenz nun noch die Höhe P′ K′, so ist die Summe gleich der vertikalen Distanz δ, welche die beiden Erzeugenden der äussern und innern Wölbungsfläche, deren gemeinschaftliche Horizontalprojection B b B′ ist, von einander trennt. Man hat also immer

$$P' K' + {}^3/_2 H = \delta.$$

Diese Relation geht noch deutlicher aus der Vergleichung der Punkte L″, B″, B‴ in Fig. 2 hervor, von deren Construction gleich nachher die Rede sein wird; und es ergibt sich daraus, dass die Höhe P′ K′ constant sein muss für alle Stufen, wenn man anders die Grösse der durch die Bögen c l, b m, ... angedeuteten Ueberdeckung nicht ändert, was zuweilen nothwendig wird, um dem im §. 843 bezeichneten grossen Fehler in Betreff des Punktes R zu entgehen. Aus dem constanten Werthe der Höhe P′ K′ folgt übrigens nicht, dass die verschiedenen Fugen alle einerlei Breite haben; denn die Neigung der Normale ändert sich von einer zur andern, und man muss daher durch ähnliche Constructionen auch die untere Fuge, welche durch die Wölbungskante M m M′ geht, und ebenso die Fugen für die übrigen Stufen suchen.

§. 844.

Man construire nun die Brettungen für die beiden Häupter der Stufe. In Beziehung auf dasjenige Taf. 61.
Haupt nun, welches in die Mauer des Treppenhauses eingelassen wird, muss man die Durchschnitte der Vertikalebene X′ Y′ mit den verschiedenen Horizontalen suchen, aus denen die Seitenflächen dieser Stufe bestehen. Fig. 2.
Man errichte daher die vertikalen Ordinaten L′ L″, C′ C″, M′ M″, B′ B″,.... deren erste willkürlich gross genommen werden kann, während jede der andern um $^1/_2$ H kleiner sein muss als die vorhergehende; denn die Erzeugenden der innern Wölbung, welche auf L′ L, C′ C, M′ M, B′ B projicirt sind, gehen durch Punkte der leitenden Schraubenlinie, die, in der Horizontalprojection, durch Bögen l c, c m, m b von der Grösse $^1/_2$ G von einander geschieden sind. Auf diese Art erhält man die Curve L″ C″ M″ B″ als Durchschnitt der Mauer des Treppenhauses mit der windschiefen Wölbung. Man errichte ferner die Ordinate R′ R″ um P′ K′ grösser als L′ L″ und ziehe die Gerade L″ R″, so ist diese der Grundschnitt der obern Fuge auf der Mauer des Treppenhauses; den Grundschnitt M″ S″ der untern Fuge erhält man auf eine ähnliche Art, und zieht man noch die beiden Horizontalen R″ B⁗, S″ B‴ und die Vertikale B‴ B⁗, welche gleich H sein muss, so hat man den vollständigen Umriss der Brettung des Hauptes. Die Brettung A⁗ S″ M″ N″ T″ A‴ des untern

Hauptes erhält man auf ähnliche Weise, und diese beiden Brettungen zusammen nun zeigen deutlich die Art, wie die Treppenstufen unter einander gesetzt und mit einander verbunden werden.

Fig. 3. Um das äussere Haupt der Stufe, welches auf dem Cylinder U A W liegt, zu construiren, muss man diese cylindrische Seitenfläche entwickeln. Man nehme also auf einer beliebigen Horizontalen die Abscissen $L_1 C_1$, $C_1 M_1$, $M_1 B_1$,... gleich den rectificirten Bögen L C, C M, M B der Curve U A W und errichte Ordinaten gleich denen der analogen Punkte auf Fig. 2; hiedurch erhält man die Curve $L_2 C_2 M_2$ als Verwandelte der Durchschnittslinie des Cylinders U A W mit der windschiefen Fläche. Um den Grundschnitt $L_2 R_2$ der Fugenebene zu erhalten, nehme man wieder die Abscisse $L_1 R_1$ gleich dem Bogen L R und die Ordinate $R_1 R_2$ gleich $r' R''$; da aber dieser Grundschnitt $L_2 R_2$ hier eine krumme Linie ist, so muss man einen dritten Punkt finden, z. B. den, welcher in C_1 sich projicirt, wenn man die Fuge verlängert. Man denke sich zu diesem Zwecke durch C eine in der Fugenebene liegende Horizontale gezogen, welche sich in der mit L L' parallelen $C\gamma$ projiciren und den vertikalen Grundschnitt $L'' R''$ der Fugenebene in γ'' schneiden wird. Der Punkt γ'' gibt also offenbar die Höhe des auf Fig. 3 gesuchten Punktes C_3 an.

§. 845.

Behauung des Steines. Man wähle einen Stein aus, der das gerade Prisma fassen kann, welches die Horizontalprojection B' B L L' der fraglichen Stufe zur Basis und die Distanz $B'' B'''$ zur Höhe hat, richte die obere Seitenfläche dieses Prisma her, und zeichne auf sie den Umriss B' B R R'; hierauf kann man mittelst des Winkeleisens die Ebene der vordern vertikalen Seitenfläche ausführen, der man die Höhe $B''' B''''$ gibt, und die vertikale Seitenfläche B' L', auf welche man die Brettung $B'''' B''' S'' M'' L'' R''$ anlegt. Das Winkeleisen reicht auch zur Behauung des vordern Hauptes hin, weil dieses ein gerader Cylinder ist, dessen Leitcurve B R L bereits auf der oberen Seitenfläche des Steines angegeben ist. Auf die hohle Fläche dieses Cylinders lege man sodann die Brettung $B_4 B_3 S_2 M_2 L_2 R_2$, welche man aus Fig. 3 erhalten und in biegsamem Carton ausgeführt hat. Nun ist es leicht, auch die beiden ebenen Fugen und die horizontale Fläche des Untertheiles der Stufe zu behauen, weil man für jede derselben zwei auf den Häuptern bezeichnete Leitlinien hat. Die windschiefe Wölbung endlich wird mittelst eines Lineals ausgeführt, das man gleichzeitig durch die Richtpunkte L'' u. L_2, C'' u. C_2, M'' u. M_2 gehen lässt, welche man aus den bereits auf die Häupter angelegten Brettungen erhalten hat.

§. 846.

Bemerkungen. 1) Gewöhnlich lässt man die Stufenbreite mit der Stufenhöhe nicht in einer vorspringenden Kante, wie B' B (Fig. 1) zusammenstossen, sondern in einem cylindrischen Gesimse, dessen Profil man im Punkte A'''' der Fig. 2 dargestellt sieht; um jedoch die Einsetzung der Stufe in die Mauer des Treppenhauses zu erleichtern, lässt man auf dem Theile der Stufe, welcher in die Mauer greift, jenes Gesims weg. Das Beste ist, bei der ersten Stufenvertheilung auf der Horizontalebene das Gesims ganz unberücksichtigt zu lassen, um in keine Irrthümer zu gerathen; nachher aber kann man es den Brettungen der beiden Häupter beifügen, um die vorspringende Steinmasse zu erhalten, welche zur Behauung des Gesimses nöthig ist.

Fig. 4 u. 5. 2) Manchmal lässt man an dem vordern Haupte der Stufe eine Hervorragung $6 B_4 B_3 A_4 \alpha$ (Fig. 4) stehen, und alle diese Hervorragungen zusammen bilden alsdann eine Wange (limon), welche zwischen dem Cylinder U A W und einem zweiten Cylinder enthalten ist, der dem ersten parallel und 10 oder 12 Centimeter von ihm entfernt ist. Die obere Fläche dieser Wange ist windschief und identisch mit der innern Wölbung

der Treppe, so dass man, um auf Fig. 4 die Curve $\beta\alpha\gamma\ldots$ zu zeichnen, nur die Vertikalen $B_3 B_4$, $A_3 A_4\ldots$ um eine constante Grösse von 5 oder 6 Centimetern verlängern darf. Die Fugen $B_4\,\beta$, $A_4\,\alpha,\ldots$ dieser Wange werden durch Normalebenen der Curve $\beta\alpha\gamma\ldots$ gebildet, was hier hinreichend ist, wegen der geringen Breite der Wange, auf deren oberer Fläche das eiserne Geländer der Treppe befestigt wird. Die Fig. 5 zeigt in perspectivischer Darstellung die Gestalt einer mit einer solchen Wange versehenen Stufe, und der Leser wird leicht daraus ersehen, auf welche Art sie in Stein ausgeführt werden muss. Da jedoch eine solche Anordnung Steine von einem viel grössern Volumen erfordert und einen bedeutenden Abfall veranlasst, so zieht man es vor, die Stufen ohne jene Hervorragung zu lassen und dafür eine besondere, in mehrere Abschnitte getheilte Wange zu bilden, deren jede einen Einschnitt bekommt, in welchen die Häupter von zwei oder drei Stufen aufgenommen werden können, wodurch der Widerstand, den die Treppe zu leisten hat, beträchtlich vermehrt wird. Die folgenden Paragraphen enthalten eine genaue Beschreibung von der Construction einer solchen Wange.

Wange einer in der Mitte offenen Freitreppe.

§. 847.

Es sei a b c d e f die Auftrittslinie, welche wie in §. 835 bestimmt wurde und in gleiche Bögen getheilt werden muss; ferner seien a A, b B, c C, . . die Normalen, auf welchen sich die vorspringenden Kanten der Stufen projiciren, und die Curve A B C D E . . , welche auf der Horizontalprojection die Oeffnung in der Mitte begrenzt (*courbe de jour*), muss äquidistant von der Curve a b c . . . sein. Bekanntlich haben diese beiden Curven zur gemeinschaftlichen Evolute die Curve x y, welche von den Durchschnitten jener Normalen gebildet wird; nimmt man nun auf letzteren die Grössen $A A_2$, $B B_2$, $C C_2,\ldots$ alle gleich der Dicke, welche die Wange erhalten soll, so ist diese zwischen den beiden vertikalen Cylindern enthalten, welche die parallelen Curven A B C D E . . . und $A_2 B_2 C_2 D_2 E_2\ldots$ zu Grundlinien haben. Die obere und die untere Fläche dieser Wange ist windschief und beide identisch mit denen der Treppe (§. 840); nur ist die leitende Schraubenlinie der einen etwas höher als die Rückenfläche, und die der andern etwas tiefer als die innere Wölbung, auf dem Cylinder der Auftrittscurve a b c d e . . . zu nehmen, damit die Wange die Häupter der Stufe nach oben und unten um einige Centimeter überrage. Es folgt hieraus, dass die Erzeugenden dieser windschiefen Flächen sich wieder auf $A A_2$, $B B_2$, $C C_2,\ldots$ projiciren. Da man ferner die ganze Wange in mehrere Theile zertheilen muss, deren jeder aus einem einzigen Steine bestehen soll, so bildet man die Fugen durch Normalebenen auf der mittlern Curve, welche der Durchschnitt ist des von den beiden vorigen gleichweit abstehenden Cylinders $A_3\, B_3\, C_3\, D_3\ldots$, mit einer windschiefen Fläche, welche von der obern und untern Wangenfläche gleichweit absteht. Taf. 62.

§. 848.

Es sei also P die Horizontalprojection desjenigen Punktes der mittlern Curve, durch welchen eine Fuge gehen soll. Man ziehe die Erzeugende p P x, und wähle auf einen Augenblick die auf p P x senkrechte Vertikalebene p t, um auf sie jene Erzeugende in dem Punkte P′ (Fig. 2) zu projiciren, den man in beliebiger Höhe (z. B. 2 H) genommen hat. Hierauf nehme man die Distanzen $P'\pi'$, $P'\pi''$ gleich der Hälfte der Höhe, welche die Wange erhalten soll. Ist nun der Bogen p b der Auftrittscurve $^3/_8$ der ganzen Stufenbreite b c, so muss man die Höhe $\pi' p'$ gleich $^3/_8$ H nehmen und

die Horizontale $p' \beta'$ *) ziehen. Ferner ziehe man ober- und unterhalb $p' \beta'$ andere Horizontalen $\alpha' \alpha'_2$, $\gamma' \gamma'_2$, $\delta' \delta'_2$ in den Entfernungen H, 2 H, 3 H, so sind dieselben die Vertikalprojectionen der Erzeugenden $A A_2$, $B B_2$, $C C_2$, ... der obern Wangenfläche; und bezieht man auf sie die Punkte A, A_2, A_3 und B, B_2, B_3, in welchen eben jene Erzeugenden von den Cylindern A B C D ..., $A_2 B_2 C_2 D_2$... und dem mittleren $A_3 B_3 C_3 D_3$... geschnitten werden, so erhält man die drei Curven

$$\alpha' \beta' \pi' \gamma' \delta', \quad \alpha'_2 \beta'_2 \pi' \gamma'_2 \delta'_2, \quad \alpha'_3 \beta'_3 \pi' \gamma'_3 \delta'_3,$$

welche auf der obern Wangenfläche liegen. Die auf der untern Fläche

$$\alpha'' \beta'' \gamma'' \delta'', \quad \alpha''_2 \pi'' \delta''_2, \quad \alpha''_3 \pi'' \delta''_3$$

erhält man aus den vorigen, wenn man auf jede Vertikale die Länge $\alpha' \alpha'' = \pi' \pi''$ trägt.

Man suche nun die Berührungsebene der mittlern windschiefen Fläche. Zuerst ziehe man die Tangente P' t der leitenden Schraubenlinie, zu welchem Zwecke man nur die Subtangente p t gleich 2 G oder gleich 2 mal dem Bogen a b nehmen darf; hierauf lasse man die horizontale Erzeugende (p P x, P') über diese Tangente und über die Vertikale x hingleiten, um ein Anschliessungs-Paraboloid zu erhalten (§. 842). Die Horizontale t x ist eine zweite Lage dieser Erzeugenden. Nun wird die auf P x senkrechte Vertikalebene P T das Paraboloid in der Geraden (P T, P' T') schneiden, durch welche die gesuchte Berührungsebene P' T' T bestimmt würde. Eben diese Gerade ist aber auch die Tangente der mittlern Curve $A_3 B_3 C_3$..., weil sie sich auch in der Vertikalebene P T befindet, welche den mittlern Cylinder berührt. Mithin hat die Normalebene jener mittlern Curve zum vertikalen Grundschnitte die auf P' T' senkrechte Gerade Q' P' q', und projicirt man nun auf die Grundlinien der drei Cylinder A B C, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ die Punkte, in welchen dieser Grundschnitt Q' P' q' die oberen und unteren Curven der Wange schneidet, so erhält man die Horizontalprojection $Q\, Q_3\, Q_2\, q_2\, q_3\, q$ des Umrisses der Normalfuge.

§. 849.

Es sei R derjenige Punkt der mittlern Curve, durch welchen eine zweite Normalfuge gehen soll. Man nehme senkrecht auf die Erzeugende R y eine Vertikalebene r z (Fig. 3), und projicire auf diese jene Gerade in einem Punkt R' von beliebiger Höhe, z. B. 2 H; hierauf nehme man die Höhe $\varrho' \varrho''$ der Wange so gross, wie in Fig. 2, und construire, wie dort, die oberen und unteren Curven der Wange in der Nähe des Punktes (R, R'). Nun zeichne man noch die Tangente R' z der leitenden Schraubenlinie, und leite daraus die Tangente (R' θ', R θ) der mittlern Curve und die Normalebene N' R' n' ab. Endlich projicire man auf die Grundlinien der drei Cylinder die Punkte, in welchen der Grundschnitt N' R' n' die Curven der obern und untern Wangenfläche trifft, so erhält man die Horizontalprojection $N\, N_3\, N_2\, n_2\, n_3\, n$ der gesuchten Fugenfläche.

§. 850.

Die Gestalt des Gewölbsteins ist hiedurch völlig bestimmt; da aber die Fig. 2 und 3 nur einzelne und unabhängige Projectionen darstellen, so muss man jetzt noch den ganzen Gewölbstein auf eine und dieselbe Ebene projiciren. Man nehme daher zwei parallele Vertikalebenen X Y, $X_2 Y_2$ so an, dass sie auf dem möglichst kleinsten Raume die Horizontalprojection des Gewölbsteines zwischen sich einschliessen: diese Ebenen

*) Man kann die Höhe $\pi' p'$ auf eine bequemere Art finden, mittelst des Dreiecks P' p t, von dem gleich nachher die Rede sein wird; denn nachdem man die Länge des Bogens p b von t an auf die Grundlinie getragen, darf man nur eine Vertikale bis zur Hypotenuse errichten, so ist diese Vertikale gleich der gesuchten Höhe $\pi' p'$.

enthalten die Nebenseitenflächen des Körpers, der den Gewölbestein fassen soll; die Dimensionen desselben werden aber erst bestimmt werden, nachdem man ihn auf eine der beiden Ebenen, z. B. auf X Y, projicirt hat. Man trage daher auf die Vertikale Z von einem beliebigen Punkt an die Theilpunkte 0, 1, 2, 3, ... in Distanzen auf, die alle gleich H sind (Fig. 4); hierauf ziehe man Horizontalen durch dieselben, auf welche man die Punkte B und B_2, C und C_2, D und D_2 projicirt, so kann man die Curven

$$\beta'' \gamma'' \delta'' \varepsilon'' \varphi'' \lambda'' \text{ und } \beta''_2 \gamma''_2 \delta''_2 \varepsilon''_2 \varphi''_2 \lambda''_2$$

zeichnen, welche die untere Wangenfläche begrenzen. Die Grenzcurven

$$\beta' \gamma' \delta' \varepsilon' \varphi' \lambda' \text{ und } \beta'_2 \gamma'_2 \delta'_2 \varepsilon'_2 \varphi'_2 \lambda'_2$$

der oberen Fläche erhält man aus den vorhergehenden, wenn man jede Vertikale um eine Grösse $\beta'' \beta'$ verlängert, welche der auf Fig. 2 bestimmten Höhe $\pi' \pi''$ gleich ist.

§. 851.

Den Mittelpunkt P′ der Fugenfläche setze man auf die im Punkt P errichtete Vertikale in einer Distanz unterhalb $\beta' \beta'_2$, welche der auf Fig. 2 gemessenen Höhendifferenz P′ p′ gleich sei. Nachdem man hierauf den Punkt T in T″ auf der Horizontale P′ T″ der Fig. 4 projicirt hat, ziehe man die Vertikale T″ T′ gleich der gleichnamigen auf Fig. 2, so ist P′ T′ die Projection der Tangente an der mittlern Curve der Wange. Projicirt man ferner auf die Punkte X′ und X'_2 der Horizontalen P′ T″ die zwei Punkte X und X_2, in welchen die auf X P X_2 projicirte mittlere Linie der Fuge von den Vertikalebenen X Y und X_2 Y_2 geschnitten wird, und zieht durch diese zwei Punkte X′ und X'_2 zwei Senkrechte auf die Tangente P′ T′, so erhält man die Durchschnitte der Normalfuge mit den Nebenseitenflächen des Prisma, das den Gewölbestein fassen soll. Dieser Körper hat ferner zur obern und untern Seitenfläche zwei Ebenen U′ V′ und u′ v′, die senkrecht auf der Vertikalebene X Y und parallel unter sich sind, aber so gerichtet, dass sie die Projection der Wange auf dem möglichst kleinsten Raume zwischen sich enthalten. Um endlich die Durchschnittscurven der Normalfuge mit den vier Seitenflächen der Wange zu erhalten, projicire man die Punkte Q und Q_2, q und q_2 auf die oberen und unteren Curven, welchen sie angehören; der mittlere Punkt Q_3 muss in einer Höhe über $\beta' \beta'_2$ projicirt werden, die man aus Fig. 2 erhält; eben so der Punkt q_3; die mittleren Punkte der Seitencurven Q q, Q_2 q_2 müssen genau auf die Horizontale X′ X'_2 zu liegen kommen.

Auf eine ähnliche Art verfährt man in Beziehung auf die Normalfuge, welche durch den Punkt (R, R′) geht, indem man aus Fig. 3 alle auf die Horizontale $\varphi' \varphi'_2$ sich beziehenden Höhendifferenzen nimmt. Die beiden Punkte Y′ und Y'_2, welche man aus Y und Y_2 erhalten, sind diejenigen, durch welche man Senkrechte auf die Tangente R′ θ' ziehen muss, um die Seiten der auf der mittlern Curve normalen Seitenfläche zu erhalten. Hieraus folgt, dass der Körper, der den Gewölbestein fassen soll, hier ein rechtwinkliges Parallelepiped ist, welches durch zwei schief auf den Nebenseitenflächen stehende und unter sich nicht parallele Ebenen abgestutzt worden ist. Diese Form wurde nicht gerade desshalb angenommen, um Material zu ersparen, da die Steinbrüche doch meist nur Blöcke von rechtwinklig parallelepipedischer Form liefern, sondern vielmehr um der Zeit- und Mühe-Ersparniss willen, weil der Arbeiter, statt die Grundflächen des rechtwinkligen Parallelepipeds zu bearbeiten, die nachher doch wieder zerstört werden müssten, nun unmittelbar die auf der mittlern Curve der Wange normalen Seitenflächen behauen kann.

§. 852.

Die Fig. 5 stellt den Durchschnitt der obern Seitenfläche U′ V′ des Parallelepipeds mit den beiden vertikalen Cylindern B C D E F L und B_2 C_2 D_2 E_2 F_2 L_2 dar. Um diese Curven zu erhalten, darf man nur

alle die Vertikalen $C\gamma'$, $C_2\gamma'_2$, $D\delta'$, $D_2\delta'_2$... bis zu ihren Durchschnitten mit der Geraden U′ V′ verlängern, und hierauf die obere Seitenfläche um diese Gerade aufklappen, wodurch die Durchschnittspunkte in die Punkte C', C'_2, D', D'_2, ... zu liegen kommen, deren jeder in derselben Distanz von U′ V′ sich befinden muss, in welcher C, C_2, D, D_2, ... von der Geraden U V sich befinden.

Man hätte auch die untere Seitenfläche u′ v′ sammt ihren Durchschnitten mit denselben zwei Cylindern aufklappen sollen; da aber diese neuen Curven mit den vorigen parallel und folglich identisch wären, so wurde angenommen, die untere Seitenfläche u′ v′ habe sich vorerst in die Lage u″ v″ erhoben; und klappt man sie nun um letztere Gerade auf, so fallen die Durchschnitte beider Cylinder, wenigstens in einem Theil ihrer Ausdehnung mit den ersten Curven $C' D' E'$, $C'_2 D'_2 E'_2$ zusammen.

§. 853.

In Fig. 6 ist die Brettung des einen Hauptes, um die Horizontale $X P X_2$ aufgeklappt, dargestellt; d. h. man hat in beliebig angenommener Entfernung P P′ durch den Punkt P′ eine Parallele $X' P' X'_2$ gezogen, und von dieser an die Höhendifferenzen aufgetragen, welche auf Fig. 4 zwischen P′ T″ und den Ecken des Parallelogramms bestehen, von welchem das Parallelepiped begrenzt wird. Eben so muss man verfahren, um die vier Curven $Q' Q'_3 Q'_2$, $Q' q'$ zu erhalten, welche in wahrer Grösse die Durchschnitte dieser Hauptfläche mit den vier Seitenflächen der Wange sind. Die Fig. 7, in welcher die Brettung des andern Hauptes dargestellt ist, wird durch ähnliche Mittel construirt, indem man die Höhendifferenzen von der Horizontale $R' \theta''$ (Fig. 4) annimmt.

§. 854.

Taf. 62. Fig. 8. **Behauung des Steines.** Nachdem man einen Steinblock ausgewählt hat, der das Parallelepiped fassen kann, dessen Dimensionen auf Fig. 4 und 1 angegeben sind, behaue man die vier Nebenseitenflächen dieses Körpers (es genügt sogar an dreien), und auf die obere und untere Seitenfläche lege man die Brettungen der Fig. 5 an. Nun kann man die beiden Häupter $V V_2 v_2 v$ und $U U_2 u_2 u$ ausarbeiten, von deren Ebenen jede durch zwei bekannte Gerade geht, und auf welche man sodann die Brettungen der Fig. 6 und 7 anlegen muss. Hierauf führe man den concaven Cylinder aus, der zu Leitlinien die Curven $C_2 D_2 E_2 F_2$ und $C'_2 D'_2 E'_2 F'_2$ hat, indem man über diese Curven ein Lineal so hingleiten lässt, dass es zu gleicher Zeit durch die correspondirenden Richtpunkte C_2 und C'_2, D_2 und D'_2, ... geht. Alsdann verfahre man eben so mit dem convexen Cylinder, welcher durch die Curve $C' D' E' F'$ und eine andere unsichtbare Curve geht. Ferner trage man auf jede Erzeugende dieser Cylinder die Längen $C_2\gamma''$ und $C_2\gamma'$, $D_2\delta''$ und $D_2\delta'$, ... aus Fig. 4, und zeichne alsdann mittelst eines biegsamen Lineals auf die Höhlung des Cylinders die Curven $\gamma''\delta''\varepsilon''\varphi''$, $\gamma'\delta'\varepsilon'\varphi'$; und auf die entgegengesetzte und convexe Seitenfläche, welche durch $C' D' E' F'$ geht, zeichne man eben so die beiden analogen Curven der Wange. Nun ist es leicht, die Steinmasse, welche diese Grenzen nach oben und unten überragt, wegzunehmen, und die beiden windschiefen Flächen der Wange zu behauen, mittelst eines Lineals, das man über beide Paare krummliniger Leitlinien hingleiten lässt, und zwar so, dass es durch die Richtpunkte geht, welche den Endpunkten der Geraden $\gamma'\gamma''$, $\delta'\delta''$, ... entsprechen.

§. 855.

Fig. 9. Statt jeden Gewölbestein der Wange durch Eine ebene Fuge zu begrenzen, wendet man hie und da einen Hacken an (Fig. 9), der aus zwei Seitenflächen besteht, welche der vorhin durch (P, P′) gelegten

Normalebene parallel sind; diese beiden um einige Centimeter von einander entfernten Seitenflächen werden verbunden durch eine dritte Ebene, welche durch die Tangente der mittlern Curve geht, und auf dem Seitencylinder der Wange senkrecht ist. Diese Anordnung soll das Hinabgleiten der Gewölbesteine verhindern; betrachtet man aber, wie schwierig es ist, die drei einander entsprechenden Seitenflächen zweier zusammenstossender Gewölbesteine so zu behauen, dass sie genau auf einander passen, so gelangt man zu der Ueberzeugung, dass es besser ist, nur eine einzige ebene Fuge anzuwenden, mit Beifügung eiserner Dübeln, um die verschiedenen Theile der Wange mit einander zu verbinden.

Kreisförmige Treppe.

§. 856.

Wenn die Curve, welche die Oeffnung in der Mitte begrenzt, plötzliche Aenderungen in der Krümmung macht, wie in Fig. 1, wo diese Linie, nachdem sie gerade gewesen, auf einmal kreisförmig wird, so müssen auch die Häupter f e, e d, d c der Stufen in ihrer Breite eine plötzliche und beträchtliche Aenderung erleiden, wenn die Richtung der Kanten auf dem Cylinder jener Curve normal bleiben soll. Um diesen Uebelstand, der das Steigen auf der Treppe unbequem, ja gefährlich machen kann, zu mildern, vertheilt man jene Breiteverminderung auf eine grössere Anzahl von Stufen, so dass sie nicht plötzlich, sondern allmählig eintritt. Man trägt, zu diesem Zwecke, die rectificirte Curve a b c d e f m auf die Gerade a b c d e f m der Fig. 2, und errichtet Ordinaten gleich 1, 2, 3, ... mal der Stufenhöhe H; verbindet man nun die Spitzen a′, b′, c′, ... dieser Ordinaten, so erhält man eine gebrochene Linie, welche hier aus drei Geraden a′ e′, e′ f′, m′ f′ besteht, weil, in Beziehung auf die Breite, zweierlei Stufenhäupter vorkommen, nämlich Taf. 63. Fig. 1.

$$ab = bc = cd = de \text{ und } fg = gh = hk = kl = lm;$$

diese gebrochene Linie a′ e′ f′ m stellt die Verwandelte der Curve a b c d e .. (Fig. 1) im Raume dar, nachdem man den vertikalen Cylinder, auf welchem sie sich befindet, entwickelt hat. Wenn man nun statt des ersten Bruches dieser Linie die Gerade a′ f′ setzte, so würde man dadurch schon eine Vergrösserung der Stufenbreiten um den Punkt a herum erzielen; wenn man aber auch noch den Bruch bei f′ vermeiden und der Verwandelten eine vollkommen stetige Form geben will, so darf man nur eine Curve zeichnen, welche die beiden Geraden a′ f′, f′ m berührt, z. B. einen Kreisbogen; hierauf verlängert man die Horizontalen 10, 9, 8, 7, ... bis an diese Curve, und projicirt die Durchschnittspunkte B′, C′, D′, E′ auf die Grundlinie a m in B, C, D, E; dadurch erhält man die Abschnitte

$$aB,\ BC,\ CD,\ DE,\ EF,\ FG,\ GH,\ Hk,$$

welche, auf Fig. 1 getragen, die Breiten der Stufenhäupter bestimmen. Denn diese Abschnitte sind die horizontalen Projectionen der Sehnen, welche man in die Curve a′ B′ C′ D′ ... einschreiben könnte, und die vertikalen Projectionen dieser Sehne haben eine constante Grösse H; bezeichnen nun ω, ω', ω'', .. die spitzigen Winkel, welche diese Sehnen mit der Horizontallinie machen, so hat man

$$aB = \frac{H}{\text{tang. } \omega},\quad BC = \frac{H}{\text{tang. } \omega'},\quad CD = \frac{H}{\text{tang. } \omega''},\ \ldots$$

Da aber die Winkel ω, ω', ω'', .. immer kleiner werden, weil die Curve ihre Convexität gegen die Grundlinie kehrt, so folgt, dass die Abschnitte a B, B C, C D, ... nach und nach grösser werden.

§. 857.

Verbindet man nun die Punkte B, C, D, ... mit den Theilpunkten 10, 9, 8 ... der Austrittscurve (Fig. 1), Fig. 1.

so erhält man die Projection der vorspringenden Stufenkanten. Diese bilden durch ihre auf einander folgenden Durchschnitte ein Vieleck, das von der Curve $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ umhüllt wird, welche hier die Stelle der Evolute auf Taf. 61 vertritt. Denkt man sich ferner auf den vertikalen Cylinder der Auftrittscurve (1, 2, 3, 4,.... 9, 10) eine Schraubenlinie gezeichnet, zwischen deren Ordinaten und Abscissen das Verhältniss von H zu G = (1, 2) besteht, so wird diese Schraubenlinie zum Theil gerade, zum Theil krummlinig sein, ist aber nichts destoweniger die Hauptleitlinie der Treppenfläche, deren Erzeugung nun auf folgende Art bestimmt wird: Eine stets horizontale Gerade streift über die Schraubenlinie hin, welche sich auf dem Cylinder der Auftrittscurve befindet, und bleibt dabei stets Tangente an dem vertikalen Cylinder der Curve $\alpha\beta\gamma\delta$. Diese Definition passt selbst auf die in 3 k, 2 l, 1 m projicirten Kanten; denn die letzte 3 k der nicht schiefgestellten Kanten ist eine Asymptote jener Curve.

§. 858.

Die innere Wölbung dieser Treppe ist eine mit der vorigen identische Fläche; nur liegt die leitende Schraubenlinie auf dem Cylinder der Auftrittscurve um eine gewisse constante Grösse tiefer, welche von der Tiefe abhängt, welche man den Stufen geben will (§. 843); und jede Wölbungskante projicirt sich auf eine Gerade, wie Q R ϱ, welche durch die Mitte Q des Auftritts geht, und eine Tangente an der Curve $\alpha\beta\gamma\varrho$ ist.

Was die Fuge betrifft, so bildet man sie mittelst einer Ebene, welche man durch die Wölbungskante P Q R und durch die im mittlern Punkte P errichtete Normale der innern Wölbung legt. Hiezu ist, wie in §. 842, ein Anschliessungsparaboloid nöthig, und nach den Erklärungen jenes §. ist das Verfahren kurz folgendes: Man nimmt die Subtangente Q T der Schraubenlinie gleich 2 G, zieht die Gerade T ϱ, und schneidet sie durch die mit Q T parallele Vertikalebene P S; hierauf nimmt man eine auf der Erzeugenden P Q R senkrechte Vertikalebene, projicirt auf diese die Erzeugende im Punkte P′, in einer Höhe 2 H, so ist P′ S′ S die Berührungsebene an (P, P′). Hieraus ergibt sich ferner die Normale P′ N′ und die Fugenebene P′ N′ N. Nimmt man endlich den Abschnitt P′ U′ gleich der vertikalen Höhe, welche man allen Fugen geben will (§. 843), so stellt die Horizontalebene U′ V′, welche die Fuge in der mit der Wölbungskante parallelen Geraden (V′, V v) schneidet, den obern Theil der Stufen dar.

Die Entwickelung der Brettungen für die Stufenhäupter geschieht, wie auf Tafel 61, und die Wange, wird nach den Methoden der §§. 847,... 854 behauen, dabei aber angenommen, die obere und untere windschiefe Fläche dieses Körpers werde nach der in §. 857 ausgesprochenen Weise erzeugt.

Spindel-Treppe.

§. 859.

Taf. 63. Fig. 3. Die Stufen sind hier mit ihrem einen Ende in einer Spindel *(noyau)* oder massivem Cylinder befestigt, und mit dem andern in einer kreisförmigen, mit jenem Cylinder concentrischen Mauer. Da ferner die Breite einer solchen Treppe nicht leicht ein Meter übersteigt, so wird gewöhnlich die Auftrittscurve in der Mitte angenommen und ist ein Kreis, der in gleiche Theile getheilt wird, welche innerhalb der in §. 836 angegebenen Grenzen enthalten sind. Die vorspringenden Stufenkanten sind auf die Halbmesser A a, B b, C c,... projicirt; im Raume aber liegen diese Linien auf einer windschiefen Schraubenfläche (Darst. Geom. §. 628) deren Erzeugende die vertikale Axe der Spindel und die auf dem Cylinder der Auftrittscurve (1, 2, 3, 4,...) gezeichnete Schraubenlinie sind. Die Wölbungskanten L l, M m,... gehen durch die Mitten der Auftritte; die Stufen werden gewöhnlich durch Vertikalebenen begrenzt, welche durch jene Wölbungskanten gelegt sind,

wie Fig. 4. es zeigt, wo die Entwickelung der Häupter am Treppenhause dargestellt ist, während man in Fig. 5 die an der Spindel liegenden Häupter dargestellt sieht. Bei der einen wie bei der andern Entwickelung müssen Kreisbögen von constanter Länge rectificirt und Ordinaten gleich H, 2H, 3H,... errichtet werden, so dass alle Umrisse der auf diese Art erhaltenen Brettungen gerade Linien sind, welche die Verwandelten von eben so vielen Schraubenlinien darstellen.

§. 860.

Um die Stufen in die Spindel einzulassen, werden entweder Einschnitte in letztere gemacht (Fig. 6), deren Umrisse, mittelst Anlegung der in Carton ausgeführten Brettungen der Fig. 5, auf den Spindelcylinder gezeichnet werden; oder man gibt jeder Stufe einen Abschnitt der Spindel zu tragen (Fig. 7), welches Verfahren mehr Festigkeit gewährt, aber auch Steine von grösserem Volumen und mehr Mühe erfordert. In allen diesen Fällen ist es gut die einzelnen Schichten, aus welchen die Spindel besteht, durch eiserne Dübeln fest zu verbinden.

§. 861.

Zweite Auflösung. Soll das Untertheil sämmtlicher Stufen eine stetige Fläche bilden, so muss eine Schraubenfläche construirt werden, identisch mit derjenigen, welche die vorspringenden Stufenkanten enthält; nur muss die, auf dem Cylinder der Auftrittscurve gezeichnete leitende Schraubenlinie um eine gewisse Grösse tiefer genommen werden. Die durch die Wölbungskante PQp gehende Fuge wird durch eine in Q auf der Wölbung normal stehende Ebene gebildet. Da aber dieser Punkt hier auf der Schraubenlinie selbst liegt, so bedarf es keines Anschliessungsparaboloids; man construirt die Tangente (QT, P′T′) der Schraubenlinie, wodurch die Berührungsebene P′T′T und folglich auch die Normale N′P′V′ bestimmt wird. Nachdem man hierauf für alle Fugen die constante Höhe P′U′ angenommen, lege man durch U′ die Horizontalebene U′V′, durch welche die obere Kante der hier betrachteten Fuge bestimmt wird. Die Projection dieser Kante ist die mit Pp parallel gezogenen Vv. Die Entwickelung der Brettungen (Fig. 9 u. 10) geschieht wie oben; nur muss man, da die Linie P′V′ die Verwandelte eines Ellipsenbogens ist, noch einen zwischenliegenden Punkt suchen, indem man die Fuge der Fig. 8 mittelst einer durch ihre Mitte gehenden Horizontalebene schneidet; hiedurch erhält man den Bogen PI, welcher dem gesuchten Punkt als Abscisse dient. Fig. 8.

§. 862.

Wenn die Stufen dieser Treppe in die Spindel eingelassen werden, so wird der untere Theil der Einschnitte (Fig. 6) durch eine stetige Schraubenlinie gebildet, was weiter keine Schwierigkeit hat. Soll aber jede Stufe einen Abschnitt der Spindel tragen, so wird das Verfahren viel schwieriger. Denn weil die Dicke eines solchen Abschnitts stets der Höhe E″E′ eines Schraubenganges (Fig. 9) gleich sein muss, und die Horizontalebene E′S′ nicht verlängert werden kann, ohne einen Theil der Wölbung P′R′ mit wegzunehmen, so muss man also unterhalb des Spindelabschnittes ein Stück stehen lassen, um die untere Fuge R′S′ behauen zu können. Da aber diese Fuge in der Nähe des Punktes R′ einen ziemlich spitzen Winkel machen würde, so gewährt diese Anordnung wenig Festigkeit und man zieht es daher vor, den Spindelabschnitt jener untern Fuge anzufügen, ihn aber nicht ganz bis zum Auftritte heraufgehen zu lassen. In Fig. 11 sieht man eine auf diese Art behauene Stufe dargestellt.

§. 863.

Dritte Auflösung. In den Figuren 3 und 8 ist die schnelle Convergenz der Wölbungskanten Ursache, dass die Stufe gegen das Treppenhaus hin eine bedeutende Breite AL, erhält, während das Haupt al Taf. 63. Fig. 12.

sehr schmal ist; hiedurch aber wird ein grosser Abfall an Material verursacht. Ueberdiess ist, besonders in Fig. 8, die Ueberdeckung v f sehr klein und könnte sogar verschwinden und einen gefährlichen leeren Raum lassen, wenn man die Höhe P′ U′ jeder Fuge etwas vergrösserte. Um diese Uebelstände zu verhüten, kann man jede Wölbungskante L l (Fig. 12) durch die Mitte P der Stufenbreite gehen lassen, aber parallel mit der nächst vorhergehenden Kante A a der äussern Fläche. Alsdann wäre die innere Wölbung keine Schraubenfläche mehr, sondern eine windschiefe Fläche, erzeugt durch eine stets horizontal bleibende Gerade, welche sich so über die Schraubenlinie des Auftritts hinbewegt, dass sie in jedem Punkte P oder Q parallel ist mit der Normale des Cylinders, welche um die constante Grösse P_1 oder Q_2 vor jenem Punkte sich befindet. Man könnte auch sagen, die horizontale Erzeugende bewege sich über die Schraubenlinie des Auftritts und über eine andere auf der Spindel gezeichnete Schraubenlinie von der nämlichen Ganghöhe, deren Anfangspunkt um den Bogen a l vor dem der ersten liege. Obgleich hienach die innere Wölbung nicht mehr identisch ist mit der äussern, so wird doch die Normalfuge für den Punkt P auf dieselbe Art construirt wie vorhin, und wie Fig. 13 es darstellt; die Brettungen für die Häupter (Fig. 14 u. 15) erhält man wie gewöhnlich. Die Linie L′ V′ ist die Verwandelte eines Ellipsenbogens desselben und um einen zwischenliegenden Punkt R′ desselben zu finden, schneide man (Fig. 13) die Fuge in ihrer Mitte durch eine Horizontalebene; hierdurch erhält man den Bogen V R (Fig. 12), welcher dem gesuchten Punkt R′ auf Fig. 14 als Abscisse dienen wird.

§. 864.

Fig. 16. Vierte Auflösung. Wenn die Spindel einen kleinen Durchmesser hat, so ist es besser, die Wölbungskanten D d, E e, F f,... so zu wählen, dass sie Tangenten an der Spindel werden, indem sie zugleich durch die Mitten P, Q,... der Stufenbreiten gehen. Die innere Wölbung ist in diesem Falle wieder von der äussern verschieden, und wird erzeugt durch eine horizontale Gerade, welche über die Schraubenlinie des Auftritts hingleitet und dabei stets Tangente an dem vertikalen Cylinder der Spindel bleibt. Die vollkommene Anschliessung dieser innern Wölbungsfläche an den Cylinder gewährt dem Auge einen sehr befriedigenden Anblick. Will man, dass die durch D d gelegte ebene Fuge in dem Punkte P, welcher auf der Schraubenlinie des Auftritts liegt, normal auf der Wölbung sei, so muss man wie bei Fig. 13 verfahren, soll aber die Fuge in irgend einem andern Punkte als P normal sein, so muss man ein Anschliessungsparaboloid anwenden, wie bei Fig. 1 dieser Tafel geschah. Um allzu spitzige Winkel zu vermeiden, muss man durchaus hier jeder Stufe einen Spindelabschnitt zu tragen geben, so dass also eine solche Stufe die in Fig. 11 dargestellte Form erhält.

Gewölbe unter einer runden Spindeltreppe.
(Vis Saint-Gilles ronde.)

§. 865.

Taf. 64. Fig. 1. Dieses Gewölbe hat seinen Namen von der Priorei Saint-Gilles in der Provence, wo ein derartiges sich befand. Es ist bestimmt, die Stufen einer Treppe zu tragen, welche zwischen einer cylindrischen Spindel und einer mit dieser Spindel concentrischen Mauer enthalten sein soll. Die innere Wölbung wird erzeugt durch den vertikalen Halbkreis (A′ L′ M′ B′, A B), der sich so um die Axe des Cylinders dreht, dass alle seine Punkte Schraubenlinien von der nämlichen Ganghöhe beschreiben; theilt man daher diesen Halbkreis in eine ungerade Anzahl gleicher Theile, so erhält man als Wölbungskanten die Schraubenlinien, welche von den Punkten (L′ L), (M′ M),.. beschrieben und auf

$$(L' l' l'' L'',\ L l l_2 L_2),\ (M' m' m'' M'',\ M m m_2 M_2),\ldots$$

projicirt sind.

Um diese Curven, z. B. die zweite, zu construiren, muss man zuvor die Stufenbreiten auf einem Kreise 1, 2, 3, 4,... angeben, den man in einer Entfernung gleich 50 Centimetern (§. 835) von der Spindel beschrieben hat. Zieht man alsdann die Halbmesser $O_1, O_2, O_3, \ldots$ so findet man auf dem Kreisumfange $M m m_2 M_2$ die horizontalen Projectionen derjenigen Punkte der Schraubenlinie, deren Ordinaten gleich H, 2 H, 3 H,... sein müssen. Errichtet man daher, von der durch M′ gezogenen Horizontalen an, Vertikalen die jene Grösse haben, so findet man die verschiedenen Punkte der Sinusoïde M′ m′ m″ M″.

§. 866.

Zieht man nun ferner auf die erzeugende Curve die Normalen L′ R′, M′ P′,... und verlängert sie bis zu den entsprechenden Mauer- oder Spindelschichten, so werden diese Geraden, die alle die vertikale Axe O der Spindel schneiden, bei der Bewegung des erzeugenden Kreises windschiefe Schraubenflächen, von der Art der beiden Gewindeflächen einer dreieckigen Schraube, erzeugen, (Darst. Geom. §. 598). Diese Schraubenflächen werden hier als Lagerfugen der Gewölbesteine*) angenommen. Die äussere Fläche wird durch eine Schraubenfläche gebildet, welche die Horizontale P′ Q′ beschreibt, und welche bei der Schraube mit viereckigem Gewinde vorkommt (Darst. Geom. §. 616).

Was die Stossfugen betrifft, wodurch der durch das Fünfeck L′ M′ P′ Q′ R′ erzeugte Gewölbetheil in seine einzelnen Gewölbesteine getheilt wird, so werden dieselben durch Ebenen gebildet, die normal stehen auf der Schraubenlinie, welche der in der Mitte des Bogens L′ M′ genommene Punkt D′ beschreibt. Die Anwendung der Schraubenlinie, welche von dem Mittelpunkte des um jenes Fünfeck beschriebenen Rechtecks erzeugt wird, wäre hier nicht statthaft gewesen, wie auf Tafel 62, weil man bei den Wölbungskanten, die durch L′ und M′ gehen, viel mehr die spitzigen Winkel vermeiden muss, als bei den Kanten der äussern Fläche.

§. 867.

Man nehme nun auf der mittlern Schraubenlinie (D′ δ′ D″, D δ D_2) zwei Punkte (d, d′) und (d_2, d″) an welche willkürlich liegen können, aber in gleichen Abständen von dem auf der Vertikalebene senkrechten Halbmesser O δ genommen werden. Diess ist immer möglich, weil man die Vertikalebene stets so wählen kann, dass letztere Bedingung erfüllt werde, und weil auch alle Gewölbesteine einer und derselben Schichte identisch sind, mit Ausnahme ihrer Länge, welche veränderlich sein kann. Man construire zuerst die Tangente der mittlern Schraubenlinie für den Punkt (d, d′), indem man eine Subtangente d t gleich dreien von den Theilen des Kreises D d nimmt, und hierauf das rechtwinklige Dreieck d′ o′ t′ bildet, dessen Höhe gleich 3 H ist. Durch ähnliche Mittel erhält man auch die Tangenten (δ d, δ′ d′) und (d_2 t_2, d″ t″) derselben Schraubenlinie.

Nun denke man sich durch den Punkt (d, d′) eine auf die Tangente (d t, d′ t′) senkrechte Ebene gelegt, und suche ihre Durchschnitte mit den fünf Seitenflächen des Gewölbesteines. Um sich diese Construction zu erleichtern, lasse man die schneidende Ebene sich so bewegen, dass sie stets normal auf der

*) Die so gebildete Fuge ist nicht ganz auf der innern Wölbung; denn für diesen Fall müsste die Erzeugende M′ P′ nicht nur senkrecht auf der Tangente des erzeugenden Kreises A′ M′ B′, sondern auch senkrecht auf die Tangente der vom Punkt M′ beschriebenen Schraubenlinie sein. Da nun ohnehin verschiedene Tangenten an die Schraubenlinie construirt werden, so wäre es leicht, aus ihnen die Normalen der innern Wölbung längs der Schraubenlinie M′ m′ m″ M″ zu finden; dadurch würde man eine neue, von der Schraubenfläche verschiedene windschiefe Fläche erhalten, deren Durchschnitt mit der von der Horizontalen P′ Q′ erzeugten Schraubenfläche man suchen müsste. Da aber diese Operationen sehr mühevoll wären, so begnügt man sich gewöhnlich mit der im Texte angegebenen Anordnung.

Mittelcurve ($D'\delta' D''$, $D\delta D_2$) bleibe, und versetze sie auf diese Art in den Punkt (δ, δ'). In dieser Lage ist sie senkrecht auf der Vertikalebene und projicirt sich auf derselben als eine, rechtwinklig auf $\delta' d'$ gezogene Gerade $u' v'$; bezeichnet man nun die Punkte $\lambda', \delta', \mu', \pi', \ldots$ in welchen der Grundschnitt $u' v'$ die verschiedenen Sinusoïden $L' \lambda' L''$, $D' \delta' D''$, $M' \mu' M''$, ... so wie andere, durch die Mitte der Seiten $M' P'$, $P' Q'$... beschriebene Curven derselben Art schneidet, und projicirt alle diese Punkte $\lambda', \delta', \mu', \pi', \ldots$ auf die entsprechenden Kreise der Fig. 1, so erhält man das krummlinige Vieleck $\lambda \delta \mu \pi \chi \varrho$ als Horizontalprojection des durch die Normalebene $u' v'$ gemachten Schnittes. Nun geht aber aus der schraubenlinienförmigen Bewegung des Vielecks $L' M' P' Q' R'$ hervor, dass die Schnitte, welche in den auf diese Art erzeugten Körper durch Ebenen gemacht werden, welche auf einer und derselben Schraubenlinie normal sind, alle identisch sein müssen, wie auch ihre Projectionen auf der Horizontalebene; versetzt man also die Punkte $\lambda, \delta, \mu, \pi, \ldots$ auf denselben Kreisen in die Punkte l, d, m, p, ... welche in Beziehung auf den Halbmesser O d dieselbe Lage haben, wie jene ersten gegen den Halbmesser $O\delta$, so erhält man die Horizontalprojection l d m p q r des durch den Punkt (d, d') gehenden Normalschnittes; hieraus aber ergibt sich auch die Vertikalprojection l', d', m', p', q', r' indem man die Punkte l, d, m, p, ... auf die entsprechenden Sinusoïden der Fig. 3 projicirt.

Ebenso versetze man das Vieleck $\lambda \delta \mu \pi \chi \varrho$ in $l_2\, d_2\, m_2\, p_2\, q_2\, r_2$, woraus man sodann $l''\, d''\, m''\, p''\, q''\, r''$ als zweite Projection erhält, so dass man nun auch den durch den Punkt (d_2, d'') gehenden Normalschnitt kennt. Hiedurch aber ist der zwischen den Punkten (d, d') und (d_2, d'') enthaltene Gewölbestein völlig bestimmt. In Fig. 3 ist derselbe vereinzelt dargestellt.

§. 868.

Taf. 64. Fig. 3. Man umhülle nun diesen Gewölbestein durch ein abgestutztes Parallelepiped, das auf folgende Art gebildet wird: 1) zwei Vertikalebenen $g\, h_2$, $f\, e_2$ werden senkrecht auf den Halbmesser $O\delta$ gelegt; 2) zwei auf den vorigen senkrechte Ebenen werden so gestellt, dass ihre Grundschnitte $g' g''$, $h' h''$ parallel und so geneigt sind, dass sie die Projection des Gewölbesteins auf dem möglichst kleinsten Raum einschliessen; hiezu kommen noch 3) die beiden Normalebenen auf der mittlern Schraubenlinie, welche durch die Punkte (d, d') und (d_2, d'') gelegt worden sind. Diese letzteren Ebenen schneiden die anderen in den Parallelogrammen

$$(e f g h,\ e' f' g' h'),\ (e_2 f_2 g_2 h_2,\ e'' f'' g'' h''),$$

die auf folgende Art construirt werden. Man denke sich durch den Punkt (d, d') und in der ersten Normalebene eine Horizontale gezogen, welche sich offenbar in O a d b und $a' d' b'$ projiciren wird. Diese Horizontale nun schneidet die Vertikalebenen $f\, f_2$ und $g\, g_2$ in den Punkten (a, a'), (b, b'); zieht man nun durch die Punkte a' und b' die Geraden $e' f'$ und $g' h'$ senkrecht auf die Tangente $d' t'$ und projicirt die vier Ecken e', f', g', h' auf die Horizontalebene, so erhält man das Parallelogramm e f g h. Das andere Parallelogramm $e_2\, f_2\, g_2\, h_2$ erhält man auf eine ähnliche Art mittelst der Horizontalen ($O\, a_2\, d_2\, b_2$, $a''\, d''\, b''$).

§. 869.

Fig. 4. Es muss nun die wahre Grösse dieser Grundflächen des abgestutzten Parallelepipeds und die wahre Form der auf l d m p q r und $l_2\, d_2\, m_2\, p_2\, q_2\, r_2$ projicirten Fugen gefunden werden. Versetzt man zu diesem Zwecke wieder jene beiden Fugen in die Normalebene $u' v'$, mittelst einer schraubenlinienförmigen Bewegung um die Axe O der Cylinderspindel, so werden sie mit dem Schnitte $\lambda \delta \mu \pi \chi \varrho$ zusammenfallen, und zugleich wird das Parallelogramm e f g h in die Lage $\varepsilon \varphi \gamma \eta$ kommen, welche man erhält, wenn man die verschiedenen Ecken auf denselben Kreisen in dieselben Entfernungen vom Halbmesser $O\delta$ versetzt, in welchen sie ursprünglich

vom Halbmesser d sich befanden. Auf dieselbe Art kommt $e_2 f_2 g_2 h_2$ in $\varepsilon \varphi \gamma \eta$ zu liegen. Nun projicire man auf den Grundschnitt u′ v′ der mittlern Normalebene die verschiedenen Punkte

$$\lambda, \delta, \mu, \pi, \ldots, \varphi, \gamma, \eta, \ldots\ldots, \varphi_2, \gamma_2, \eta_2, \ldots.$$

in

$$\lambda', \delta', \mu', \pi', \ldots, \varphi', \gamma', \eta', \ldots\ldots, \varphi'_2, \gamma'_2, \eta'_2, \ldots.$$

und klappe hierauf diese Normalebene um die Gerade (u′ v′, δ d) auf, nachdem man sie vorher, parallel mit sich selbst, in eine beliebige Entfernung, z. B. nach $u_3 v_3$ (Fig. 4) versetzt hat. Fällt man nun auf letztere Gerade aus den Punkten $\lambda', \delta', \mu', \ldots$ Senkrechte und trägt auf diese die Punkte $\lambda_3, \delta_3, \mu_3, \ldots$ in Distanzen von $u_3 v_3$, welche denen der Punkte $\lambda, \delta, \mu, \ldots$ von der Geraden δ d gleich sind, so erhält man die Brettung $\lambda_3 \delta_3 \mu_3 \pi_3 \chi_3 \varrho_3$ für die beiden äusseren Fugen des Gewölbesteins, welche identisch sind.

Um die Parallelogramme zu finden, welche dem abgestutzten Parallelepiped als Grundflächen dienen, ziehe man wieder Senkrechte aus den Punkten $\varphi', \gamma', \eta', \ldots, \varphi'_2, \gamma'_2, \ldots$ auf $u_3 v_3$, und trage auf diese die Punkte $\varphi_3, \gamma_3, \ldots$ in Distanzen von $u_3 v_3$, welche denen der Punkte $\varphi, \gamma \ldots$ von der Geraden δ d gleich sind; auf diese Art erhält man die Parallelogramme $\varphi_3 \gamma_3 \eta_3 \varepsilon_3$ und $\varphi_4 \gamma_4 \eta_4 \varepsilon_4$, von welchen vier Seiten sich zu zweien auf der Geraden $\delta' \delta_3$ schneiden müssen; denn letztere Linie stellt die Horizontale (O δ, δ') dar, auf welcher die Parallelogramme $\varepsilon \varphi \gamma \eta$ und $\varepsilon_2 \varphi_2 \gamma_2 \eta_2$ sich ebenfalls schnitten, wie solches offenbar aus der im Anfang dieses Paragraphen angewendeten Constructionsart hervorgeht.

§. 870.

Um den Gewölbestein zu behauen, muss man zuvor dem Steinblocke die Form geben, welche eine Wange darbieten würde, die durch die schraubenlinienförmige Bewegung des Rechtecks Q′ X′ Y′ Z′ um die Axe O erzeugt worden wäre. Man muss daher auf die Brettungen der Fig. 4 die Durchschnitte dieser Normalebenen mit den vier Seitenflächen der Wange zeichnen, welche zwei vertikale Cylinder und zwei Schraubenflächen sind. Bringt man nun eine Normalebene in die Lage u′ v′, so schneidet sie die beiden Cylinder in Ellipsen, welche auf den Kreisbögen y z und x χ sich projiciren; die Schraubenflächen aber schneidet sie in den Curven x λ η, χ π z, welche man erhält, indem man die Durchschnitte des Grundschnitts u′ v′ mit den durch die Punkte X′, Y′, Z′ beschriebenen Schraubenlinien sucht. Projicirt man aber die Punkte dieser verschiedenen Curven auf die Gerade u′ v′, und bezieht sie alsdann auf die Aufklappung Fig. 4, ganz auf dieselbe Art wie im vorigen Paragraphen, so erhält man das krummlinige Viereck $x_3 y_3 z_3 \chi_3$, dessen beide Seiten $y_3 z_3$ und $x_3 \chi_3$ Ellipsenbögen sind.

§. 871.

Endlich muss man noch die Brettungen der Fig. 5 construiren, durch welche der Durchschnitt der obern und untern Seitenfläche g′ g″ und h′ h″ des Parallelepipeds (Fig. 3) mit den beiden Normalfugen und den vertikalen Cylindern der Wange dargestellt wird, welche letzteren die Kreise A ϱ A_2 und M μ M_2 zu Grundlinien haben. Man errichte daher Vertikalen in den verschiedenen Punkten

$$e, f, g, h;\ e_2 f_2 g_2 h_2;\ \alpha, \alpha_2, \ldots;\ \beta, \beta_2, \ldots$$

und verlängere sie bis zu ihren Durchschnitten mit der Geraden g′ g″. Um diese klappe man hierauf die obere Seitenfläche um, nachdem man sie vorher in $g_5 g_6$ versetzt hat, ziehe alsdann die Senkrechten

$$\alpha' \alpha_5,\ \alpha'' \alpha_6,\ \beta' \beta_5,\ \beta'' \beta_6, \ldots$$

und mache sie gleich den Distanzen der Punkte $\alpha, \alpha_2, \beta, \beta_2 \ldots$ von der Geraden g g_2. Hiedurch erhält man Punkte genug, um die Curven $\alpha_5 \alpha_6$ und $\beta_5 \beta_6$, welche elliptisch sind, zeichnen zu können. Durch

ein ähnliches Verfahren findet man auch die Ecken der Parallelogramme $f_5 g_5 g_6 f_6$ und $e_5 h_5 h_6 e_6$, welche die in g' g'' und h' h'' projicirten Seitenflächen des Parallelepipeds in ihrer wahren Grösse darstellen, wobei hier angenommen wurde, die zweite sei in vertikaler Richtung erhoben worden, und mit der Ebene der ersten zusammengefallen (§. 852).

§. 872.

Taf. 64. Fig. 6. Behauung des Gewölbesteins. Man stelle zuerst das abgestumpfte Parallelepiped e' f' g' h', e'' f'' g'' h'' der Fig. 6 dar, nach den Dimensionen der Figuren 3 und 5; hierauf lege man auf die obere und untere Seitenfläche die Brettungen der Fig. 5, und auf die Grundflächen die Brettungen aus Fig. 4 an. Nun kann man leicht, wie bei der Wange in §. 854, die concave und convexe Cylinderfläche ausführen, welche durch die Leitlinien $\alpha_5 \alpha_6$ und $6_5 6_6$ gehen; und trägt man alsdann auf die Erzeugenden die auf Fig. 3 gemessenen Distanzen $\alpha_5 \alpha_3$ und $\alpha_5 \alpha_1$, so kann man die Wangenkanten z' z'' und y' y'' zeichnen, und die analogen Curven auf dem convexen Cylinder. Hiedurch aber ist man in den Stand gesetzt, die windschiefen Flächen dieser Wange zu behauen, wie in §. 854, wodurch man einen Körper erhält, dessen Form in Fig. 7 durch punktirte Linien dargestellt ist.

Fig. 7. Auf die Grundflächen dieses Körpers zeichne man nun die beiden Fünfecke l' m' p' q' r' und l'' m'' p'' q'' r'' mittelst der Brettung $\lambda_3 \mu_3 \pi_3 \chi_3 \varrho_3$ der Fig. 4; ferner zeichne man auf die cylindrischen Seitenflächen, mittelst eines biegsamen Lineals, die beiden Schraubenlinien m' m'' und r' r'', und auf die beiden windschiefen Flächen die Schraubenlinien p' p'' und l' l'', wozu man sich der geradlinigen Erzeugenden, wie $\alpha_3 6_3$, bedient, auf welche man eine Länge $\alpha_3 \zeta_3$ gleich dem Abschnitt $\alpha \zeta$ der Fig. 1 trägt. Nun kann man die windschiefe Fuge m' p' p'' m'' behauen, indem man die Schärfe eines Lineals über die beiden Schraubenlinien m' m'' und p' p'' hinführt, so dass sie immer zugleich durch zwei zusammengehörige Richtpunkte, wie ζ_3 und ψ_3 geht; auf dieselbe Art wird auch die untere Fuge l' r' r'' l'' ausgeführt. Zur Herstellung der Wölbung l' m' m'' l'' bedient man sich einer nach dem Bogen $\lambda_3 \delta_3 \mu_3$ (Fig. 4) ausgeschnittenen Lehre, welche man über die beiden Schraubenlinien l' l'' und m' m'' so hingleiten lässt, dass die Ebene der Lehre stets normal bleibe auf der mittlern Schraubenlinie zwischen jenen beiden Leitlinien. Diese Mittellinie kann aber freilich nicht gezeichnet werden, so lange die Wölbungsfläche noch nicht ausgeführt ist, und somit ist die hier gegebene Regel im Grunde fehlerhaft und kann nur durch ein wohlgeübtes Augenmass verbessert werden. Es wäre daher genauer eine nach dem Bogen M' D' L' der Fig. 1 ausgeschnittene Lehre anzuwenden und sie über die beiden Leitlinien l' l'', m' m'' hinzuführen, indem man sie stets in einer beweglichen Meridianebene hält, deren Lage hinlänglich bestimmt ist, durch die auf jenen Leitlinien bezeichneten Richtpunkte, die man mittelst der Halbmesser O α 6, O δ, O $\alpha_2 6_2$.. der Fig. 1 erhalten hat. Man könnte dieser Lehre noch einen geradlinigen Schenkel anfügen (wie bei dem Schrägmass der Fig. 9, Taf. 35), um diesen nach und nach mit jeder der Erzeugenden $\psi_3 \zeta_3$ der obern windschiefen Fuge (Fig. 7) zusammenfallen zu lassen, wodurch die jedesmalige Lage der Lehre genau bestimmt würde. Für einen geschickten Arbeiter ist jedoch letzteres Mittel selten nöthig.

§. 873.

Fig. 2. Bemerkung. Bei diesem Gewölbe müssen alle Gewölbesteine am Anlaufe A' L' und B' N' zugleich einen Theil der Mauer- und Spindelschichten bilden. Längs dieser Spindel läuft also ein vorspringendes schraubenähnliches Gewinde (Fig. 9), welches durch die schraubenlinienförmige Bewegung des Profils B' N' S' erzeugt wurde; dieses Gewinde nun wird durch jede Horizontalfuge S' S'' in den beiden Curven B K und

K i″ w geschnitten (Fig. 1), welche folgenderweise construirt werden. Das erzeugende Profil S′ N′ B′ wird in der Lage, in welcher es sich auf Fig. 2 befindet, von der Horizontalfuge S′ S″ im Punkte (S′, B) geschnitten; hat sich nun dasselbe z. B. um 2 H erhoben, und ist der Punkt (i′, i) in jene schneidende Ebene gekommen, so hat sich dieser unterdessen um die Winkelgrösse 2 G gedreht, so dass also die wahre Projection dieses Durchschnittspunktes nun in i″ sein wird. Ist ferner die Höhendifferenz zwischen S′ und N′ gleich $^2/_3$ H, so nimmt der Punkt (N, N′) auf der Fuge die Lage K an, welche bestimmt wird, wenn man den Bogen N K gleich $^2/_3$ eines Kreistheiles nimmt, welcher der Grösse G entspricht. Das nämliche Verfahren wendet man auch auf den geradlinigen Theil N′ S′ des Profiles an, welcher eine eigentliche Schraubenfläche erzeugt, und man erhält auf diese Art eine archimedische Spirale K B O, wie im §. 608 der Darstellenden Geometrie gezeigt wurde.

Gewölbe unter einer viereckigen Spindeltreppe.

(Vis de Saint-Gilles carrée.)

§. 874.

Ist das Treppenhaus rectangulär und die Spindel massiv, so kann man die Stufen durch ein Gewölbe unterstützen, das mit dem vorigen Aehnlichkeit hat, und, wie das vorige, keinen Ruheplatz voraussetzt. Nachdem man die Projectionen der vorspringenden Stufenkanten gezeichnet hat, wie die Figur es zeigt, beschreibe man den Halbkreis (A′ N′ B′, A B), und denke sich eine Halbellipse, deren horizontale Axe die Diagonale C D, und deren vertikale der Halbmesser des erstgenannten Kreises ist. Der Anlauf dieser Ellipse ist aber in einer Höhe 2 H über A′ B′, so dass ihre vertikale Projection der Kreis C′ N″ D′ ist. Eben so denke man sich über der Diagonale E F eine der vorigen gleiche Ellipse, deren Anlauf aber um 6 H über A′ B′ liegt, und welche sich wieder auf einen Kreis E′ N″ F′ projicirt. Endlich beschreibe man den Halbkreis (K′ N_4 L′, K L) in der Höhe 8 H über dem ersten. Nun lasse man über die Ellipsen A B und C D eine Gerade so hinstreifen, dass sie stets parallel mit der Vertikalebene B D bleibe; ferner über die Ellipsen C D und E F eine Erzeugende, welche der Mauer D F, und endlich über die Ellipsen E F und K L eine Erzeugende, welche der Mauer F L parallel bleibe. Auf diese Art entstehen drei windschiefe Flächen, *) die sich zu zweien in ebenen und vertikalen Curven schneiden, deren Anfangspunkte (C, C′) und (D, D′) gleiche Höhe haben. Diese Umstände sind von Wichtigkeit und hätten nicht stattgefunden, wenn man, wie in Fig. 8 der Taf. 59, absteigende Tonnengewölbe angenommen hätte. Aber dort waren die Gewölbe durch einen Ruheplatz geschieden, während hier das Gewölbe einige Aehnlichkeit mit dem Klostergewölbe der Taf. 45 zeigt. Taf. 64. Fig. 10.

§. 875.

Man zeichnet die Zurüstung auf den Stirnbogen A′ N′ B′. Die Wölbungskanten sind die Erzeugenden, welche von den Punkten M′, N′, P′, Q′ ausgehen. Beim zweiten Treppenarme projiciren die Wölbungskanten sich vertikal auf M″ M‴, N″ N‴, P″ P‴, Q″ Q‴, durch welche Linien die diagonal liegenden Ellipsenpunkte, welche dieselben Ordinaten haben, wie M′, N′, P′, Q′, mit einander verbunden werden. Die Lagerfugen sind Ebenen, welche durch diese Wölbungskanten und die Normalen des Kreises A′ N′ B′ gelegt werden; die

*) Einige Schriftsteller nennen sie windschiefe Tonnengewölbe *(berceaux gauches)*; Frézier, in seiner Stereotomie, nennt sie Cylindroïden.

Stossfugen werden durch Ebenen gebildet, die normal stehen auf derjenigen Erzeugenden, welche durch die Mitte m′ jedes Wölbungsbogens M′N′ geht.

Diese Aufgabe eignet sich übrigens mehr zu einem Uebungsstücke, als zur Anwendung, weil die Stufen allzu schiefe Auftritte und allzu spitze Theile darböten; und wenn auch das Treppenhaus wirklich die hier angenommene Form hätte, so würde man immer besser daran thun, absteigende Tonnengewölbe anzuwenden, und sie durch Ruheplätze abzusondern, welche man durch Klostergewölbe unterstützen würde, fast so wie in Fig. 8 der Taf. 59; nur müssten hier die Halbcylinder vollkommen und nicht, wie in letzterer Figur, bloss als vorspringende Gewölbe *(en encorbellement)* dargestellt werden.

Fünfter Abschnitt.

Holzverbindungen.

Erstes Kapitel.

§. 876.

Alle für Zimmerbauwerke bestimmten Holzstücke (Zimmerstücke) werden zuerst abgeviert, d. h. in Form rechtwinkliger Parallelepipeden behauen. Ihre mehr oder minder grosse Grundfläche heisst das Gevierte oder die Stärke des Stückes; doch bezeichnet man durch letzteres Wort häufig auch die Länge der einzelnen Seiten dieser Grundfläche, die gewöhnlich nicht viel von einem Quadrate abweicht. Handelt es sich von einem wichtigen Gebäude, dessen Zimmerwerk sichtbar sein soll, und dem man Festigkeit und Dauer geben will, so müssen alle Holzstücke scharfkantig behauen und ihre Seitenflächen mit dem Hobel wohl bearbeitet werden, damit die Zusammenfügungen genau auf denselben vorgezeichnet und ausgeführt werden können. Ohne eine solche Genauigkeit, welche den verschiedenen Theilen des Verbandes auch nicht den geringsten freien Spielraum gestattet, ist keine Dauer möglich, besonders bei Zimmerwerken, die grosse Belastungen zu tragen haben. Ferner können wohl zugerichtete Hölzer den zerstörenden Wirkungen der Feuchtigkeit und der Insecten weit eher widerstehen, und sind auch geeigneter zur Annahme einer Oelfarbe, die ein weiteres treffliches Mittel ihrer Erhaltung ist. Man ist desshalb auch seit dem Anfange dieses Jahrhunderts zur Praxis der alten Zimmermeister zurückgekehrt, welche die Bauhölzer mit grosser Sorgfalt abvierten, zusammenfügten und in gewisser Art glätteten; durch welche Mittel, wie auch durch eine gute Auswahl des Materials, die älteren Bauwerke in dem befriedigenden Zustande erhalten blieben, in welchem wir sie noch heute sehen.

Weil also die Genauigkeit der einzelnen Holzverbindungen, durch welche die verschiedenen Theile eines Zimmerwerkes zu einem Ganzen vereinigt werden, so viel zur Festigkeit und Dauer desselben beiträgt, und weil, im Folgenden, bei jedem Schritte das Mittel angegeben werden muss, durch welches dieses oder jenes Holzstück mit den benachbarten Stücken vereinigt werden soll, so müssen vor Allem jetzt die vorzüglichsten und am häufigsten angewendeten Arten der Holzverbindung genau beschrieben werden.

§. 877.

Taf. 65. Fig. 1. Verzapfungen. Es seien A und B zwei Holzstücke, welche verbunden werden sollen. Sie sind hier auf die Ebene ihrer Figurenaxen projicirt; denn man muss, im Allgemeinen, immer dafür sorgen, dass diese Axen in einerlei Ebene zu liegen kommen, damit der Druck des einen Holzstückes auf das andere nicht eine drehende Bewegung hervorzubringen strebe. Diese Ebene der Axen kann horizontal, vertikal sein, oder irgend eine andere Lage haben, je nach dem vorgesetzten Zwecke; um aber stets darüber gewiss zu sein, in welcher Lage man sich die auf den folgenden Figuren dargestellten Zimmerstücke zu denken habe, werden alle horizontalen Projectionen durch Buchstaben ohne Accent, alle vertikalen hingegen, oder auch solche Projectionen, die sich auf Ebenen beziehen, welche gewissen nicht horizontalen Seitenflächen parallel sind, durch Buchstaben mit Accent bezeichnet. Aussenflächen heissen diejenigen Seitenebenen eines Zimmerstückes, welche mit der Ebene der Axen parallel sind; die beiden anderen heissen Normalflächen. In Fig. 1 sind die ersteren horizontal, die anderen vertikal.

Der Zapfen *(tenon)* des Zimmerstückes A ist ein Vorsprung in Form eines Parallelepipeds oder viereckigen Prismas (m n p q, m′ n′ n″ m″), der am Ende des Holzes angebracht ist, und dessen Dicke ein Drittheil oder ein Fünftheil von dem Gevierten m‴ m⁗ beträgt. Die beiden, mit der Ebene der Axe parallelen Seitenflächen (m n p q, m′ n′) und (m n p q, m″ n″) heissen die Seiten oder Wangen *(joues)*, und die beiden anderen auf m′ n′ n″ m″ projicirten Seitenflächen die Rücken des Zapfens; (n′ n″, n p) ist das Zapfenende und (m′ m″, m q) seine Wurzel; m′ m‴ und m″ m⁗ endlich sind die beiden Schultern oder Brüstungen des Stückes A.

Was das Zimmerstück B betrifft, dessen Geviertes hier so gross als bei A angenommen wird, so heisst das Parallelogramm (m q, $m_3 q_3 q_4 m_4$) die Tracht *(portée)* oder Auflage des Holzstückes A; Zapfenloch *(mortaise)* heisst die rechtwinklige Höhlung (m n p q, $m_1 m_2 q_2 q_1$), in welche der Zapfen eingelassen wird, und welche daher mit letzterem identisch sein muss. Die das Zapfenloch begrenzenden Seitentheile (m n p q, $m_1 m_3 q_3 q_1$) und (m n p q, $m_2 m_4 q_4 q_2$) des Stückes B heissen die Wangen jenes Loches. Da jede dieser Wangen einen Widerstand leisten muss, mindestens so gross als der des Zapfens, welcher sie zu sprengen strebt, so ist diess ein Grund, warum die Dicke des letztern nicht ein Drittheil des Gevierten übersteigen darf, wie schon oben angeführt worden.

Gewöhnlich fügt man dieser Verzapfung noch einen eisernen Bolzen c bei, welcher durch den Zapfen und die beiden Wangen des Zapfenloches hindurchgeht. Dieses Befestigungsmittel bleibt aber nur eine gewisse Zeit lang brauchbar und kann dazu dienen, die Zimmerstücke so lange zusammenzuhalten, bis das ganze Zimmerbauwerk aufgerichtet ist; denn die Bolzen verrosten bald, und die Festigkeit des Holzverbandes soll nicht von ihnen, sondern vielmehr von der etwas forcirten Berührung der Wangen des Zapfens mit denen des Zapfenloches abhängen. Was die anderen Seitenflächen betrifft, so lässt man ihnen, um das Einzapfen zu erleichtern, ein wenig Spielraum, und macht auch das Zapfenloch etwas tiefer, als der Zapfen lang ist.

§. 878.

Fig. 2. Wenn die Axen der beiden Holzstücke sich unter einem schiefen Winkel treffen, wie D und E in Fig. 2, so muss man den Zapfen durch eine Fbene m h abstumpfen, welche senkrecht auf der Eingangsfläche m q des Zapfenloches steht, damit der spitzige Einschnitt m n h in das Holzstück E vermieden werde, dessen Ausarbeitung sehr unbequem wäre. Auch würde, wenn das Stück D durch irgend einen Druck das Bestreben erhielte, sich um die Kante q zu drehen, jene spitzige Ecke m n h des Zapfens als Hebel wirken und den Theil n m k des Holzstückes E in der Richtung der Holzfasern zu sprengen streben.

Die Projection D′ ist auf eine Vertikalebene bezogen, welche den Normalflächen von D parallel ist. Eben so ist es mit E′ in Beziehung auf E. Man bemerke hier ein für allemal, dass die Schraffirungen solche Flächen andeuten, welche den Holzfasern nicht parallel sind. Diess ist hier der Fall bei den beiden auf q m projicirten Schultern des Stückes D und bei dem Ende p h des Zapfens, aber nicht bei dessen Seitenfläche p q. Wird aber letztere als dem Zapfenloche angehörig betrachtet, wo sie sich alsdann auf p′ q′ q″ p″ projicirt, so schneidet sie in dieser Richtung die Fasern des Holzes und hat desshalb eine Schraffirung erhalten.

§. 879.

Zapfen mit Versatzung. Wenn durch das eine der beiden Holzstücke das andere kräftig unterstützt werden soll, so wendet man Zapfen mit Versatzung (*embrèvement*) an. Hierunter versteht man einen Vorsprung m′ g′ q′ in Form eines dreiseitigen Prisma's, den man an dem Ende des Stückes A′ anbringt, und der die ganze Dicke dieses Stückes behält, während der Zapfen, welcher die Fortsetzung dieses Vorsprunges ist, nur ein Drittheil jener Dicke bekommt. Die beiden auf m′ g′ q′ projicirten Dreiecke sind die Versatzungsflächen, m′ g′ ist die Stirne der Versatzung, welche nur 1/3 oder 1/4 von der Stirne m′ h′ des Zapfens betragen darf. Gewöhnlich wird diese Stirne senkrecht auf die Axe des Stückes (B′, B″) angenommen; in manchen Fällen aber nimmt man sie senkrecht auf die Axe von (A′, A″), wenn z. B. letzteres Stück auf seiner Basis spielen soll, um in das Stück (B′, B″) eingelassen zu werden. Die schiefe Seitenfläche g″ q″ q″ g″ heisst die Sohle der Versatzung. Fig. 3.

Ist das Stück D′, welches in E′ eingelassen werden soll, von geringerer Dicke als letzteres, so erhält dieses eine beckenartige Vertiefung g″ q″q″ g″, von welcher die Versatzung aufgenommen wird. Die Form der letztern ist wie in Fig. 3. Fig. 4.

§. 880.

Doppelte Versatzung. Ist der Winkel, welchen die Axen beider Holzstücke A′ und B′ mit einander bilden, sehr spitzig, so dass die Auflage des ersten Stückes auf dem zweiten eine beträchtliche Länge erhielte, so ist es besser, eine doppelte Versatzung m′ g′ q′, q′ r′ s′ anzuwenden, wodurch dem Stücke B′ noch kräftiger entgegengestrebt wird. Da jedoch letzteres Stück dem Drucke von unten nach oben ein dreiseitiges Prisma g′ q′ r′ entgegensetzte, dessen Fasern von der Ebene g′ q′ durchschnitten sind, so wäre zu befürchten, dass das Prisma in der Richtung r′ g′ reisse. Aus diesem Grunde gibt man der Versatzung häufig die in Fig. 6 dargestellte Form, wo die Ebene g′ q′ mit m′ s′ parallel ist. Man kann auch diesen Arten von Versatzung noch einen Zapfen beifügen. Fig. 5 u. 6.

§. 881.

Versatzung auf englische Art. Bei dieser Verbindung bekommt das Stück (A′, A″) zwei Zacken, welche beide auf m′ x′ y′ projicirt sind; die Stirne eines jeden wird durch eine Cylinderfläche gebildet, welche zur Leitlinie den aus y′ beschriebenen Kreisbogen m′ x′ hat. Beide Zacken sind durch eine ebene und vertikale Fläche (m′ y′, m″ y″) getrennt. Fig. 7.

Die cylindrischen Stirnen, wie m′ x′, werden häufig von den englischen Zimmermeistern angewendet, weil sie die Holzfasern nicht so schief schneiden, als es durch die Horizontalebene m′ g′ der Figuren 3 und 4 geschieht, und auch weil sie dem Stücke A′ einen freiern Eintritt in das Stück B′ gestatten, als es die Normalebene m′ g′ in Fig. 5 und 6 thut. Da aber diese cylindrische Form nicht so leicht auszuführen ist, als eine Ebene, so kann es geschehen, dass die Stirne nicht genau in den Einschnitt des Stückes (B′, B″)

passt; und hier besonders, wo die beiden Einschnitte $m_2 x_2$, $m_3 x_3$ durch den vorstehenden Theil $m_3 y_2$ getrennt sind, ist es sehr schwer, dieselben so auszuarbeiten, dass sie einem und demselben Cylinder angehören. Ist aber diese Bedingung nicht genau erfüllt, so muss es geschehen, dass während der eine Zacken von A′ schon auf B′ drückt, der andere noch nicht recht sitzt, was ein grosser Fehler ist. Ferner könnte eine zufällig veranlasste Drehungsbewegung den einen der Zacken zu zerreissen streben, so dass also die in Fig. 7 dargestellte Verbindung nicht zur Nachahmung empfohlen werden kann.

§. 882.

Fig. 8. Den dreieckigen Zapfen (m′ n′ p′, m″ p″ p‴ m‴) wendet man hier an, um das vertikale Zimmerstück A′ mit dem schiefen Stücke B′ zu verbinden. Diese Art von Verbindung wird bei Wänden aus Zimmerwerk angewendet, die aus vertikalen Pfosten bestehen, welche unten in horizontale Schwellen eingelassen sind und oben durch Pfetten bekrönt werden; die zwischen den Pfosten befindlichen Zwischenräume werden mit Steinen ausgefüllt und diese durch Mörtel und einen Gypsbewurf verbunden. Damit nun eine solche Wand horizontalen Erschütterungen widerstehen könne, werden in dieselben schräge Pfosten (Bänder, Streben, Biegen) eingesetzt, die einen rechts, die anderen links geneigt, und zu diesem Zwecke müssen alsdann die vertikalen Pfosten in zwei Stücke, wie hier in A′ und D′, getheilt werden, die man Füllpfosten *(tournisses)* nennt. Manchmal wird der Zapfen f′ g′ k′ noch mit einer Versatzung e′ f′ g′ versehen.

§. 883.

Fig. 9. Zapfen mit Verstärkungen. Wenn das horizontale Zimmerstück (A, A′), das mittelst eines Zapfens mit dem Stücke (B, B′) verbunden ist, irgend eine bedeutende Last zu tragen hat, wie es z. B. bei den Bälken eines Fussbodens der Fall sein kann, so ist es gut, dem Zapfen unten noch eine Verstärkung e′ f′ g′ zu geben, welche aber der Wange des Zapfenloches noch eine Dicke g′ h′ lassen muss, die mindestens ein Viertheil von dem Gevierten des Holzstückes beträgt. Manche Zimmermeister ziehen es mit Recht vor, die Stirne einer solchen Verstärkung abzuschrägen, weil dadurch die Einfügung erleichtert und das Holzstück (B, B″) weniger geschwächt wird; aber die Verstärkung muss alsdann oben am Zapfen angebracht werden, wie man es bei dem Stücke (D, D″) sieht, weil sonst die Last auf die schräge Seitenfläche m′ n′ als auf eine schiefe Ebene wirken würde, wodurch der Zapfen das Bestreben erhielte, aus dem Zapfenloche herauszugehen. Bei dieser Verbindung, welche die kappenförmige Verstärkung *(renfort oblique en chaperon)* heisst, muss der Wange des Zapfenloches eine Dicke $r_2 s_2$ gleich mindestens einem Drittheile des Gevierten gelassen werden.

§. 884.

Fig. 10. Schwalbenschwanzförmige Verzapfung. Sollen zwei Holzstücke (A, A′) und (B, B′) so verbunden werden, dass dadurch einem nach der Länge des ersten gehenden Zuge gehöriger Widerstand geleistet werde, so versieht man das Ende des Stückes (A, A′) mit einem keilförmigen Zapfen (e f g h, h′ g′ g″ h″), der die Hälfte der Holzdicke hat, und dessen Hals oder Wurzel e h kleiner ist als die äussere Basis f g. Nachdem man hierauf in das Stück B eine diesem Zapfen identische Höhlung eingeschnitten, wird der Schwalbenschwanz e f g h in dieselbe eingetrieben, und nun kann das Stück A nicht mehr durch einen horizontalen Zug von B getrennt werden. Damit aber die Holzfasern nicht zu schräge geschnitten werden, was ein Ausreissen des Zapfens e f g h in der Richtung dieser Fasern zur Folge haben könnte, so muss man jeder der Schultern m e, n h eine Breite geben zwischen $^1/_5$ und $^1/_{10}$ der Länge m f, welche gewöhnlich der m n gleich ist.

Diese Holzverbindung wird mit Vortheil bei den Bälken eines Fussbodens angewendet, welche mit einem Ende auf einem Zwischenbalken, mit dem andern auf einer Mauerschwelle ruhen sollen. Denn die Erfahrung und der Calcul beweisen, dass ein auf diese Art an beiden Enden eingezapfter Balken einer Last zu widerstehen vermag, die fast doppelt so gross ist, als diejenige, welche er bei einem blossen Aufliegen seiner Enden zu tragen im Stande wäre. Es ist auch wirklich *a priori* klar, dass die schwalbenschwanzförmigen Zapfen der durch die aufliegende Last verursachten Biegung der Holzfasern widerstreben.

Man kann auch dieser Art von Zapfen eine Verstärkung (p q r s, r′ r″ s″ s′) geben, darf jedoch dieselbe nicht tiefer herunter gehen lassen, als bis zur Mitte s′ der Dicke s″ n′ des Stückes (D, D′), damit die Wange des Zapfenloches in dem Stücke (E, E′) nicht zu schwach werde. Fig. 11.

§. 885.

Klauenförmige Verbindung oder Verzapfung auf der Kante. Der horizontal liegende Balken (A′, A″) wird von mehreren vertikalen Pfosten, wie (B, B′), getragen. Damit aber, wenn dieser Holzverband seine Bestimmung unter freiem Himmel hat, das Regenwasser nicht auf (A′, A″) stehen bleiben könne, hat man ihn so gedreht, wie das Profil A″ zeigt, das einen senkrecht auf die Länge von A′ gemachten Durchschnitt darstellt. Nun musste aber nothwendiger Weise der Pfosten B′ so gedreht werden, dass er über Eck gesehen wird, wie der horizontale Durchschnitt B zeigt, damit seine Kanten genau mit denen von A′ zusammentreffen. Die Klauen wurden mittelst zweier gleichschenkliger Dreiecke (x y z, x′ y′), (x v z, x′ v′) gebildet, welche sich auf der horizontalen Kante (x z, x′) schneiden. In der Mitte dieser Seitenflächen aber wurde ein rechtwinkliger Zapfen (e f g h, e′ e″ f″ f′) angebracht, welcher in ein in dem Stücke (A′) befindliches Zapfenloch passt. Dieser Zapfen ist im Profil dargestellt auf Fig. B″, welche eine Projection von (B, B′) ist, auf einer mit x z parallelen und um $x_2\,z_2$ aufgeklappten Vertikalebene. Man erinnere sich, dass die Schraffirungen solche Flächen bezeichnen, welche nicht mit den Holzfasern parallel sind. Taf. 66. Fig. 1.

§. 886.

Zangen *(Moises)*. In Fig. 12 handelt es sich darum, einen horizontalen Dachbalken mit einem Sparren zu verbinden. Hiezu werden die beiden Zangenhölzer A angewendet, welche in ihrer ganzen Breite und bis zur Hälfte ihrer Dicke Einschnitte in den Richtungen jener beiden Hauptstücke erhalten haben, wie auf den Seitenprojectionen A′ und A″ zu sehen ist. Der Verband wird noch durch Bolzen mit Schrauben verstärkt, welche unter- und oberhalb jedes Einschnittes angebracht sind. Man wendet öfters statt zweier nur einen einzigen Bolzen an, welcher die beiden Zangenhölzer und den Balken durchdringt; dieses Verfahren hat aber den Nachtheil, dass dadurch die Fasern des Hauptstückes durchschnitten werden, und somit der Widerstand, den es leisten könnte, vermindert wird. Aus eben diesem Grunde darf man auch dem Balken selbst keinen Einschnitt geben, um das Zangenholz aufzunehmen, wie manche Werkmeister zu thun pflegen. Fig. 12.

§. 887.

Unter dem Andreaskreuze versteht man diejenige Verbindung, durch welche zwei Holzstücke in der Form eines X zusammengefügt werden. Hiebei erhält jedes Stück einen Einschnitt in ganzer Breite des andern und bis zur Hälfte der Dicke, damit die beiden oberen sowohl, als die beiden unteren Seitenflächen in einerlei Ebene zu liegen kommen (vollkommen bündig werden). Man wendet diesen Verband, der auch Ueberschneidung heisst, öfters bei Riegelwänden an, um Schwankungen des Gebäudes einen Widerstand zu setzen, wo sie alsdann die Stelle der in §. 882 besprochenen Streben (Taf. 65. Fig. 8) vertreten.

§. 888.

Taf. 66. Fig. 2. **Vertikale Verlängerungen. Aufpfropfungen** (*Entures verticales*). Die einfachste Verbindung zweier vertikalen Holzstücke, die einzig nur den Wirkungen einer senkrecht drückenden Last zu widerstehen haben, ist in Fig. 2 dargestellt; das obere Stück M′ hat einen Zapfen, welcher ein Drittheil von der Dicke und nur die Hälfte der Breite des Stückes einnimmt, und desshalb ein geächselter Zapfen heisst. Das andere Stück N′ hat ein entsprechendes Zapfenloch. Man verstärkt den Verband noch durch eiserne, fest zusammengeschraubte Klammern. Fig. 3 stellt den Verband mit einem Winkelzapfen, und Fig. 4 mit kreuzförmigem Zapfen dar.

§. 889.

Fig. 5. Die Verlängerung in Fig. 5 geschieht durch Uebergabelung. Jedes der beiden Stücke A′ und B′ hat zwei Zacken und zwei Einschnitte, welche letzteren die Zacken des andern aufnehmen. In (B, B′) z. B. sind die Zacken zwei dreieckige Pyramiden, welche die Dreiecke (m v x, v′ x′), (p y z, v′ z′) zu zwei Grundflächen haben, aber durch die geneigten Ebenen (m g h, m′ g′ h′), (p c d, p′ c′ d′) abgestumpft sind. Die Einschnitte entstehen durch Wegnahme zweier abgestumpfter Pyramiden, welche zu Grundflächen die Dreiecke (q v z, v′ z′), (n x y, v′ x′) und zu Stumpfflächen die Dreiecke (q e f, q′ e′ f′), (n i k, n′ i′ k′) hätten. Man bemerke ferner, dass in der Mitte des Verbandes eine beiden Stücken A′ und B′ gemeinschaftliche horizontale Fläche (v x y z, x′ v′ z′) bleibt, auf welcher die Last ruht, welche sie zu tragen haben; diese Anordnung ist anderen Combinationen, die schon vorgeschlagen wurden, und bei welchen die Last auf den Stirnen der Zacken, oder gar auf einer in den Mittelpunkt (v′, o) versetzten pyramidalen Spitze ruhte, weit vorzuziehen. Zu leichterem Verständnisse dieser interessanten Combination ist in Fig. 6 das Stück (B, B′) einzeln, und zwar auf eine der Diagonale m p parallele Vertikalebene projicirt, dargestellt.

§. 890.

Horizontale Verlängerungen. Anpfropfungen. Die Fig. 7 stellt eine Verbindung zweier horizontalen Stücke A und B mittelst Einscheerung dar; B ist mit einem Zapfen, hier Schlitzzapfen genannt, versehen, welcher in die Scheere oder den Schlitz des Stückes B passt. Verstärkt wird dieser Verband noch durch Bolzen oder Nägel. Ein anderesmal geschehen solche Verlängerungen durch Verblattung, wie in Fig. 8, wo an dem Stücke D das Oberblatt e′ e″ f″ und an B das Unterblatt e″ f″ f′ sitzt. Hier ist jedes Blatt noch mit einem Schwalbenschwanze versehen, daher diese Verbindung der doppelte Schwalbenschwanz heisst.

§. 891.

Fig. 9. **Jupitersschnitt.** (Schräge Verhackung, schräges Kammblatt.) Um aus den beiden horizontalen Stücken (A, A′), (B, B′) einen Balken zu bilden, schneidet man das erste nach der gebrochenen Linie l′ m′ n′ p′ q′ r′ und das andere nach l′ m′ g′ h′ q′ r′. Auf diese Art bleibt ein leerer Zwischenraum g′ h′ p′ n′, welcher nothwendig ist, damit, während man beide Stücke in der Richtung n′ g′ gegen einander spielen lässt, der auswärts gehende Winkel m′ des Stückes B′ und der auswärts gehende q′ des Stückes A′ in die entsprechenden einwärts gehenden Winkel eintreten können. Sind nun die Stirnen l′ m′ und q′ r′ gehörig eingesetzt, so wird in den rechtwinkligen Raum g′ h′ p′ m′ gewaltsam ein Keil eingetrieben. Ausserdem wird der Verband noch durch eine oder zwei eiserne Klammern mit Schrauben verstärkt.

Fig. 10 stellt einen Jupitersschnitt mit doppeltem Hacken und zwei Keilen dar; denn man kann die Zahl der Hacken vermehren, wie man will. Die Aehnlichkeit dieser Hackenlinien mit dem Zickzacke des Blitzes, wie er gewöhnlich von den Malern dargestellt wird, hat dieser Verbindung ihren Namen gegeben.

In Fig. 11 haben die Stirnen statt eines geraden Schnittes einen doppelt schrägen Schnitt oder Grat (*fausse coupe*) erhalten, damit durch einen Seitendruck keines der Holzstücke aus seiner Stelle geschoben werden könne. Zur Vermehrung der Festigkeit ist auch jedes derselben noch mit einem Zapfen versehen worden, wie F′ mit g′ x′ y′ z′; aber das Zapfenloch in (E, E′) muss, um jenen Zapfen aufnehmen zu können, mehr Länge erhalten, als der Zapfen selbst, weil sonst die Einfügung beider Stücke nicht möglich wäre.

§. 892.

Verstärkte, armirte Balken. Wird ein horizontaler Balken A′ A′ durch ein bedeutendes Gewicht beschwert, so verlängern und krümmen sich die unteren Holzfasern, die oberen ziehen sich zusammen, während eine gewisse, nahezu in der Mitte des Balkens liegende Faser unverändert bleibt. Da nun die Hölzer der Zusammenziehung weniger widerstehen, als der Ausdehnung, so verstärkt man das Hauptstück A A′ dadurch, dass man zwei Seitenstücke B′ und D′ sparrenförmig mit ihm verbindet; diese streben gegen die vertikale Fläche g h und sind durch Einschnitte l m n, p q r, x y z mit A′ verzahnt. Durch diese Anordnung wird der Widerstand gegen die Biegung viel mehr verstärkt, als wenn man einfach über A′ A′ ein mit ihm paralleles Stück gelegt hätte. Ausserdem wird auch eine Ersparniss hiedurch erzielt, indem die Seitenstücke um die Hälfte kleiner sind, als das Hauptstück. Jedenfalls werden das Hauptstück und die Seitenstücke noch durch Schraub-Bolzen und -Klammern verbunden; ferner müssen die Stirnen m n, q r, der Zähne sehr genau ausgeschnitten sein, und da diese Bedingung für alle Stirnen zumal schwer zu erfüllen ist, so ist es besser, einen Raum wie q r s t leer zu lassen und ihn hierauf durch einen Keil auszufüllen, den man so lange eintreibt, bis der Verband recht fest ist. Aus demselben Grunde kann man auch zwischen die beiden Stirnen g h einen Keil von hartem Holze einlassen; und damit die an dieser Stelle umgelegte Klammer nicht seitwärts abgleiten könne, wurde der auswärts gehende Winkel beider Seitenstücke mittelst einer horizontalen Ebene e f abgestumpft. Taf. 66. Fig. 13.

§. 893.

Es geschieht auch häufig, dass man zwei Balken der Länge nach neben einander legt und sie durch horizontale Bolzen verbindet. Oder man zersägt einen Baumstamm der Länge nach, und befestigt beide Hälften ihrer Länge nach so an einander, dass die Markseiten nach aussen und die Splintseiten nach innen, also gegen einander gekehrt sind. Dadurch erhält man einen Verband, dessen äussere Form rechtwinklig ist, und bei welcher die Tragkraft derjenigen irregulären Segmente benützt wird, welche durch die Abvierung des Baumstammes abgefallen wären. Diese Balkenverstärkung wird häufig bei Privathäusern angewendet, um jene Querbalken oder Thorriegel (*poitrails*) zu bilden, welche eine Hausthüre überdecken und das Gewicht eines Fensterpfeilers zu tragen haben.

§. 894.

Soll ein Balken von bedeutender Länge, z. B. von 8—10 Meter, construirt worden, so wendet man Fig. 14.
am besten Doppelbalken (A, A′), (A_2, A′) an, zwischen welche man sparrenförmig zwei andere Holzstücke (B, B′), (D, D′) setzt, die mit ihren Fussenden auf zwei Lagern ruhen, die mittelst Zapfen und Versatzung in die Wangen der Stücke A und A_2 eingelassen sind. Die zwei Sparrenhölzer streben gegen

einen Keil $a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f'$, den man mittelst eines Schwalbenschwanzes zwischen die Hölzer A und A_2 eingelassen. Das Ganze ist durch Schraubenbolzen fest verbunden.

Zweites Kapitel.

Von den Dächern im Allgemeinen.

§. 895.

Taf. 67. Das Dach (*comble*) eines Gebäudes besteht aus einer oder mehreren geneigten Flächen. Bei Gebäuden von geringer Bedeutung, z. B. bei einem Schoppen oder einer Werkstätte, genügt meistens ein aus einer einzigen geneigten Ebene bestehendes Dach (Fig. 1), ein Pultdach (*appentis*). Gewöhnlicher ist das Satteldach, welches aus zwei geneigten Ebenen $a'\,z'$, $b'\,z'$ (Fig. 2) besteht; diese schneiden sich in einer Horizontalen z', welche den beiden Längenseiten des Rechteckes parallel ist, auf welches das Gebäude sich projicirt. Wenn die den beiden Breitenseiten dieses Rechteckes entsprechenden Mauern sich, indem sie sich zuspitzen, bis zum Scheitel des Daches erheben, wie in Fig. 2 und 3, so heissen die dreieckigen und vertikalen Flächen $a'\,z'\,b'$ dieser Mauern die Giebel des Hauses. Frontons nennt man diese Giebel, wenn das Karnies am Anlaufe des Daches auch längs des Giebels fortläuft (Fig. 4) und horizontal sich in $c'\,d'$ verlängert, so dass durch dasselbe der trianguläre Raum $c'\,e'\,d'$ umschlossen wird.

§. 896.

Will man einen gemauerten Giebel, der nie einen angenehmen Anblick gewährt, vermeiden, so begrenzt man die vier Mauern des Gebäudes durch ein horizontales Rechteck, und gibt den Dachflächen, welche den Längenseiten dieses Rechteckes entsprechen, die Form von Trapezien; die beiden anderen den Breitenseiten entsprechenden Dachflächen aber, oder Walme, erhalten die Form geneigter Dreiecke, wie Fig. 5 zeigt, welche die Horizontalprojection eines solchen Daches darstellt. Die vier ausspringenden Kanten a o, b o, c e, d e, welche aus dem Durchschnitte der Dachflächen mit den Walmflächen entstehen, heissen Dachwinkel und werden aus Zimmerstücken gebildet, welche rückenförmig geschnitten sind, und Grate genannt werden; die oberste, horizontale Rückenfläche e o, heisst First.

In Fig. 5 heisst der Walm a o b gerade, in Fig. 7 aber schräg.

§. 897.

Wenn zwei Gebäude sich unter einem rechten oder schiefen Winkel schneiden, wie in Fig. 6, so schneiden die Dächer, welche hier gleich hoch vorausgesetzt werden, sich in vier einspringenden, auf i k, i l, i m, in projicirten Kanten, welche man, wie auch die Zimmerstücke, aus welchen sie gebildet werden, Dachkehlen nennt. Diese können ebenfalls gerade oder schräg sein.

Wenn zwei Gebäude sich nicht schneiden, sondern eine Wiederkehr bilden, wie in Fig. 7, so entsteht nach aussen ein Grat e c und nach innen eine Kehle e d.

§. 898.

Zeltdächer. Für ein Gebäude, dessen Grundriss ein Quadrat a b c d (Fig. 8) oder ein nur wenig von diesem abweichendes Viereck ist, wird das Dach gewöhnlich aus vier geneigten Dreiecksflächen gebildet, die in einem und demselben Punkte (o, o′) zusammenlaufen; ein solches Dach ist also nichts anderes, als eine vierseitige Pyramide, und führt gewöhnlich den Namen Zeltdach. Taf. 67.

Manchmal zieht man es vor, jede der vier Mauern mit einem vertikalen Giebel (a z b, a′ z′ b′) zu versehen (Fig. 9), welchem alsdann ein Satteldach entspricht; dadurch entstehen vier Dachkehlen (o a, z′ a′), (o b, z′ b′), (o c, z′ b′), (o d, z′ a′).

Man könnte auch die beiden vorigen Systeme dadurch combiniren, dass man die vier Satteldächer (Fig. 9) durch die Seitenflächen der vierseitigen Pyramide (o a b c d, o′ a′ b′) schnitte (Fig. 10); auf diese Art würden vier Grate o a, o b, o c, o d und neun Kehlen m a, n a, n b, p b, p c, q c, q d, m d entstehen. Ein solches System wäre aber ziemlich verwickelt für die Ausführung.

Endlich könnte man, mit Beibehaltung der vier vertikalen Giebel (Fig. 11), die Satteldächer weglassen, und durch die zu zwei an einander stossenden Giebelkanten vier Ebenen legen. Diese würden sich alle in Einem Punkte (o, o′) schneiden und vier Rauten bilden, welche man als die Ueberreste der vierseitigen Pyramide o $\alpha \beta \gamma \delta$ ansehen kann, nachdem man letztere durch vier Vertikalebenen a b, b c, c d, d a geschnitten hat. Dieses Dach hätte keine einspringenden Winkel, und würde vier Grate o z, o y, o x, o v darbieten, die in den Giebelspitzen ausliefen. Es ist in Fig. 12 dargestellt als Projection auf der mit der Diagonale b d parallelen Vertikalebene $\gamma \delta$.

§. 899.

Vom Hange der Dächer. Bei einem Satteldache wird der Hang oder die Neigung der Dachflächen durch den Winkel ω ausgedrückt, welchen jede der geneigten Ebenen mit dem Horizonte bildet, oder man bezeichnet ihn auch durch das Verhältniss der Dachhöhe $OZ = h$ (Fig. 13) zur halben Breite $OA = b$, welche die Horizontalprojection der geneigten Ebene A Z ist. Dieser Hang ist im Allgemeinen schwächer in den südlichen Gegenden Europa's, als in den nördlichen, wo man gewöhnlich

$$\omega = 60^0 \text{ oder } \frac{h}{b} = \sqrt{3} = \frac{4}{7} \text{ ungefähr}$$

annimmt, d. h. wo das Dreieck A Z B gleichseitig ist. Auf alten Schlössern gibt es noch Dächer, deren Höhe $h = 2\,b$, ja sogar $= 3\,b$ ist. Ein solcher Hang sollte ohne Zweifel den Ablauf des Regenwassers beschleunigen und das Ansammeln grosser Schneemassen auf der Dachfläche verhüten, damit nicht durch die in das Innere des Daches eindringende Feuchtigkeit das Holz faule, und durch grosse Schneemassen das Gebälke belastet werde *). Die Erfahrung aber hat gelehrt, dass diese Nachtheile durch einen allzu grossen Hang nicht bedeutend vermindert werden, während die grosse Höhe eines Daches sehr lange Holzstücke erfordert, die man durch andere Stücke wieder unter sich verbinden muss, so dass hiedurch das Zimmerwerk sehr kostspielig und dabei so massig wird, dass es die Mauern des Gebäudes leicht zerdrücken kann. Da man ferner auf einem Dache von so grossem Hange keine platten und noch weniger hohle Ziegel anlegen kann, indem

*) Man schätzt das Gewicht einer Schneeschichte gleich einem Zehntheile von dem Gewichte einer gleich hohen Wasserschichte von derselben Grundfläche.

sie unfehlbar über eine so sehr geneigte Ebene herabgleiten würden, so hat man den Hang der neueren Dächer um Vieles vermindert.

Wenn andererseits dieser Hang viel unter $\omega = 45^0$ ist, so dringt durch die Wirkungen der Capillarität und der Winde das Regenwasser unter den Ueberzug der Ziegel und Schiefer. Diese tropfen nicht ab, oder trocknen nur sehr langsam, und werden hiedurch sehr bald unbrauchbar. Da ferner der horizontale Stoss des Windes auf die geneigte Dachfläche sich in zwei Kräfte zerlegen lässt, von denen die eine an dem Dachabhange aufwärts wirkt, und um so grösser ist, je kleiner der Winkel ω angenommen wird, so kann es bei allzu niedrigen Dächern häufig geschehen, dass heftige Windstösse die Ziegel eines Daches aufheben und aus ihrem Verbande herausreissen. Auch gewähren solche Dächer wenig Raum zur Anlegung von Fruchtböden, und was endlich die Zimmerarbeit betrifft, so haben sie noch verschiedene Nachtheile, die erst später aus der Construction der Dachstühle sich völlig erklären werden; für's Erste nämlich muss das Gevierte der verschiedenen schiefstehenden Holzstücke, z. B. der Sparren, vergrössert werden, und es beträgt die Vermehrung der Ausgabe durch die Inhaltsvergrösserung der Hölzer mehr, als ihre Verminderung durch die Verkürzung jener Hölzer; für's Zweite nimmt der Druck der Sparren gegen die Dachschwellen um Vieles zu, und es könnte daher in dem Zwischenraume zweier, nicht sehr nahe bei einander stehender Dachstühle, dieser Druck die Schwellen und Gebäudemauern zum Weichen bringen.

Es ist endlich noch zu bemerken, dass der Hang des Daches sich auch nach der Art der Bedeckung richten muss, welche man dem Dache geben will. So muss, bei übrigens gleichen Umständen, der Winkel ω kleiner genommen werden, wenn man Hohlziegel anwendet, aus welchen das Regenwasser, weil es sich leichter sammelt, auch schneller abfliesst, und welche, weil sie mehr Zwischenräume lassen, die Sparren weniger belasten; ja es muss, weil diese Ziegel nur durch die Reibung zurückgehalten werden, welche ihr Gewicht erzeugt, jener Winkel ω stets kleiner, als 27^0 sein. Dagegen darf der Winkel ω vergrössert werden, wenn man Schiefer, und noch mehr, wenn man platte Ziegel anwendet, weil letztere so gelegt werden, dass, in Folge ihres Uebereinandergreifens, auf jeden Punkt des Lattenwerks drei Ziegeldicken kommen, und dass also die Sparren allzu sehr belastet würden, wenn man den Neigungswinkel des Daches nicht vergrösserte.

§. 900.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen geht hervor, dass der Hang eines Daches nicht bloss nach dem geographischen Klima oder der Breite des Ortes bestimmt werden darf, wie *Quatremère de Quincy* es in seinem *Dictionnaire d'Architecture*, und *Rondelet* in seiner *Art de bâtir* vorgeschlagen haben. Ersterer setzte den Winkel ω für den Aequator gleich Null, und vermehrte ihn um 3 Grade für jedes geographische Klima, wenn Hohlziegel angewendet wurden; für eine Schieferbedeckung gab er noch 6, und für platte Ziegel noch 8 Grade zu. Wenn nun diese Regel auch ziemlich genau mit der Praxis übereinstimmt, wie sie in einigen Gegenden, z. B. in Aix, Lyon, Saintes, üblich ist, so weicht sie dagegen in vielen anderen Ländern sehr von dem durch die Erfahrung bewährten Gebrauche ab. Um sie zu vereinfachen, mit Umgehung der unbequemen Eintheilung nach Klimaten, schlug Rondelet vor, den Winkel ω gleich dem Ueberschusse der Breiten des Ortes und des Wendekreises ($23^0\ 28'$) zu nehmen, wonach also vorausgesetzt wird, dass in der ganzen heissen Zone ω gleich Null sei. Diesen für Hohlziegel angenommenen Werth von ω vermehrte er für Schiefer und platte Ziegel, wie oben, um 6—8 Grade. Aber auch diese zweite Regel stimmt nicht genau mit dem in verschiedenen Ländern angenommenen Gebrauche überein, und für eine Breite von 25^0 z. B. wäre der Hang so schwach ($1^0\ 32'$), dass das Wasser in das Innere des Daches sich ergiessen

müsste. Es wird daher das Beste sein, an jedem Orte sich an Das zu halten, was eine lange Erfahrung als das Zweckmässigste erkannt hat, wobei also hauptsächlich das Klima, ob es mehr oder minder regnerisch, die Stärke der gewöhnlichen Winde, und diejenige Bedeckung zu berücksichtigen ist, welche man am leichtesten in der Umgegend haben kann. Zu Paris und in den benachbarten Departements nimmt man gewöhnlich folgende Werthe für ω an:

für Hohlziegel $\omega = 18^0$ bis 26^0, oder $\frac{h}{b} = {}^1/_3$ bis ${}^1/_2$

für Schiefer $\omega = 33^0$ bis 45^0, oder $\frac{h}{b} = {}^2/_3$ bis 1

für platte Ziegel . . . $\omega = 36^0$ bis 51^0, oder $\frac{h}{b} = {}^3/_4$ bis ${}^5/_4$.

Man sieht hieraus, dass der Winkel von 45^0 für die Bedeckung mit Schiefer, wie mit platten Ziegeln, passend ist; auch gestattet eine solche Neigung der Dachflächen den meisten innern Dachraum zur Anlegung von Speichern etc.

Drittes Kapitel.

Von den Dachstühlen.

§. 901.

Um ein Satteldach zu construiren, müssen zuerst, in gewissen Entfernungen von einander, mehrere Dachstühle aufgestellt werden. Hierunter versteht man vertikal stehende Holzverbände in der Gestalt von Dreiecken, deren Grundlinien auf den beiden Längenmauern ruhen, und welche bestimmt sind, alle übrigen Theile des Daches zu tragen. Die Zusammensetzung dieser Dachstühle kann, je nach der Grösse und Bestimmung des Daches, verschieden sein; im Folgenden soll einer der einfachsten Fälle erklärt werden.

Auf Fig. 13 sieht man zuerst den horizontal liegenden Haupt- oder Dachbalken *(tirant)*, der Taf. 67.
zum Theil in die beiden Mauern eingelassen ist; auf seiner Mitte trägt er die Dachsäule *(poinçon)*, gegen welche die beiden Hauptstreben *(arbalêtriers)* sich sperren, welche mittelst Versatzung in ersterer eingezapft sind; auf ähnliche Art sind auch die Füsse dieser Hauptstreben in den Dachbalken eingefügt. Diese vier Stücke bilden einen dreieckigen Verband von unveränderlicher Form, und machen den Hauptkörper des Dachstuhles aus. Auf die Hauptstreben zweier benachbarten Dachstühle legt man zwei oder mehrere Pfetten *(pannes)*, horizontale Holzstücke, welche durch unterlegte Trageklötze *(chantignolles)* festgehalten werden. Die Klötze selbst sind durch zwei Nägel und nicht selten noch durch eine kleine Versatzung mit den Hauptstreben verbunden. Auf jenen Pfetten endlich lagern die Sparren *(chevrons)*, deren Füsse durch eine einfache Versatzung in der Dachschwelle *(sablière)* eingelassen sind. Diese Schwelle ist ein platt auf die Mauer gelegtes Holzstück, das, um dem horizontalen Drucke zu widerstehen, den die Sparrenfüsse auf dasselbe ausüben, mit den Hauptbalken zweier benachbarter Dachstühle durch Einzapfung oder durch Ueberschnitt fest verbunden sein muss, wie solches bei dem geraden Walme (§. 908) genau erklärt werden wird. Eben

daselbst wird auch gezeigt werden, wie die Sparren, zu zweien, oben mit einander verbunden werden müssen, indem sie auf der Firstpfette (*faitage*) aufliegen. In letztere sind die Dachsäulen der auf einander folgenden Dachstühle eingezapft (Fig. 14 und 15). Wenn es sich aber um einen an dem Walme anliegenden Dachstuhl handelt, wie in Fig. 13, so ist die Firstpfette in die Dachsäule eingelassen, weil (nach französischem Gebrauche) letztere in Form einer abgestumpften Pyramide über das Dach hinauf verlängert und mit Metallblech überzogen wird, das in Form einer Traufe über die Schiefer- oder Ziegelstücke herabreicht. In diesem Falle sind auch die beiden zum Dachstuhle gehörigen Sparren durch Versatzung und Zapfen in die Dachsäule eingelassen, wie man auf Fig. 13 sieht. Die Füsse eben dieser beiden Sparren sind in den Hauptbalken und nicht in die Dachschwelle eingefügt.

Da die Dachschwelle nie über die äussere Wand der Mauer hinausgehen darf, so bleibt also zwischen den Füssen der Sparren und dem äussersten Rande des Karnieses ein Zwischenraum, den man durch kleine Sparren, Aufschieblinge (*coyaux*) überdeckt; diese sind auf die Hauptsparren aufgenagelt, und ruhen gewöhnlich auf der auswärts springenden Kante der Schwelle; sie werden hinlänglich zusammengehalten durch Latten, welche man, wie bei den Sparren, querüber nagelt. Damit aber das Gewicht der Aufschieblinge die Hohlkehle, als den zerbrechlichsten Theil des Karnieses, nicht zu sehr beschwere, werden sie so gestellt, dass ihre Fusspunkte 8—10 Centimeter vom äussersten Rande entfernt sind, und alsdann nagelt man über ihren untern Theil ein kleines abgeschrägtes Brett auf, Trauflatte (*chanlatte*) genannt.

Um endlich die Hauptstreben, welche die Last der Pfetten, Sparren und der Bedeckung zu tragen haben, zu unterstützen und zu befestigen, muss man jeder noch ein Streb- oder Kopfband (*contre-fiche*) und einen Stützpfosten (*jambette*) beifügen und zwar so, dass jedes dieser Stücke genau unter eine Pfette komme, damit die Last dieser letzteren die Hauptstrebe nicht krumm biege. Wo diese Bänder und Stützen unter einem spitzen Winkel auf ein anderes Holzstück treffen, da müssen sie durch eine senkrecht auf die Oeffnung des Zapfenloches abgestirnte Versatzung verstärkt werden. Eben so ist das Zapfenloch x auf der Stuhlsäule ein Strebe- oder Achselband zur Unterstützung der Firstpfette aufzunehmen bestimmt.

§. 902.

Bemerkungen. Es ist nicht die Hauptbestimmung des Dachbalkens, die Dachsäule zu tragen; denn es gibt Dachstühle (Fig. 14), wo jene Säule nicht bis zum Balken herabreicht, und wieder andere, wo eben jene Säule es ist, welche zwischen den Köpfen der beiden Hauptstreben festgehalten, den Dachbalken mittelst eines Hängeeisens trägt. Letzterer Verband ist besonders da von Nutzen, wo der Dachbalken keinen Fussboden zu tragen hat und aus zwei Stücken besteht, die nach Art des §. 891 durch Verkämmung mit einander verbunden sind. Die Hauptbestimmung des Dachbalkens ist vielmehr, das Ausweichen der Hauptstreben und den Umsturz der Mauern zu verhüten; denn das Gesammtgewicht des Daches, das durch die Pfetten auf die Hauptstreben übergetragen wird, erzeugt einen Druck in der Längenrichtung dieser geneigten Holzstücke; dieser Druck wird am Fusse der Streben in eine vertikale und eine horizontale Kraft zersetzt, von denen letztere durch ihre unaufhörliche Wirkung auf jede einzelne Mauer in Bälde das Gleichgewicht derselben zerstören würde, da eine solche Mauer nur vertikalem Drucke zu widerstehen bestimmt ist. Sind aber die Streben in den Hauptbalken eingezapft, so heben sich in letzterem die gleichen, aber entgegengesetzten horizontalen Ziehkräfte auf, und die Mauer hat also keinen Seitendruck zu erleiden.

Aus einem ähnlichen Grunde lässt man die Füsse aller Sparren in die Dachschwelle ein, welche fest verbunden sein muss mit den Hauptbalken der beiden benachbarten Dachstühle. Denn wenn jeder einzelne Sparren auf die Mauer selbst aufstiesse, so würde durch die Wirkungen der theilweisen Last dieses Sparrens

und der zitternden Bewegung, in welche er durch den Stoss der Winde versetzt werden kann, die Mauer an dieser Stelle bald aus ihrer vertikalen Richtung verrückt werden. Manchmal krümmt die Dachschwelle sich trotz ihrer Verbindung mit den Hauptbalken, und man bemerkt eine Verrückung der Mauer gegen die Mitte des zwischen beiden Dachstühlen befindlichen Zwischenraumes, wenn letztere zu weit von einander entfernt sind und die Last des Daches bedeutend ist. Desswegen sollten auch zwei auf einander folgende Dachstühle nie um mehr als 4 Meter von einander entfernt werden; oder man muss die Kraft der Schwellen, besonders der Breite nach, vermehren, wenn die Disposition der Localitäten es erfordert, zwei benachbarte Dachstühle in grösserer Entfernung von einander zu setzen, z. B. wenn man dem Zusammentreffen mit einem Schornsteine, mit einer Fenster- oder Thüröffnung ausweichen will; denn nie darf ein Hauptbalken über dergleichen Oeffnungen lagern.

§. 903.

Andere Arten von Dachstühlen. In Fig. 14, wo das Dach höher ist, wurde ein Kehlbalken e angebracht, dessen Hauptbestimmung es ist, sich den beiden Dachstreben a, a ungefähr in der Mitte ihrer Länge entgegen zu spreizen, damit sie sich unter der Last der Pfetten nicht biegen. Dieser Kehlbalken trägt die Dachsäule, welche mittelst Zapfen und Keil c mit ersterem verbunden ist. Durch diese Anordnung bleibt der Raum zwischen dem Haupt- und dem Kehlbalken frei und kann zu Dachzimmern benützt werden. Die Fussbüge f sind hier nicht vertikal, sondern schief gerichtet, um den Hauptstreben desto wirksamer sich entgegen zu spreizen, wodurch aber freilich der Wandel im Innern des Daches etwas gehindert werden könnte. Man kann auch noch, um den Kehlbalken zu unterstützen, und die Festigkeit seiner Verbindung mit den Hauptstreben zu sichern, zwei weitere Büge g anbringen; die übrigen Theile dieses Daches sind denen auf Fig. 13 ähnlich, nur dass die Firstpfette mit der Dachsäule durch Verzapfung verbunden ist, weil es sich hier von einem nicht am Walme anliegenden Dachstuhle handelt. Taf. 68.

§. 904.

In Fig. 15 lagert der Kehlbalken auf zwei Stuhlsäulen (*jambes de force*), welche weniger Neigung haben, als die Hauptstreben oder Sparren, und also den Bewohnern der Dachzimmer mehr Raum gegen die Vordermauern hin gestatten. Diese Säulen sind durch Versatzung und Zapfen mit dem Haupt- und dem Kehlbalken verbunden, und da das hiedurch gebildete Vieleck mehr als drei Seiten hat, so sind Achselbüge nöthig, um die Festigkeit des Verbandes zu sichern. Die Pfetten auf der rechten Seite der Figur werden, wie bei den vorigen Dachstühlen, einfach durch angenagelte Tragklötze a, a festgehalten; links aber sind die Klötze b, b in die Hauptstreben eingezapft, was sicherer ist und daher bei Dächern von Wichtigkeit angewendet wird; übrigens hat dieses Verfahren wieder den Nachtheil, dass es die Hauptstreben durch eine grosse Zahl von Zapfenlöchern schwächt.

Ueber dem Kehlbalken ist die Pfette d, rechts, durch ein einfaches Sattelholz e unterstützt, das nach der Neigung des Daches geschnitten und auf den Kehlbalken angenagelt ist; man kann aber auch, wie links zu sehen ist, die Pfette in den Kehlbalken einzapfen. Diess ist zwar weniger einfach, gewährt aber den Vortheil, die auf einander folgenden Dachstühle mit einander zu verbinden und sie in gehöriger Entfernung von einander zu erhalten.

Um die Fussschwelle mit den Dachstühlen zu verbinden, was nach §. 902 unerlässlich ist, hat man einen Stichbalken (*blochet*) angewendet, dessen Kopf die Dachschwelle überragt und durch Ueberschnitt mit ihr verbunden ist; das Ende des Stichbalkens hat nur noch ein Drittheil seiner Dicke, und ist in

Form eines Schwalbenschwanzes in die Säule eingelassen und durch einen Keil befestigt. Manchmal wird auch der Kopf des Stichbalkens horizontal schwalbenschwanzförmig ausgeschnitten und in die halbe Dicke der Schwelle eingefügt. Diese Verbindungen alle aber erfordern viel Zeit und Arbeit, und haben den Nachtheil, dass sie die Stuhlsäule schwächen, welche ein sehr wichtiger Theil des ganzen Verbandes ist. Desshalb bestehen die neueren Zimmerleute nicht mehr auf der strengen Regel, nur Holz bei ihren Verbindungen anzuwenden, und ersetzen oft den Stichbalken durch einen eisernen Klammerhaken m (siehe die linke Seite der Figur); dieser umfasst die Stuhlsäule, und seine beiden platten Aeste werden auf der Schwelle festgenagelt. Die übrigen Theile dieses Dachstuhles sind denen der vorigen ähnlich.

§. 905.

Gebrochene oder Mansardendächer.

Taf. 68. Fig. 16. Diese Dächer dienen dazu, die Wohnungen unter dem Dache bequemer zu machen, ohne dasselbe über die mittlere Grösse hinaus erhöhen zu müssen. Der Dachstuhl des eigentlichen Daches besteht aus einem Hauptbalken t, einem Kehlbalken e und zwei fast vertikal gestellten Stuhlsäulen j, j. Auf dem Kehlbalken e ruhen eine sehr kurze Dachsäule p und zwei sehr geneigte Hauptstreben a, a, welche zusammen den Stuhl eines zweiten sehr niedern und daher unbewohnbaren Daches bilden. Die Sparren, welche in Fig. 15 von der Firstpfette an bis zur Dachschwelle herab reichten, sind hier in der Höhe des Kehlbalkens nach den Richtungen c und c′, die mit j und a parallel sind, gebrochen; um aber die Sparren c und c′ und die übrigen ihnen analogen, welche zwischen zwei benachbarten Dachstühlen angebracht sind, zu unterstützen, wird in die beiden Kehlbalken dieser Dachstühle ein horizontales Stück x, die Bruchpfette (*panne de brisis*), eingezapft, welches den oberen Sparren c′ als Schwelle dient. Die unteren Sparren c werden in die Schwelle y eingelassen, welche an die Stuhlsäulen durch eiserne Bänder befestigt ist. Durch Aufschieblinge wird das Regenwasser bis an die Traufe des Daches geleitet, wenn es nicht in einer über dem Karnies angebrachten bleiernen Rinne aufgefangen werden soll.

Diese gebrochenen Dächer wurden von dem Baumeister F. Mansard (gest. 1666) erfunden, oder wenigstens wieder in Gebrauch gebracht durch die Erbauung des hübschen Schlosses *de Maisons* bei *Saint-Germain-en-Laye;* denn Bullet behauptet in seinem Werke über Architektur, Mansard habe bei jenem Gebäude die Dächer des Schlosses *Chilly* nachgeahmt, welches von Mélézean um 1628 erbaut worden; und Krafft macht in seinem *Recueil de charpente* darauf aufmerksam, dass man derartige Dächer in dem Theile des *Louvre* findet, der unter Heinrich II. von Peter Lescot (gest. 1570) erbaut worden ist. Wie dem auch sei, man hat den Wohnungen unter diesen Dächern den Namen Mansarden gegeben, und man muss wenigstens zugeben, dass man dadurch bedeutend an Raum gewann, ohne die Mauern erhöhen zu dürfen; auch passten die Mansardendächer gut zur Form der Gebäude aus jener Epoche, und liessen die weniger bedeutenden von den Hauptwohnungen unterscheiden.

Um das Profil eines gebrochenen Daches zu zeichnen, hat man viele Methoden vorgeschlagen, von denen folgende die vorzüglichsten sind:

Erste Methode (Fig. 17). Bullet will, man solle den Halbkreis, den man über der Entfernung A B der Sparrenfüsse beschrieben, in vier gleiche Theile theilen, alsdann werde durch die vier, in die Theilbögen eingeschriebenen Sehnen die Richtung der Stuhlsäulen und Dachstreben bestimmt.

Zweite Methode (Fig. 16). Belidor hat in der *Science des ingénieurs* ein Verfahren angegeben, das gewöhnlich vorgezogen wird. Man theilt den Halbkreis A Z B in fünf gleiche Theile, und bildet aus den unteren Sehnen A D und B E die Mansarde; das Dach über dieser wird in das übrig bleibende Segment D Z E

eingeschrieben. Den Hauptbalken setzt man etwas tiefer als den Durchmesser A B, um die Höhe der Mansarde zu vergrössern, welche sonst kleiner als bei Bullet's Verfahren ausfallen würde.

Dritte Methode (Fig. 18). Diese besteht nicht auf der Einschreibung des Dachstuhles in einen Halbkreis, was in mehreren Fällen unbequem sein könnte. Man bestimme die Höhe B H des eigentlichen Daches nach Willkühr, zeichne das Rechteck A B H G, schneide von seiner obern Grundlinie ein Stück H E gleich $1/3$ der Höhe B H ab, und ziehe die Gerade B E, deren Hang gleich 3 sein wird. Hierauf errichte man die Vertikale $CZ = 1/2\, CE$, so ist Z E die Richtung des obern Dachhanges, der gleich $1/2$ ist.

Viertes Kapitel.

Ein Dach mit geradem Walme.

§. 906.

Die auf den vorigen Tafeln dargestellten Dachstühle waren Profilzeichnungen, in welche nur zwei Dimensionen aufgenommen werden konnten; jetzt handelt es sich darum, ein Dach vollständig darzustellen, in allen Projectionen, welche zur Bearbeitung der einzelnen Theile und zur Verbindung derselben nothwendig sind. Die Fig. 12 zeigt im Grundrisse die Form dieses Daches, welches aus zwei Dachflächen (*longs-pans*) und zwei dreieckigen Walmen (*croupes*) besteht. Da nun in der Nähe des Walmes die meisten Holzstücke und die verwickeltesten Verbindungen vorkommen, so muss man also diesem Theile des Daches die meiste Aufmerksamkeit schenken. Taf. 69.

Um die Figur zu vereinfachen, wurden die Hauptstreben und mithin auch die Pfetten weggelassen, so dass also die Sparren sich von der Dachschwelle bis zur Firstpfette an einem Stücke forterstrecken müssen. In der Anwendung hätte eine solche Anordnung ihre grossen Nachtheile; denn man müsste alsdann zu den Sparren Hölzer von grosser Länge und Dicke anwenden, was grosse Bau- und Unterhaltungskosten veranlassen würde, weil die Sparren, indem sie in unmittelbarer Berührung mit der Bedeckung stehen, schneller faulen, als die übrigen Holzstücke des Daches. Auch würde, wenn künftig einmal die Einsetzung eines neuen Sparrens nöthig würde, durch die Wegnahme eines solchen Holzstückes das Gleichgewicht des ganzen Daches gefährdet werden, weil die Dachsäulen hier durch keine Streben mehr in ihrer vertikalen Lage erhalten würden. Wenn es sich aber nun um die Zeichnung der Figur handelt, so unterscheiden die Sparren und Dachstreben sich nur durch ein mehr oder minder grosses Geviertes und durch einige unbedeutende Verschiedenheiten, von denen später (§. 947) die Rede sein wird; alle Einzelnheiten also, die Schnitte und Projectionen, welche hier für die Sparren angewendet werden, lassen sich auch auf die Hauptstreben anwenden, welche hier weggelassen wurden, um die Figur nicht mit homologen Linien zu überladen.

§. 907.

Man zeichne auf eine, senkrecht auf die Längenmauern angenommene Vertikalebene das Profil dieser Mauern nach ihrer Entfernung, welche, sowohl für die inneren als für die äusseren Wände, gegeben sein Taf. 69.
Fig. 2.

muss. Hierauf bemerke man auf demselben die Einschnitte, in welche der Hauptbalken gelegt werden muss, wobei man die obere Fläche A′ O′ B′ dieses Holzstückes etwas höher nimmt, als die obere Fläche des Karnieses, und zwar um so viel, als die Dicke der Schwelle betragen soll; denn das Obertheil dieser letztern muss mit dem des Hauptbalkens in einerlei Ebene zu liegen kommen, und darf, auch in horizontaler Richtung, nicht über den Hauptbalken hinausgehen. *) Die Tracht dieser Schwelle auf dem Balken ist durch ein an seinem Rande schraffirtes Rechteck angedeutet, während das kleine, ganz ausschraffirte Rechteck die Art der Verbindung des Sparrens mit der Schwelle andeutet, von der weiter unten die Rede sein wird.

Nun setze man die Fusspunkte A′ und B′ der Sparren 5 oder 6 Centimeter einwärts vom äussern Rande der Schwelle, errichte auf der Mitte von A′ B′ eine Vertikale O′ Z′ so hoch, dass ihr Verhältniss zu der halben Breite O′ A′ dem gegebenen Dachhange (§. 900) gleich sei, und zeichne das gleichschenklige Dreieck A′ Z′ B′; ferner zeichne man in einer auf letzterem Dreiecke normalen Entfernung, welche durch die Stärke der Sparren gegeben ist, ein zweites gleichschenkliges Dreieck a′ z′ b′; alsdann sind die Seiten dieser Dreiecke, wie A′ Z′ und a′ z′, die vertikalen Grundschnitte der oberen und unteren Sparrenebenen, zwischen welchen alle Sparren der Dachfläche enthalten sind. Diese Ebenen schneiden die Horizontalebene der Schwellen, deren Projectionsaxe A′ B′ ist, in zwei Geraden (A′, E A), (a′, e a), welche man die äussere und die innere Sparrenlinie nennen kann. Wenn aber der Hauptbalken sich über die Schwelle erhebt (s. die vorige Anmerkung), so hat ersterer eine andere äussere und innere Sparrenlinie, als die Schwelle. Der Durchschnitt der oberen Sparrenebenen ist eine Horizontallinie (Z′, O′ O), welche man die Firstlinie (*ligne de couronnement*) nennt. **)

§. 908.

Nun zeichne man auf der Horizontalebene das Rechteck A′ A B B′ so, dass die Seiten A B und A A′ gleich weit von den äusseren Wänden der Längen- und Breitenmauer entfernt seien; haben daher diese Mauern dieselbe Dicke, wie es gewöhnlich der Fall ist, so muss der Punkt A, in welchem sich die äussere Sparrenlinie des Walmes und der Dachfläche schneidet, auf der Diagonale der Mauern liegen. Ferner bezeichne man auf der Projection O′ O der Firstlinie die Lage O, welche der Scheitel des Körperwinkels erhalten soll, der von den drei oberen Sparrenebenen des Walmes und der Dachflächen gebildet wird; da nun der Walm einen steilern Hang haben soll, als die Dachflächen (§. 913), so muss man immer die Distanz O D kleiner als O E nehmen. Gewöhnlich nimmt man O D = $^2/_3$ O E, oder = $^3/_4$ O E; jedenfalls aber muss diese Distanz O D so gewählt werden, dass der Dachstuhl über E O F keinem Schornsteine begegne, und nicht über eine Thür- oder Fensteröffnung zu liegen komme.

Ist einmal die Projection O des vorhin bezeichneten körperlichen Winkels auf der Horizontalebene

*) Manchmal jedoch wird die Schwelle etwas tiefer als das Obertheil des Hauptbalkens gesetzt, besonders wenn man beide Holzstücke durch einen Zapfen verbinden will; alsdann aber muss man den Rand des Hauptbalkens abschiften, um die Linie der Aufschieblinge nicht zu brechen, welche auf der obern Kante der Schwelle aufliegen.

**) Die Breite A′ B′, die Höhe O′ Z′ und die Distanz O D, von der eben die Rede war, sind hier auf die Hälfte der Grösse reducirt, welche sie haben sollten, um mit der Stärke der verschiedenen Holzstücke, welche auf der Figur vorkommen, in gehörigem Verhältnisse zu stehen; oder was dasselbe ist, man hat das Dach durch eine Horizentalebene geschnitten, welche dem First näher ist, als die Horizontalebene der Schwellen; hiedurch wird in der Form der Verbindungen nichts geändert, und der Vortheil gewonnen, alle Einzelnheiten des Verbandes in Eine Figur zu bringen. Man könnte diese Reduction auch so erklären, indem man sagte, für die Längen sei ein kleinerer Massstab angewendet worden, als für die Dicken. Gewöhnlich reduciren auch die Zimmerleute bei ihren Detailrissen die Längen auf die Hälfte oder ein Viertel, während sie auf den Skizzen, wo sie nur die Axen der Holzstücke angeben, alle Dimensionen in ihrem wahren Grössenverhältnisse beibehalten.

bestimmt, so ziehe man die Geraden O A und O B als die Projectionen der Walmengrate. Bis zu der Linie O A nun muss die innere Sparrenlinie a' a verlängert werden, worauf ihre rechtwinklige Wiederkehr a b und auf diese b b' folgt. Eben so müssen die äusseren Ränder der Schwellen $\alpha' \alpha$, $\alpha \beta$ und $\beta \beta'$ sich zu zweien in den Kanten O A und O B schneiden, und so auch die inneren. Dieses Gesetz der Symmetrie wird sorgfältig von den Zimmerleuten eingehalten, und es folgt daraus, dass die Walmsparren weniger Dicke erhalten, als die Dachflächensparren, was auch ganz mit dem steilern Hange der Walmfläche übereinstimmt. Denn zerlegt man die vertikale Last eines Sparrens in zwei Kräfte, die eine in der Richtung der Länge, die andere senkrecht auf ihr, so wird letztere um so kleiner ausfallen, je grösser der Neigungswinkel ω gegen den Horizont ist; der normale Druck auf den Walm ist also geringer, als der auf die Dachflächen, und desshalb darf auch die Dicke der Walmsparren geringer genommen werden.

§. 909.

Nun muss die Projection der Dachsäule bestimmt werden, deren Grundfläche gewöhnlich ein seiner Grösse nach gegebenes Quadrat ist. Eine der Seiten dieses Quadrats muss, parallel mit A B, in den Winkel A O B eingeschrieben werden, damit zwei vertikale Kanten der Säule in die Vertikalebenen O A und O B zu liegen kommen, in welchen die Walmkanten enthalten sind; eine Bedingung, die nicht nur aus Gründen der Symmetrie, sondern auch um der Stabilität des Daches willen erfüllt werden muss. Man trage daher die Hälfte des Gevierten der Säule auf die Gerade E O F, von O nach c und von O nach i, und ziehe durch diese Punkte Parallelen mit O D, welche von O B und O A in den Punkten 2 und Q geschnitten werden; alsdann vollende man das Quadrat 2 — 3 — 4 — Q, so ist dieses die Grundfläche der Säule. Auf diese Art aber kommt der Mittelpunkt der Figur nicht in O zu liegen, und die Säule ist also aus ihrer eigentlichen Stellung verrückt.

Was den Hauptbalken betrifft, so muss er, da er die Säule tragen soll, ebenfalls verrückt werden, d. h. seine Breite muss durch die Gerade E O F in demselben Verhältnisse getheilt werden, wie die Seitenfläche 2 — 3 der Säule. Man trage zu diesem Zwecke das halbe Gevierte des Balkens von O nach C; hierauf ziehe man durch C eine Parallele mit O D, welche die beiden Diagonalen O — 2 und O — 3 der Säule in den Punkten 5 und 6 schneidet, worauf man nur noch durch letztere Punkte Parallelen mit E O F ziehen darf; denn nun hat man

$$C5 : C6 = c2 : c3, \text{ und } (5-6) = 2 \text{ mal } OC.$$

Endlich muss auch noch der Sparren des Dachstuhles, dessen Geviertes durch die Aufgabe bestimmt ist, auf ähnliche Art verrückt werden; da aber die hiezu erforderlichen Operationen den vorigen ganz analog sind, so wurden sie auf der Figur nicht angegeben. Man bemerke nur, dass die Linie E O F des Balkens oder Sparrens, obgleich sie ihre Breite nicht in zwei gleiche Theile theilt, die Mittellinie genannt wird; ferner dass der Sparren durch Versatzung und Zapfen mit der Säule verbunden ist (Fig. 1), und auf dieselbe Art sein Fuss mit dem Hauptbalken, so dass diese Verbindung den ganzen Raum zwischen der äussern und innern Sparrenlinie einnimmt. Was die übrigen Sparren anbetrifft, die keinem Dachstuhle angehören, so sind sie ohne Zapfen in die Schwelle versatzt.

Um den Walm zu construiren, muss man längs O D einen halben Stuhl aufrichten, der aus folgenden Theilen besteht: 1) aus einem Stichbalken, der mit dem Hauptbalken durch einen verstärkten Zapfen verbunden wird, dessen Zapfenloch auf Fig. 1 angegeben ist; 2) aus einem Sparren, der mit der Säule und dem Stichbalken durch Versatzung und Zapfen verbunden ist. Hier ist aber kein Grund vorhanden, diese beiden Holzstücke zu verrücken; ihre Gevierten, welche dieselben sind, wie bei der Dachfläche, müssen daher durch die Gerade O D genau in 2 gleiche Theile getheilt werden.

§. 910.

Fig. 2. In der Ecke A, welche von den Mauern der Dachfläche und des Walmes gebildet wird, muss ein **Gratstichbalken** (*coyer*) angebracht werden, um den Fuss des **Gratsparrens** (*chevron arrêtier*) aufzunehmen, welcher die Richtung des auf O A projicirten Dachgrates erhält. Dieser Grat muss nach einem später zu rechtfertigenden Gesetze verrückt werden, daher denn auch die Verrückung des Gratstichbalkens nach demselben Gesetze in folgender Weise geschehen muss. Man errichte auf O A die Senkrechte A — 7 = dem Gevierten des Gratstichbalkens, und ziehe die Gerade 7—8 parallel mit dem Walme bis zu ihrem Durchschnitte mit der äussern Sparrenlinie der Dachfläche; hierauf ziehe man parallel mit A — 7 die Gerade 8 — 9 zwischen beiden äusseren Sparrenlinien; durch diese Gerade werden die Punkte 8 und 9 bestimmt, durch welche die mit O A parallelen Kanten des Gratstichbalkens gehen müssen. Hierauf muss dieses rechtwinkelige Holzstück abgestumpft und begrenzt werden durch die vertikalen Seitenflächen $\alpha\lambda$ und $\alpha\gamma$, welche den Schwellen der Dachfläche und des Walmes entsprechen; hiebei müssen nothwendig die beiden Ecken λ und γ, so wie die Punkte 8 und 9, in eine nach O A senkrechte Gerade fallen.

Der auf $\lambda\alpha\gamma\ldots$ projicirte Kopf des Gratstichbalkens wird mit einem Theile seiner Dicke in die Mauer eingelassen, und erhebt sich über dieselbe bis zum Niveau der Hauptbalken; das andere Ende wird manchmal an der Dachsäule in eben diese Balken eingefügt; besser aber ist es, wie hier, einen Querbalken oder **Wechsel** anzubringen, in welchen der Gratstichbalken mittelst eines verstärkten Zapfens eingelassen wird. Diesen Wechsel legt man beinahe parallel mit der Diagonale, welche die Punkte D und E verbindet, und befestigt ihn durch Ueberschnitt an beiden Hauptbalken; sollte dieses durch Einzapfung geschehen, so würde man bei der Einfügung auf grosse Schwierigkeiten stossen, weil die beiden Balken bereits sich schon an ihrer gehörigen Stelle befinden und fest verbunden sind. Man nennt das System der Holzstücke, welche die Säule umgeben, wie Hauptbalken, Wechsel, Gratstichbalken, den **Werksatz** oder Aufzug des Gespärres (*enrayure*).

§. 911.

Taf. 69. Fig. 2. Der **Gratsparren** hat anfänglich die Gestalt eines rechtwinkeligen Parallelepipeds, dessen Seitenkanten parallel sind mit dem auf O A projicirten Dachgrate, und von welchem zwei Seitenflächen in Vertikalebenen liegen; es wird also die Sohle dieses Holzstückes, d. h. sein Durchschnitt mit der Horizontalebene der Hauptbalken ein Rechteck H K n m (Fig. 15) sein, von welchem 2 Seiten senkrecht auf O A sein müssen. Da ferner, nach einer gleich nachher zu begründenden Regel, die Seite H K, d. h. der horizontale Grundschnitt der *innern Seitenfläche* des Gratsparrens zwischen den beiden inneren Sparrenlinien a d und a e enthalten sein soll, so errichte man auf O A (Fig. 2) eine Senkrechte A ω gleich der Stärke, welche der Grat erhalten soll; hierauf ziehe man die Gerade ω L parallel mit dem Walme, und L G parallel mit A ω, so erhält man zwei Punkte L und G, durch welche man jetzt nur noch die Geraden G M und L T parallel mit O A ziehen darf; denn es ist leicht zu beweisen, dass diese Geraden die inneren Sparrenlinien in zwei Punkten H und K schneiden, deren Verbindungslinie H K parallel und gleich L G ist. Somit ist also der Gratsparren verrückt, insofern die Gerade O A seine Breite nicht in zwei gleiche Theile theilt.

Da nun ferner der eigentliche Grat zwei Aussenflächen darbieten soll, welche mit dem obern Lattenwerke der Dachfläche und des Walmes in einerlei Ebene liegen, so muss der rechtwinkelige Sparren dachgerecht **abgegratet**, d. h. seiner ganzen Länge nach durch die beiden Ebenen geschnitten werden, deren horizontale Grundschnitte die äusseren Sparrenlinien E A und A D sind. Dadurch werden von dem Rechtecke

m H K n (Fig. 15) zwei Dreiecke A G m und A L n abgeschnitten, und das abgeschrägte Holzstück hat nun die Form eines schiefstehenden Prisma, dessen Grundfläche das Fünfeck A G H K L ist. *)

§. 912.

Die Gründe, warum der Gratsparren so verrückt wird, dass der Grundschnitt H K genau zwischen e a und a d falle, sind folgende: 1) die innere Fläche des Grates legt sich auf diese Art genau an die beiden inneren Ebenen an, durch welche die Sparren des Walmes und der Dachfläche begrenzt werden, und es stellt alsdann jene Fläche eine Art abgestutzter Ecke dar. Diese Symmetrie ist besonders in dem Falle wünschenswerth, wenn das Dach im Innern sichtbar ist. 2) Es wird Holz erspart; denn gibt man dem Grundschnitte H K eine andere Lage H′ K′ (Fig. 15), welche jedoch immer senkrecht auf O A und innerhalb des Winkels d a e enthalten sein müsste, so wird das Rechteck m′ H′ K′ n′ länger als m H K n, und erfordert also ein Holzstück von grösserem Inhalte. 3) Es wird auch bei der Abschrägung Holz erspart. Da nämlich die weggenommenen Holztheile Prismen von gleicher Länge sind, so sind ihre cubischen Inhalte den Grundflächen A G m und A G′ m′, oder A L m und A L′ n′ proportionirt. Es ist aber Fig. 15.

$$AGm + ALn < AG'm' + AL'n'.$$

Denn nimmt man von diesen beiden Summen das Gemeinschaftliche weg, so bleibt auf der einen Seite das Trapez L L′ n′ n, und auf der andern das Trapez G G′ m′ m; da diese aber gleiche Höhen n n′ und m m′ haben, so ist offenbar das erste kleiner, als das zweite.

§. 913.

Dass die Zimmerleute dem Walme gewöhnlich einen steilern Hang geben, als der Dachfläche, geschieht aus folgenden Gründen: 1) würde ohne diese Massregel der Gratsparren eine sehr bedeutende Länge erhalten, so dass man auch sein Geviertes vergrössern müsste, was also kostspieliger wäre; 2) durch den steilern Hang des Walmes wird die horizontale Composante des von den Sparren und Gratsparren auf die Stichbalken, Schwellen und Gratstichbalken des Walmes ausgeübten Druckes vermindert. Diess aber ist ein wesentlicher Vortheil; denn da die letztgenannten horizontalen Holzstücke nur durch Verzapfung mit dem Hauptdachstuhle verbunden sind, so könnte durch den Druck, den sie zu erleiden haben, die Walmmauer leicht aus ihrer vertikalen Richtung gerückt werden.

§. 914.

Der Fuss des Gratsparrens ist durch Versatzung und Zapfen mit dem Gratstichbalken verbunden. Der

*) Um den Gratsparren schneller in seine verrückte Lage zu bringen, und der Errichtung einer Senkrechten auf A O enthoben zu sein, wenden die Zimmerleute oft folgendes Mittel an: Mit der einen Hand führt der Arbeiter ein Winkeleisen T (Fig. 13) über A O hin, und mit der andern hält er an den zweiten Schenkel des Winkeleisens ein Lineal R R′, auf welchem er das gegebene Gevierte G L angemerkt hat; indem er nun dieses Lineal mit dem Winkeleisen zugleich sich fortbewegen lässt, sorgt er dafür, dass die beiden Punkte G und L zu gleicher Zeit in den Linien A D und A E eintreffen. Dieses Verfahren erfordert aber immer einige Geschicklichkeit; das folgende, welches Obrist E m y in seinem *Traité de Charpenterie* angegeben, erheischt kein anderes Instrument, als den Zirkel:

Mit einem Halbmesser A C (Fig. 14), gleich dem halben Gevierten des Grates, beschreibe man einen Kreis, der die äusseren Sparrenlinien A D und A E in den Punkten l und g schneide; hierauf trage man durch Kreisbögen den Punkt l in L, g in G, und ziehe G L. Diese Gerade ist so lang als g l wegen der beiden congruenten, rechtwinkeligen Dreiecke A G L und A g l; ferner ist in dem Dreiecke A G y der Winkel G = g = g A C; und da letzterer das Complement von G A y ist, so hat man

$$yGA + GAy \doteq 90^0;$$

der Winkel y ist also ein Rechter, und mithin G y L senkrecht auf A y O.

Kopf aber trifft, ehe er die Säule erreicht, auf die beiden Sparren des Dachstuhles, daher denn diese drei Stücke an einander **angeschiftet** werden müssen mittelst der Vertikalebenen M P und T R, welche in der Axe der Säule sich schneiden. Ferner muss der Kopf des Gratsparrens nach den beiden Vertikalflächen P Q und Q R ausgeschnitten werden, so dass eine Art Klaue entsteht, mit welcher er die Hängsäule fasst. Dieses Mittel, nebst seiner eigenen und der fremden Last, die er zu tragen hat, reicht hin, ihn fest in seiner Lage zu erhalten. Manche Zimmerleute fügen dem Kopfe des Gratsparrens noch eine Versatzung bei, wodurch aber seine Verbindung mit der Hängesäule nur erschwert wird. Andere verlängern, um den spitzigen Winkel M P Q zu vermeiden, die vertikale Seitenfläche G H M des Gratsparrens um einige Centimeter, in's Innere des Dachstuhlsparrens hinein, und geben alsdann der vertikalen Anschmiegung M P eine auf die Säule senkrechte Richtung.

§. 915.

Fig. 2. Zwischen dem Dachstuhlsparren O D und dem Gratsparren O A werden mehrere **Schiftsparren** oder **Schifter** (*empanons*) angebracht, welche mit dem Gratsparren durch Verzapfung und mit der Dachschwelle durch eine einfache Versatzung verbunden werden. Diese Schwelle ist an ihrem einen Ende mit dem Gratstichbalken durch einen Zapfen und mit dem Stichbalken durch Ueberschnitt verbunden; denn wollte man ihre beiden Enden mit einem Zapfen versehen, so wäre es unmöglich, sie in ihre gehörige Lage zu bringen, nachdem der Stichbalken und der Gratstichbalken schon ihre feste Stellung erlangt haben. Häufig werden diese Zapfen durch eiserne Bänder ersetzt, welche sich am Gratstichbalken und der Schwelle leichter anbringen lassen. Alle diese Details sind am besten auf dem Theile B D des Walmes nachzusehen, wo alle über die Horizontalebene der Dachschwellen sich erhebenden Theile weggenommen sind, und wo desshalb die Sohlen der Sparren, als sichtbar, mit voller Schraffirung angegeben wurden.

Die Sparren der leeren Gespärre (welche keine Stuhlsäule haben), wie x und y, werden in die Dachschwellen versatzt, und liegen oben auf der Firstpfette auf. Zwei zu Einem Gespärre gehörige Sparren aber sind oben durch Einscheerung verbunden; der Sparren y trägt hier den Zapfen, und der Sparren x die Scheere. Was die Firstpfette betrifft, so ist sie ein horizontal liegendes Holzstück, dessen Profil das in Fig. 1 angedeutete Sechseck f ist, und von welchem zwei Seiten mit den unteren Sparrenebenen zusammenfallen. Diese Pfette ist durch einen auf jeder Seite verstärkten Zapfen mit der Säule verbunden.

Nach dieser Auseinandersetzung aller zu einem geraden Walme gehörigen Stücke folgt nun die Entwickelung der verschiedenen zu ihrer Behauung nöthigen Projectionen.

§. 916.

Taf. 69. Fig. 3. **Profil des Walmes.** Hierunter versteht man den Durchschnitt des Walmes durch eine auf der Sparrenfusslinie A B senkrechte Vertikalebene O D (Fig. 2). Um die beiden rechtwinkligen Dreiecke $D'' O'' Z''$, $d'' O'' z''$ zu construiren, nehme man ihre Grundlinien gleich den Linien O D und O d der Fig. 2; ihre Höhen ergeben sich aus dem Profil der Dachfläche (Fig. 1). Eben so erhält man das Profil der Dachsäule und des Stichbalkens, indem man die Breiten dieser Stücke aus Fig. 2 und ihre Höhen aus Fig. 1 nimmt. Auf diese Profile nun zeichnen die Werkmeister die Versatzungen und Zapfen der verschiedenen Stücke. Man sieht (Fig. 3), dass der Zapfen des Stichbalkens oberhalb mit einer Verstärkung versehen ist; auf eben diesem Balken sind auch die Einschnitte zur Aufnahme der Dachschwelle und des Wechsels angemerkt. Da endlich zwischen den beiden Geraden $D'' Z''$ und $d'' z''$ die Seitenprojectionen der Sparren und Schifter des Walmes enthalten sind, so nehme man die Länge $D'' M^2$ gleich der Distanz zwischen M (Fig. 2) und der

äussern Sparrenlinie A D, und errichte die Vertikale $M^2 m'' M''$, so erhält man die Schiftfläche oder Anschmiegung des Sparrens, nämlich $m'' M'' V'' v''$. Man könnte auf ähnliche Art den Kopfumriss des Schiftsparrens finden, und hieraus die Projectionen der Sparren und Schifter auf der obern Sparrenfläche ableiten, mittelst der in Fig. 4 dargestellten Aufklappung; davon wird aber im Folgenden die Rede sein.

§. 917.

Projection der Walm- und Dachsparren auf der obern Sparrenebene (*la herse*). Soll ein Zimmerstück genau bestimmt sein, so muss man zwei Projectionen desselben kennen, welche auf Ebenen bezogen sind, die parallel sind mit seinen Längenseiten. Die Profile (Fig. 1 und 3) stellen bereits eine dieser Projectionen dar; um nun auch die andere zu erhalten, projicire man alle Sparren und Schifter, sowohl die des Walmes, als auch die der beiden Dachflächen, auf die oberen Sparren- oder Lattenebenen (*plans de lattis superieurs*), und entwickle hierauf die körperliche Ecke, welche von den drei um den Punkt O herumliegenden Ebenen gebildet wird (Fig. 2), wie man solches in den Fig. 5 und 6 dargestellt sieht.

Man construire zuerst das rechtwinklige Dreieck Z D A, indem man seine Grundlinie gleich der Distanz D A (Fig. 2) und seine Höhe gleich D'' Z'' (Fig. 3) nimmt; auf diese Art erhält man die Hälfte der Walmfläche. Um die Dachfläche zu erhalten, construire man ein rechtwinkliges Dreieck Z A E mit einer Grundlinie gleich A E (Fig. 2) und einer Höhe gleich Z' A' (Fig. 1); alsdann stellt die mit A E parallele Gerade Z W die Firstlinie, als Grenze der rechts liegenden Dachfläche, dar; was die links liegende Dachfläche betrifft, so erhält man für sie ähnliche Resultate, welche aber des beschränkten Raumes wegen weggelassen werden mussten. Fig. 5.

Nun müssen alle auf der untern Sparrenebene liegenden Punkte auf die obere projicirt werden. Um die Projection der innern Sparrenlinie des Walmes zu erhalten, projicire man den Punkt d'' in d''_2 auf Fig. 3, trage hierauf die Distanz $D'' d''_2$ in $D d_2$ (Fig. 5) und ziehe die Gerade $d_2 H$, welche die gesuchte Projection der innern Sparrenlinie auf der äussern Sparrenfläche sein wird. Hierauf lege man durch den Punkt H (Fig. 2) eine Ebene H h senkrecht auf die äussere Sparrenlinie, trage die Distanzen A G und A h auf Fig. 5, und errichte die Senkrechte h H, so sind die mit Z A parallel gezogenen Geraden G M und H m die Projectionen der mittlern und untern Kante des Gratsparrens. Eben so verfährt man in Beziehung auf Fig. 6, indem man sich des Profils auf Fig. 1 bedient, auf welchem man die Distanz $A' a_2$ nimmt, und sie von E nach e_2 trägt (Fig. 6), um die Projection der innern Sparrenlinie $K e_2$ auf der äussern Sparrenebene zu erhalten.

Nachdem man ferner auf Fig. 5 zwei Parallelen mit Z D gezogen hat, welche von letzterer um die halbe Sparrenstärke entfernt sind, ziehe man die Horizontalen S P, M N, m n in Distanzen von dem Punkte Z, welche den Abschnitten Z'' V'', Z'' M'', $Z'' m_2$ (Fig. 3) gleich sind; hierauf verbinde man Z mit den Punkten M und N, in welchen die Horizontale M N die beiden Seitenkanten des Sparrens schneidet, so werden dadurch die oberen Seiten M P und N S der Anschmiegungsflächen bestimmt. Man bemerke hier, dass die Punkte M und m auf den von G und H ausgehenden Kanten des Gratsparrens liegen müssen. Zieht man ferner durch m die Gerade m p, gleich und parallel mit M P, so erhält man ein Parallelogramm M P p m, dem man noch ein Dreieck P p u anfügen muss, um die rechts liegende Anschmiegung zu ergänzen; denn die schneidende Ebene, durch welche die Anschmiegungsfläche hergestellt wurde, verlängert sich bis in das Versatzungsprisma des Sparrens hinein. Um aber dieses Dreieck zu erhalten, projicire man (Fig. 2) den Endpunkt der Versatzung auf die Gerade V P, trage die Distanz dieser Projection von dem Punkte V auf Fig. 5 von V nach u, und ziehe u p, so begrenzt diese die Projection der Anschmiegung auf der äussern Sparrenfläche. Man bemerke auch, dass die Distanzen V P und V S auf Fig. 5 und 2 dieselben sind, was sich, so wie manches Andere, aus dem Gesagten von selbst ergibt.

§. 918.

Was den Schiftsparren des Walmes betrifft, so nehme man die Distanz seiner Mittellinie von D, trage sie auf Fig. 5 und links und rechts die halbe Sparrenstärke; zieht man nun mit D Z zwei Parallelen, so schneiden sie die Kanten H m und G M des Gratsparrens in Punkten, welche zusammen den Umriss 11 — 12 — 13 — 14 der Projection des Kopfes liefern; denn da der Schifter zwischen der obern und untern Sparrenebene enthalten ist, so legt er sich mit seinem Kopfe an den Gratsparren nach dessen ganzer, zwischen der untern und mittlern Kante enthaltenen Breite an.

Der Zapfen wird auf Fig. 2 durch eine Vertikalebene 12 — 17 begrenzt, welche senkrecht auf der Seitenfläche des Schifters ist; diese Ebene schneidet daher die beiden Wangen des Zapfens, welche mit den Sparrenebenen parallel sind, in zwei mit A D parallelen Kanten, welche ihre Grösse beibehalten, ob sie sich auf die Horizontalebene oder auf die obere Sparrenebene projiciren. Man theile daher (Fig. 5) den Abschnitt 11—12 in drei gleiche Theile, und ziehe die Kanten 15 — 18, 16 — 17 parallel mit der äussern Sparrenlinie und gleich der Länge 12 — 17 (Fig. 2). Wie die Projection des Zapfens vollendet wird, zeigt alsdann die Figur.

Manchmal begrenzt man den Zapfen auf Fig. 2 durch eine Vertikalebene 12 — 25, welche auf der Eintrittsebene des Zapfenloches senkrecht ist; eine Regel, welche für horizontale Verbindungen allgemein vorgeschrieben wird. Hier aber würde ein so gestalteter Zapfen erfordern, dass man den Gratsparren aufhebe, um den Schiftsparren in denselben einzufügen, was sehr unbequem wäre. Die Richtung 12 — 17 vermindert allerdings die Stärke des Zapfens; aber die Last, welche die Schiftsparren zu tragen haben, ist nicht gross, und überdiess wird ihre Verbindung mit dem Gratsparren noch durch einige Nägel verstärkt.

§. 919.

Man hätte die Projectionen der Fig. 5 und 6 auf eine schnellere Art ausführen können, wenn man aus den Profilen Fig. 3 und Fig. 1 die Figuren 4, 9, 10 und 11 hergeleitet hätte, welche die nämlichen Resultate zeigen, wie Fig. 5 und 6. In Fig. 3 nämlich ist die obere Sparrenebene des Walmes auf die Gerade Z″ D″ projicirt; denkt man sich nun eben jene Ebene um D″ Z″ gedreht und links aufgeklappt, so darf man nur durch alle die Punkte V″, M″, m″, D″, d″... Senkrechte auf D″ Z″ ziehen, um alle die Geraden zu erhalten, welche man auf ziemlich langwierigem Wege für Fig. 5 abtragen musste. Um den Schiftsparren zu erhalten, muss man zuerst die Distanzen D″ — 21, D″ — 22 (Fig. 3) gleich den Linien 10 — 12, 20 — 13 der Fig. 2 nehmen, und hierauf in den Punkten 21 und 22 Vertikalen errichten, wodurch die Projection 11 — 12 — 13 — 14 des Schiftsparren-Kopfes auf dem Profil der Fig. 3 bestimmt wird, aus welcher sofort die Projection auf Fig. 4 hergeleitet wird, wie die Figur es zeigt.

Dieses Verfahren lässt sich aber nicht auf einen schrägen Walm anwenden, und desshalb musste die allgemeine Methode des §. 917 vorangeschickt werden.

§. 920.

Taf. 69. Fig. 7. Projectionen des Gratsparrens. Man nehme, parallel mit O A, eine Vertikalebene, deren Projectionsaxe O″ A″ in beliebiger Entfernung gezogen werden kann, hier aber durch den auf der obern Fläche des Hauptbalkens liegenden Punkt O″ angenommen wurde, um anzudeuten, dass eben dieser und der Gratstichbalken dasselbe Niveau haben. Hierauf errichte man die Vertikale O″ Z″ gleich der O′ Z′ auf Fig. 1, und ziehe die Gerade A″ Z″, welche die obere Kante des Gratsparrens sein wird: die beiden mittleren Kanten

sind auf G′ M′, und die beiden unteren auf H′ Y′ projicirt. Nun ist es leicht, aus dem Durchschnitte dieser Geraden mit den aus den Punkten M, P, Q, R, T errichteten Vertikalen die beiden Anschmiegungen M′ M″ P″ P′, T′ T″ R″ R′, so wie die Klauenflächen P′ Q′ Q″ P″, R′ Q′ Q″ R″ zu bestimmen. Die letzteren müssen durch dieselbe Horizontale Q′ R′ P′ begrenzt werden, weil auf eben diese Gerade die beiden Seiten P Q und Q R, welche selbst horizontal sind, sich projiciren.

Um das Zapfenloch zu bezeichnen, welches den Zapfen des Schiftsparrens Fig. 2 aufnehmen soll, ziehe man Parallelen mit G′ M′, welche die Distanz der Kanten G′ M′ und H′ Y′ in drei gleiche Theile theilen. Die Ebene aber, mit welcher der Schiftsparren an den Gratsparren sich anschmiegt (die Backenschmiege), nimmt die ganze Breite der Seitenfläche G′ M′ H′ Y′ in Anspruch, weil die Gerade (G′ M′, G M) in der obern, und die Gerade (H′ Y′, H M) in der untern Sparrenebene sich befindet.

Auf dem Profil der Fig. 7 bezeichnet der Zimmermann den Vorsprung, welchen er der Versatzung und dem Zapfen geben will, wodurch der Gratsparren mit dem Gratstichbalken verbunden werden soll. Auf eben dieser Figur wurde die Projection des Gratstichbalkens angegeben, um die beiden Anschmiegungen $\alpha\gamma$ und $\alpha\lambda$, ferner das Zapfenloch, durch welches die Dachschwelle mit dem Gratstichbalken verbunden wird, und endlich den Zapfen mit schiefer Verstärkung, welcher den Gratstichbalken mit dem Wechsel verbindet, sichtbar zu machen.

§. 921.

Nun projicire man den Gratsparren auf eine mit seiner obern Seitenfläche parallelen Ebene; oder vielmehr, — da die Zimmerleute die Anschmiegungen und die Klaue vor der Abgratung des Sparrens ausführen, so lange er also noch die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds hat, — man suche die Durchschnitte der vier vertikalen Seitenflächen M P, P Q, Q R, R T mit der obern Fläche jenes Parallelepipeds: diese Fläche ist auf Fig. 7 in A″ Z″ projicirt, und ihre Aufklappung in Fig. 8 erhält man, wenn man links und rechts von der Mittellinie A_2 z′ Distanzen aufträgt, welche den beiden Abschnitten gleich sind, in welche die Balkenstärke H K (*Fig.* 2) durch A O getheilt wird. Fig. 8.

Man verlängere nun die Vertikalen M″ M′, P″ P′, R″ R′, T″ T′ bis zu den Punkten m, p, r, t, wo sie die auf A″ Z″ projicirte obere Seitenfläche treffen; hierauf beziehe man diese Punkte, wie Q′, auf Fig. 8, mittelst gerader, auf A″ Z″ senkrechter Linien, so erhält man leicht den Umriss m′ p′ q′ r′ t′, in welchem die obere Seitenfläche des Parallelepipeds von den vier Anschmiegungs- und Ueberklauungsflächen geschnitten wird.

Bezieht man eben so die Punkte M″, P″, Q″, R″, T″ auf m″, p″, q″, r″, t″, so erhält man den Umriss m″ p″ q″ r″ t″, welcher darstellt, wie die durch eben jene Anschmiegungs- und Klauenflächen mit der untern Seitenfläche des Parallelepipeds gemachten Schnitte auf der obern Seitenfläche sich projiciren. Die beiden Seiten m″ p″ und t″ r″ müssen in dem Punkte y′ zusammenlaufen, welcher die Projection ist von dem Punkte Y′, in welchem die untere Seitenfläche von der Axe der Säule geschnitten wird; eben so liefen die Seiten m′ p′, r′ t′ in dem analogen Punkte z′ zusammen. Die beiden polygonalen Linien m′ p′ q′ r′ t′, m″ p″ q″ r″ t″ haben beziehungsweise parallele Seiten.

Um die Grenzen des Zapfens und der Versatzung am Fusse des Gratsparrens auf Fig. 8 zu tragen, ziehe man durch die verschiedenen Punkte H′, G′, A″ Senkrechte auf A″ Z″. Die Zimmerleute führen aber diese Projection Fig. 8 nicht besonders aus, sondern sie zeichnen alle Linien, von denen eben die Rede war, auf das Holzstück selbst, nachdem es gehörig gelegt ist, wie die folgenden Paragraphen lehren werden.

§. 922.

Die Zimmerleute, deren Hauptinstrument das Bleiloth ist, machen ihre Zeichnungen auf eine horizontale Fläche; gewöhnlich auf den Boden selbst, nachdem er gehörig zugerichtet worden. Diese Zeichnungen geben entweder nur die Mittellinien oder Axenprojectionen der Holzstücke an; oder sie zeigen auch die Stärke der Hölzer, ihre Grenzflächen, die verschiedenen Verbindungsmittel, wie Zapfen, Zapfenlöcher, Versatzungen u. s. w.

Um eine etwas lange Gerade auf den Boden oder auf ein Holzstück zu zeichnen, bedienen sich die Zimmerleute einer mit Kreide oder Russ gefärbten Schnur. Zwei Arbeiter halten dieselbe wohlgespannt in gerader, durch zwei Punkte bestimmter Linie; einer von ihnen fasst sie in der Mitte und zieht sie etwas in die Höhe, wobei aber die Schnur stets in der durch ihre anfängliche Lage bestimmten Vertikalebene bleiben muss; lässt er sie nun abschnellen, so entsteht dadurch auf dem Boden der verlangte Strich. Man nennt dieses Verfahren Abschnüren (*battre la ligne*); es wird auch angewendet, um auf den vier einander zu zweien entgegengesetzten Seitenflächen eines Holzstückes die Projectionen seiner Axe sichtbar zu machen (Taf. 71. Fig. 5). Hiezu aber sind ausser dem Bleiloth und der Wasserwage noch verschiedene Handgriffe erforderlich, welche der Leser am Besten durch eigene Anschauung auf einem Zimmerplatze kennen lernt. Hier nur so viel: die Holzstücke werden auf Unterlagen, d. h. auf rechtwinklige Holzklötze, gelegt, und sowohl in der Richtung ihrer Länge, als auch der Breite, in eine horizontale Lage gebracht. Um die horizontale Lage in der Richtung der Breite zu erhalten, wird die Wasserwage in transversaler Richtung aufgestellt und durch Schindeln, die man zwischen die Unterlagen und das Holzstück legt, so lange nachgeholfen, bis die Libelle einspielt. Da man aber häufig genöthigt ist, das Holzstück eine Viertelsumdrehung machen zu lassen, und hierauf es wieder in seine ursprüngliche Lage zurückzubringen, so bezeichnet man die Stelle, auf welcher die Wasserwage gestanden, durch einen auf der Mittellinie senkrechten Strich p q; denn stellt man die Wasserwage an irgend einem andern Orte der Länge auf, so würde sie nicht mehr dieselbe Horizontalebene anzeigen, wenn die obere Fläche etwas windschief wäre, was nicht selten der Fall ist. Ist ferner diese Fläche nur grob behauen, so macht man an der Stelle, wo die Wasserwage aufgelegt wird, einen Federriss (*plumée*), d. h. man nimmt mit dem Meissel oder Hobel einige Späne weg, um das Holzstück an dieser Stelle in seiner ganzen Breite und auf eine Länge von 3—4 Centimetern zu ebnen. Auf die Mitte dieser Ebene wird alsdann mit irgend einer Spitze der Strich eingerissen.

§. 923.

Taf. 71. Fig. 5. Ein Holzstück auf die Linie legen (*mettre sur ligne*), heisst: dasselbe so auf die Unterlagen bringen, dass die beiden Mittellinien a b seiner obern und untern Seitenfläche sich genau auf die analoge Linie c d des Grundrisses projiciren; das Holzstück muss also vor Allem seiner Breite nach genau horizontal gelegt sein. Alle Holzstücke nun, welche zusammen eine Zimmerwand (*pan de charpente*) *) ausmachen, müssen auf die Linie gelegt werden, indem man sie mit ihren Enden über einander legt, so dass sie sich kreuzen, und durch gehörig angebrachte Unterlagen im Niveau erhalten werden. Da aber ein und dasselbe Holzstück zwei verschiedenen Wänden angehören kann, so muss man es parallel mit seiner Länge zu versetzen wissen, wesshalb man senkrecht auf diese Länge eine Gerade m n zieht, deren Projection auch auf dem Grundrisse

*) Unter einer Zimmerwand versteht man hier jeden Verband von Holz- oder Zimmerstücken, deren Axen alle in einer und derselben Ebene liegen.

angegeben werden muss. Sind nun alle Holzstücke einer Zimmerwand auf die Linie gelegt, nach der Länge und Breite in's Niveau gebracht u. s. w., so wird zur Abstechung geschritten. Auch diese Operation lernt der Leser am Besten auf dem Zimmerplatze kennen; um ihm jedoch vorläufig eine Vorstellung davon zu geben, möge hier die Behauung des Gratsparrens eines geraden Walmes als Beispiel dienen.

§. 924.

Nachdem man auf die vier Seitenflächen des rechtwinkligen Holzstückes die Projectionen seiner Axe abgeschnürt, wird dasselbe auf die Seite gelegt (so dass die obere und untere Seitenfläche vertikal werden), ferner über die Linie gesetzt mit Beziehung auf Fig. 7, und, auf Unterlagen von 8 bis 10 Centimetern Höhe, nach der Breite und Länge in's Niveau gebracht. Setzt man nun ein Bleiloth so auf, dass sein Mittelpunkt genau dem Punkte Q' der Figur entspricht, so wird der Faden sich an die obere (gegenwärtig vertikale) Seitenfläche des Holzstückes anlegen, und durch seinen Durchschnitt mit der Mittellinie dieser Fläche den in der Aufklappung Fig. 8 durch q' bezeichneten Punkt bestimmen. Diesen Punkt bemerkt sich der Zimmermann durch einen Stich mit der Spitze seines Zirkels. Bringt man auf ähnliche Art das Bleiloth über Z'', m, t, so erhält man die Punkte z', m', t', welche, ebenfalls abgestochen, die beiden Geraden m' z', t' z' auf dem Holzstücke bestimmen. Was die Punkte p' und r' betrifft, welche weder auf die Mittellinien, noch auf die Kanten des Zimmerstückes fallen, so bringt man das Bleiloth nach einander über p und r, und sticht in jeder dieser Lagen zwei Fadenpunkte ab; nun kann man zwei Vertikalen ziehen, welche der Geraden pp', rr' der Figur entsprechen, und welche durch ihren Durchschnitt mit den bereits gezogenen Geraden m' z', t' z' die gesuchten Punkte p' und r' liefern. Verbindet man diese mit q', so erhält man den vollständigen Umriss m' p' q' r' t' auf der obern Seitenfläche des Holzstückes. Man hätte übrigens die Geraden q' p' und q' r' auch unmittelbar erhalten können, mittelst der Punkte, in welchen sie die Seitenkanten des Holzstückes schneiden. Taf. 69. Fig. 7.

Durch ähnliches Verfahren, indem man das Bleiloth nach einander über die Punkte Y', P'', R'', Q'', M'', T'' setzt, erhält man den Umriss m'' p'' q'' r'' der Fig. 8 auf der untern Seitenfläche des Holzstückes. Der Zimmermann braucht aber diese Fig. 8 nicht zu zeichnen, weil er alle Operationen, welche sich auf dieselbe beziehen, auf dem Holzstücke selbst ausführt.

Legt man nun (mittelst der Säge) eine schneidende Ebene durch die Geraden m' p', m'' p'' und wieder eine durch t' r', t'' r'', so kommen die beiden Anschmiegungsflächen zu Tage; die Klauenflächen erhält man durch schneidende Ebenen, welche man durch p' q', p'' q'' und q' r', q'' r'' legt. Auf ähnliche Art erhält man den Zapfen und die Versatzung am Fusse des Gratsparrens. Nun bleibt noch übrig, dieses Holzstück abzugraten. Man lege daher durch die Mittellinie A_2 z' auf der obern Seitenfläche des Parallelepipeds und durch die Gerade G' M' auf der Nebenseitenfläche desselben eine schneidende Ebene, sei es mit der Säge, oder mit dem Zimmerbeile, und vollende die Arbeit mit dem Hobel. Eben so wird mit der andern Seitenfläche der Abgratung verfahren. Durch diese beiden schneidenden Ebenen aber erhalten auch die bereits hergestellten Anschmiegungs- und Klauenflächen ihre eigentliche Gestalt.

Fünftes Kapitel.

Schräger Walm.

§. 925.

Taf. 70. Fig. 1 u. 2. Die äusseren Sparrenlinien der Dachfläche und des Walmes müssen (§. 908) stets gleichweit von der äussern Wand der Gebäudemauer entfernt sein; ist also der Grundriss des Gebäudes nicht rechtwinklig, so wird die äussere Sparrenlinie des Walmes mit denen der Dachflächen unter schiefen Winkeln zusammentreffen, wodurch ein sogenannter schiefer oder schräger Walm entsteht. Dadurch aber erleidet die Form der Holzstücke einige Abänderungen, von denen hier nur die wichtigsten angeführt werden sollen, weil die anderen sich von selbst verstehen. Um die Figur zu vereinfachen und Wiederholungen zu vermeiden, werden hier alle horizontalen Holzstücke, als: der Balken, der Gratstichbalken, die Dachschwellen u. s. w. weggelassen, und es wird vorausgesetzt, alle übrigen, nicht horizontalen Stücke ruhen mit ihren unteren Enden auf einer gemeinschaftlichen Horizontalebene, welche aber dem First um ein Viertheil ihrer wahren Distanz näher gebracht ist (§. 907 Anmerk.). Es seien also A′ A B B′ die äusseren Sparrenlinien, und A′ Z′ B′ sei das Profil der Dachfläche. Man bestimme auf die gehörige Weise (§. 908) die Lage O des Körperwinkels, den der Walm mit den Dachflächen bildet, ziehe die Kante O A und O B, und die inneren Sparrenlinien a′ a, a b, b b′, welche sich zu zweien auf jenen Kanten schneiden müssen. Die Säule wird verrückt, wie in §. 909; aber die beiden Seiten 3 — 2 und 4 — Q ihrer Grundfläche schneiden die Kanten O A und O B in den Punkten Q und 2, durch welche eine mit A B parallele Gerade 2 Q bestimmt wird; die Grundfläche der Säule nimmt also die Form eines Trapezes 2 — 3 — 4 — Q an.

Die Dachstuhlsparren müssen in Beziehung auf die Mittellinien E O F verrückt werden; da aber die Herstellung des Gleichgewichtes es erfordert, dass ihre Nebenseitenflächen in dieselben Vertikalebenen zu liegen kommen, damit der horizontale Druck des einen Sparrens auf die Säule dem des andern direct entgegengesetzt sei, so darf man nicht den einen im Verhältnisse der beiden Abschnitte von 4 — Q, und den andern im Verhältnisse der beiden Abschnitte von 2 — 3 verrücken, sondern man muss ein gemeinschaftliches, der Mittellinie des Trapezes entsprechendes Verhältniss annehmen. Um diese Construction besser ausführen zu können, verlege man das Trapez in Fig. 6, verlängere die Seite Q — 2 bis zum Punkte l und ziehe l m; hierauf nehme man m p gleich der Stärke, welche man dem Sparren geben will, und vollende das Parallelogramm m p q r. Nun ist klar, dass die Seite q r durch E O F in demselben Verhältnisse getheilt wird, wie die Mittellinie m n des Trapezes, und man muss daher durch die Punkte q und r Parallelen mit E O F ziehen, um die Lage der beiden verrückten Sparren zu erhalten.

§. 926.

Auf dem Walme (Fig. 2) wird der Sparren nicht verrückt, und seine Nebenseitenflächen liegen in zwei Vertikalebenen, welche gleichweit entfernt sind von der Mittellinie O D; diese ist parallel mit den Sparrenlinien der Dachflächen. Da aber jene Ebenen hier die äussere und innere Sparrenlinie des Walmen so schneiden, dass sie ein Parallelogramm U V v u mit denselben bilden, welches verschieden sein muss von dem Rechtecke $V V_2 u u_2$, in welchem die Horizontalebene die vier Seitenflächen des Zimmerstückes schneiden

würde, so müssen also die obere und untere Seitenfläche dieses letztern durch zwei neue, in der Richtung U V und u v, ersetzt werden, damit sie mit den beiden Sparrenebenen zusammenfallen. Es müssen also von dem Sparren, seiner ganzen Länge nach, zwei den Dreiecken U V V_2 und u v u_2 entsprechende Prismen weggenommen werden.

Der Gratsparren, welcher O A entspricht, muss ganz auf dieselbe Weise verrückt werden, wie es bei dem geraden Walme (§. 911) geschah. Auch seine Anschmiegung an den Dachstuhl- und an den Walmsparren muss auf dieselbe Art geschehen, wie dort. Da ferner die beiden Projectionen der Fig. 7 und 8 ganz auf dieselbe Art ausgeführt werden, wie in den §§. 920 und 921, so braucht es keiner weitern Erklärung, weder in Beziehung auf diesen Gratsparren, noch auf den, welcher der Kante O B entspricht.

Die Schiftsparren können auf zwei Arten angebracht werden: der auf der rechten Seite steht so, dass seine beiden Nebenseitenflächen in Vertikalebenen fallen, welche der Mittellinie O D des Walmsparrens parallel sind; so aber kann seine obere und untere Seitenfläche nicht mit den beiden Sparrenebenen des Walmes zusammenfallen und beide müssen daher abgeschrägt werden, so dass der Sparren zur Sohle das Parallelogramm $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ erhält, das zwischen der äussern und innern Sparrenlinie des Walmes enthalten ist.

Da aber diese Anordnung vielen Abfall und Zeitverlust verursacht, und Holzstücke von grösserer Stärke erfordert, so hat man diesen Nachtheilen dadurch abzuhelfen gesucht, dass man die Schiftsparren schief stellt. Man lässt nämlich dem Holzstücke seine rechtwinklig parallelepipedische Form, und legt seine obere Seitenfläche auf die Sparrenebene des Walmes an, und zwar so, dass seine Kanten parallel mit der auf O D projicirten Mittellinie gehen. Auf diese Art kommen seine Nebenseitenflächen senkrecht auf die Sparrenebene zu stehen, und sind daher nicht vertikal, wesshalb der Schiftsparren schief gestellt *(deversé)* heisst. In diesem Falle kann man die Horizontalprojection des Schiftsparrens nicht mehr unmittelbar zeichnen, weil man die Richtung, welche die Seiten $\alpha\,\delta$ und $\beta\,\gamma$ der Sohle annehmen, nicht kennt. Man muss desshalb zu der Projection auf die obere Sparrenfläche seine Zuflucht nehmen, wovon später (§. 931).

§. 927.

Bemerkungen. Man könnte auch beim schrägen Walme die geraden Schiftsparren beibehalten, ohne sie abzuschrägen oder schief stellen zu müssen, wenn man gleich Anfangs die Mittellinie O H des Walmsparrens senkrecht auf die äussere Sparrenlinie A B richtete, wodurch alle Holzstücke so gegen einander zu liegen kämen, wie beim geraden Walme. Hiedurch aber entstände der grosse Nachtheil, dass dem von dem Walmsparren auf die Säule ausgeübten Drucke nicht mehr direct durch die Firstpfette O K entgegengestrebt würde, so dass das Dach wenig Stabilität hätte. Fig. 3.

Bei einer bedeutenden Schräge würde die Ecke B sehr nahe an die Mittellinie E O F des Dachstuhles kommen, wenn diese senkrecht auf der Dachfläche bliebe, und es wäre alsdann schwer, einen Gratstichbalken und Dachbalken zugleich auf dieser Seite anzubringen. Desshalb richtet man in solchem Falle den Dachstuhl schief, und macht ihn parallel mit der Sparrenlinie des Walmes (Fig. 4); die Schiftsparren werden alsdann entweder abgeschrägt, wie e_2, e_2, oder schief gestellt, wie e_3, e_3. Die Fig. 4 gibt ferner noch an, wie in diesem Falle die schiefen Sparren sich an die des Hauptdaches anschliessen, mittelst der geraden Schifter e oder ε. Fig. 4.

§. 928.

Profil des Walmes. Man schneide den Walm durch eine auf der äussern Sparrenlinie senkrechte Vertikalebene O Y. Versetzt man hierauf diese, parallel mit sich selbst, in O'' Y'', so darf man nur die Taf. 70. Fig. 5.

Vertikale O'' Z'' gleich der Höhe O' Z' (Fig. 1) errichten, und die Gerade Y'' Z'' ziehen. Man sieht auf diesem Profil auch den Grundschnitt y'' z'' der untern Sparrenebene und den Schnitt in die vordere Seitenfläche der Säule bemerkt. Ferner müssen auf demselben auch die Vorsprünge der Versatzungen und Zapfen am Fusse und Kopfe des Walmsparrens angegeben werden.

§. 929.

Fig. 9. Projection auf die obere Sparrenebene. Mit einer Grundlinie A' B' gleich A B (Fig. 2), und einer Höhe Y' Z' gleich Y'' Z'' (Fig. 5) construire man das Dreieck Z' A' B'; hierauf projicire man auf Fig. 5 den Punkt y'' der innern Sparrenlinie in y_2 auf der obern Sparrenebene, trage die Distanz Y'' y_2 auf Y' y' (Fig. 9), und ziehe durch y' eine Parallele mit A' B', so erhält man die Projection der innern Sparrenebene auf der obern Sparrenfläche. Auf diese beiden Parallelen projicire man ferner die Punkte U, V, u, v in U', V', u', v', so erhält man das Parallelogramm, welches die Sparrensohle bildet; die Kanten des Sparrens aber müssen parallel gezogen werden mit der Geraden Z' D', welche hier die Mittellinie des Sparrens darstellt. Um den Kopf dieses Holzstückes zu begrenzen, nehme man auf Fig. 5 die Distanzen Z'' X'' und Z'' x_2, trage sie auf die Gerade Z' Y' der Fig. 9, und ziehe Parallelen mit A' B'. Um ferner die Kanten G' M' N', H' m' n' des Gratsparrens zu erhalten, welche die des Sparrens schneiden, projicire man die Punkte G und H in G' und H', und ziehe durch letztere Parallelen mit Z' A'. Diese Wechselbeziehungen sammt der Bedingung, dass die Punkte M und M', P und P', ... zu zweien auf Geraden liegen müssen, die senkrecht auf A' B' sind, reichen mehr als hin, die Projection des Sparrenkopfes auf Fig. 9 zu zeichnen.

§. 930.

Um die Projection des abgeschrägten Schiftsparrens zu erhalten, verfährt man auf eine ähnliche Art: man projicirt die vier Ecken α, β, γ, δ, die hier unmittelbar bekannt sind, auf die äussere und innere Sparrenlinie (Fig. 9), und zieht durch die Punkte α', β', γ', δ' Parallelen mit der Mittellinie Z' D' des vorigen Sparrens. Diese Kanten werden durch die Geraden G' M', H' m' begrenzt; dadurch aber entsteht ein Parallelogramm, das man in 3 oder 5 gleiche Theile theilen muss, von denen der mittlere die Basis des Zapfens darstellen wird. Was die Normalfläche μ 5 dieses Zapfens (Fig. 2) betrifft, so wird sie durch eine auf dem Gratsparren senkrechte Vertikalebene gebildet, deren horizontaler Grundschnitt die äussere Sparrenlinie im Punkte V trifft (der hier fast mit dem Eckpunkte V des Sparrens zusammenfällt); projicirt man daher V in V' auf Fig. 9, so ist die Gerade V' μ' der Durchschnitt jener Normalebene mit der obern Sparrenfläche, und die Kanten des Zapfens müssen parallel mit V' μ' gezogen werden, weil die beiden Wangen des Zapfens mit dieser Sparrenebene selbst parallel sind. Die Horizontale μ 6 (Fig. 2) gibt die Breite an, welche man dem Zapfen auf Fig. 9 geben muss.

Die übrigen Einzelnheiten, wie z. B. die Projectionen der Versatzungen u. s. w., sind leicht zu verstehen, nach dem, was über den geraden Walm gesagt worden; auch erkennt man leicht das Verfahren, durch welches die beiden Seitentheile der Fig. 9 gefunden wurden, welche die Sparrenebenen der Dachfläche darstellen. Fig. 10 endlich stellt die Projectionen des Sparrens und des abgeschrägten Schifters dar, auf einer mit den Nebenseitenflächen parallelen Ebene. Die Ausführung dieser Projectionen erklärt sich von selbst, besonders wenn man bemerkt, dass die Höhen O'' Z'', O'' X_2, O'' w'', O'' z'' den gleichnamigen Linien auf dem Profil (Fig. 5) gleich genommen werden müssen.

§. 931.

Die Darstellung des schief gestellten Schiftsparrens (§. 926), dessen Nebenseitenflächen senkrecht auf der Sparrenebene des Walmes sind, geschieht nun auf folgende Art. Man ziehe die Mittellinie $\varepsilon' \omega'$ (Fig. 9) in gehöriger Entfernung und parallel mit der Mittellinie Z' D' des Sparrens, und trage die halbe Stärke des Schifters rechts und links von $\varepsilon' \omega'$ und senkrecht auf letztere. Hieraus ziehe man durch die Endpunkte α' und β' zwei Parallelen $\alpha' \mu'$ und $\beta' \nu'$; zwischen diesen ist die Projection des Schifters auf Fig. 9 enthalten, auch bestimmen sie seine Sohle $\alpha' \beta' \gamma' \delta'$. Nun projicire man die vier Ecken dieses Parallelogramms in α, β, γ, δ auf Fig. 2, und ziehe durch letztere Punkte Parallelen mit O D, so erhält man die vier Nebenseitenflächen des Schifters in der horizontalen Projection. Fig. 2 u. 9.

Was den Zapfen betrifft, so sind auf der linken Seite seine Kanten mit denen des Holzstückes parallel; rechts aber begrenzt man ihn, zur Vermeidung des spitzigen Winkels im Zapfenloche, durch eine auf der vertikalen Seitenfläche des Gratsparrens senkrechte Ebene, welche zugleich durch die Gerade $\mu \lambda \varphi$ geht, d. h. durch den Durchschnitt des Gratsparrens mit der schief stehenden Seitenfläche des Schifters. Mithin ist der horizontale Grundschnitt dieser Normalebene die auf dem Gratsparren senkrechte Gerade $\varphi \varrho$; und verbindet man den Punkt ϱ der äussern Sparrenlinie mit dem Endpunkte μ der Kante $\alpha \mu$, so ist die Gerade $\mu \varrho$ der Durchschnitt dieser Normalebene mit der obern Sparrenfläche, welcher die beiden Wangen des Zapfens parallel sind. Die Kanten des Zapfens müssen also parallel mit $\mu \varrho$ und durch die Punkte gezogen werden, welche den Abschnitt $\mu \lambda$ in 3 gleiche Theile theilen.

Der Kopf des Schiftsparrens auf Fig. 9 ist das Parallelogramm $\lambda' \mu' \nu' \pi'$, dessen Breite man in drei gleiche Theile theilen muss, um die Zapfenbasis zu erhalten; und trägt man hierauf den Punkt ϱ der Horizontalebene in ϱ', so bezeichnet die Gerade $\varrho' \mu'$ die Richtung, mit welcher die Kanten des Zapfens parallel genommen werden müssen. Da endlich die Breite des Zapfens, welche auf einer mit der äussern Sparrenlinie parallelen Geraden gemessen wird, der auf der Horizontalebene gleich sein muss, so ist es leicht, die Projection desselben auf Fig. 9 zu vollenden.

Directe Auflösung der Aufgabe vom schief gestellten Schiftsparren.

§. 932.

Diese Aufgabe ist interessant wegen der verschiedenen Projectionen und Aufklappungen, welche ihre Auflösung erfordert, auch war sie ehemals bei den Zimmerleuten berühmt, und musste bei der Gesellenprüfung gelöst werden können. Desshalb wird sie hier nochmals vorgenommen, und nichts als gegeben vorausgesetzt, was nicht absolut nothwendig zur Auflösung ist; auch wird auf die allgemeine Projection, wie sie in §. 931 vorgenommen worden, verzichtet. — Es seien A B und A B' die äusseren Sparrenlinien des Walmes und der Dachfläche; a b und a b' seien die beiden inneren Sparrenlinien; O sei die Horizontalprojection der Dachecke; so ist A O die vorspringende Kante des Gratsparrens. Nimmt man nun die Balkenstärke B B' senkrecht auf O A (§. 911), so stellt das Fünfeck B A B' b' b die Sohle des Holzstückes dar. Man construire hierauf das Profil des Walmes (Fig. 2), d. h. den Schnitt der auf der Sparrenlinie senkrechten Vertikalebene O D mit der obern und untern Sparrenebene. Endlich nehme man an gehöriger Stelle E F als Horizontalprojection der Mittellinie des Schifters an, welche parallel mit der äussern Sparrenlinie A B' der Dachfläche sein muss, und eben so auch die Mittellinie O E_2 des Walmsparrens, welche jedoch hier nicht nothwendig ist. Taf. 71. Fig. 1.

Da die obere und untere Seitenfläche des Schifters, der die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds

hat, mit den Sparrenebenen zusammenfallen müssen, da ferner die Kanten desselben, welche mit E F parallel sind, nicht senkrecht auf A B E stehen, so müssen nothwendig seine Nebenseitenflächen, statt vertikal zu sein, eine schiefe Richtung erhalten. Daraus aber folgt, dass die Horizontalprojection des Schiftsparrens nicht unmittelbar gezeichnet werden kann; während er, wenn man ihn zuerst auf die obere Sparrenebene projicirt zwischen zwei Geraden enthalten sein wird, welche unmittelbar gezogen werden können.

§. 933.

Um nun diese Projection auf der obern Sparrenebene auszuführen, klappe man letztere zuerst in die Horizontalebene auf. Alsdann wird irgend ein Punkt von E F, z. B. der, welcher in G auf die innere Sparrenlinie, und in G′ auf das Profil projicirt ist, in den Punkt g zu liegen kommen, so dass also E g die Mittellinie des aufgeklappten Schiftsparrens ist; und zieht man nun mit dieser zwei Parallelen 2 H, 3 K, welche um die halbe Sparrenstärke von ihr entfernt sind, so bilden diese Parallelen die beiden Seitengrenzen des auf die obere Sparrenfläche projicirten Schifters. Projicirt man ferner den Punkt d′ der innern Sparrenlinie in den Punkt d″ der obern Sparrenfläche, und klappt ihn in d_2 auf, so erhält man die Gerade d_2 d_3 als Projection der innern Sparrenlinie auf der obern Sparrenfläche; mithin ist das Parallelogramm H K l m die Sohle des Schiftsparrens.

§. 934.

Nun ist es leicht, diese Resultate auf die Horizontalebene zu beziehen. Den Punkten m, l entsprechen die Punkte M, L auf der innern Sparrenlinie a d, und man findet H K L M als die horizontale Sohle des Schifters; und zieht man nun durch die vier Ecken dieses Parallelogramms Parallelen mit E F, so erhält man die Projectionen der Kanten des Holzstückes, die man bis zur vertikalen Seitenfläche B C des Gratsparrens verlängern muss. — Construirt man ferner die vertikale Projection dieses Gratsparrens, indem man das Dreieck A′ I′ Z″ bildet, dessen Höhe I′ Z″ gleich O′ Z′ ist, so darf man nur auf die Geraden b′ c′, B′ C′ die vier Punkte P, N, U, V projiciren, um die Berührungsfläche N′ P′ U′ V′ des Gratsparrens mit dem Schifter (die Backenschmiege) zu finden; und theilt man die Breite dieses Parallelogramms in fünf gleiche Theile, so bezeichnet der mittlere Theil den Eintritt in das Zapfenloch.

Was den Zapfen des Schifters betrifft, so wird er links durch die Verlängerung der schief gestellten Seite begrenzt, so dass also zwei Kanten desselben mit denen des Holzstückes parallel sind. Rechts aber begrenzt man ihn, um den spitzigen Winkel zu vermeiden, durch eine auf der vertikalen Fläche B C normale Ebene, welche durch die Gerade (N P, N′ P′) geht, deren horizontaler Grundschnitt offenbar Y ist. Diese Normalebene hat also zu Grundschnitten die Geraden Y Y′ und Y′ P′ N′, und schneidet die Wangen des Zapfens in zwei Kanten, die parallel sind dem Schnitte jener Ebene mit der obern Sparrenfläche. Nun schneidet die Ebene die beiden Geraden (B C, B′ C′) und (A O, A′ Z″), die in der Sparrenfläche liegen, in den Punkten (N′, N) und (Q′, Q): mithin ist die Gerade N Q der gesuchte Schnitt, mit welchem die Zapfenkanten parallel gezogen werden müssen, nachdem man den Abschnitt N P in fünf gleiche Theile getheilt hat.

§. 935.

Da diese Projection mit einer der Seitenflächen des Holzstückes parallel ist, so dient sie zur Ausführung der praktischen Operationen, und eben desshalb muss auch der Umriss des Schiftsparrenkopfes auf sie bezogen werden. Dieser ist nichts Anderes, als der Durchschnitt des Schifters mit der vertikalen Seitenfläche B C des Gratsparrens, auf welchen jener Umriss bereits gezeichnet worden. Um aber eine Verwirrung in den Linien

zu vermeiden, und weil alle parallelen Schnitte eines Prisma identisch sind, so schneide man das Holzstück durch eine andere mit B C parallele Ebene, welche durch den horizontal in G projicirten und in g aufgeklappten Punkt der Mittellinie gehe. Diese schneidende Vertikalebene hat zum horizontalen Grundschnitte die mit B C parallele Gerade G R: sie schneidet in R die äussere Sparrenlinie, welche in der obern Seitenfläche des Schifters liegt, und mithin schneidet sie diese Fläche in einer Geraden, deren Aufklappung R g ist. Die nämliche schneidende Ebene schneidet die untere Seitenfläche des Schifters in einer mit R g parallelen Geraden, welche durch den Punkt G gehen muss, da in letzterem jene Ebene die innere Sparrenlinie schneidet, welche der untern Seitenfläche angehört. Aber der Punkt (G, d′) projicirt sich auf die obere Sparrenfläche in den Punkt d″ (Fig. 2), und seine Aufklappung ist also g′; mithin erhält man den gesuchten Schnitt, wenn man u g′ p parallel mit R g zieht. Diese beiden letzteren Geraden bilden mit 2 H und 3 K ein Parallelogramm u v n p, welches die Projection des Schiftsparrenkopfes auf der obern Sparrenfläche darstellt.

Was den Zapfen betrifft, so theile man das Parallelogramm u v n p in fünf gleiche Theile, und ziehe die Horizontale 4 — 5 — 6, auf welcher man zwei Theile 4 — 6 und 4 — 5 nimmt, so gross als die analogen Distanzen auf der Horizontalprojection des Zapfens; zieht man hierauf durch den Punkt 6 eine Parallele mit v n und durch den Punkt 5 eine Senkrechte 5 — 7, so wird hiedurch der Eckpunkt 7 des Zapfens bestimmt, den man mit dem Punkte 4 verbinden muss; die übrigen Theile des Zapfens sind leicht zu zeichnen. Diese Construction aber rechtfertigt sich dadurch, dass jede mit der äussern Sparrenlinie parallel gezogene Gerade A B D ihre Grösse beibehält, wenn man sie auf die obere Sparrenfläche projicirt, und dass eine auf A B D senkrechte Gerade sich auf jene Fläche in einer Geraden projicirt, welche auf der Sparrenlinie senkrecht ist.

§. 936.

Nun muss man noch auf die obere Sparrenfläche die Versatzung projiciren, welche die Gestalt eines dreieckigen Prisma hat, dessen orthogonaler Schnitt das nach Willkühr auf Fig. 2 gezeichnete Dreieck D′ δ d′ ist. Die beiden Kanten dieses Prisma, welche den Ecken D′, d′ entsprechen, sind offenbar dargestellt durch die Geraden H K und m l; um die dritte zu finden, projicire man den Punkt δ in δ′ auf die obere Sparrenebene; klappt man hierauf diese Ebene auf, so kommt δ′ in δ″ zu liegen, und man erhält die Gerade α′ β′ als untere Kante der auf die obere Sparrenebene projicirten Versatzung. Bezieht man ferner die Punkte α′ und β′ auf die Horizontalebene in α und β, so erhält man als Projectionen für die schiefen Grundflächen des Prisma (welche die Verlängerungen der schief gestellten Seitenflächen des Schifters sind) die Dreiecke H M α und K L β.

§. 937.

Endlich muss der Schifter noch auf eine mit den schief gestellten Seitenflächen parallele Ebene projicirt werden. Zu diesem Zwecke lege man durch seine Mittellinie, deren Horizontalprojection E F ist, eine mit jenen Seitenflächen parallele Ebene. Diese schneidet 1) die obere Seitenfläche in jener Mittellinie selbst; 2) die Horizontalebene in der mit K L parallelen Geraden E T; 3) die Vertikalebene B C in der Geraden (F T, F′ T′); mithin schliesst die schneidende Ebene ein in E F T projicirtes Dreieck ein, das, parallel mit sich selbst in Fig. 4 gebracht, und um seine Grundlinie E″ T″ umgeklappt, als Dreieck E″ F″ T″ sich darstellt. Dieses aber ist leicht zu construiren, weil man eine zweite Seite T″ F″ kennt, welche gleich F′ T′ sein muss, und die Linie F F″, auf welche die Dreieckspitze fallen wird. Auf der Ebene dieses Dreieckes nun projicirt sich die obere Sparrenfläche des Schifters in der Geraden E″ F″: die untere Sparrenfläche aber projicirt sich in einer mit E″ F″ parallelen Geraden e″ f″, deren Entfernung E″ e″ dem Zwischenraume d′ d″

Taf. 71. Fig. 4.

der Sparrenebenen auf Fig. 2 gleich ist. Denn obgleich die Ebene des Profils (Fig. 2) und die schief gestellte Ebene des in E F T projicirten Dreieckes nicht parallel sind, so sind doch beide senkrecht auf der obern und untern Seitenfläche des Schifters; folglich muss jede diese Seitenflächen in zwei parallelen Geraden schneiden, deren Entfernung dieselbe ist.

Auf diese Linien E″ F″, e″ f″ nun werden die Punkte H, K, L, M durch Senkrechte auf die Projectionsaxe E″ T″ bezogen: eben so verfährt man in Beziehung auf die Punkte α, β der Versatzung, die man auf α'' β'' projicirt; letztere Gerade ist parallel mit E″ F″ und um die Distanz δ δ' (Fig. 2) von ihr entfernt; denn die Horizontale δ, auf welcher die Ecken α und β liegen, ist parallel mit der obern Seitenfläche des Schiftsparrens. Die Projection des Kopfes dieses Schiftsparrens erhält man leicht aus den Punkten N, P, U, V, .. der Horizontalprojection.

Sechstes Kapitel.

Dachkehlen.

§. 938.

Taf. 72. Es sind zwei Dächer gegeben, deren Sparrenlinien sowohl, als die Firstlinien, beziehungsweise gleiche Höhe haben, und welche sich unter einem beliebigen Winkel schneiden, wie der Grundriss Fig. 9 es andeutet. Man zeichne nach Belieben das Profil des Hauptdaches (Fig. 1), und bemerke auf der Grundrissebene die äusseren Sparrenlinien A′ A B C und A A″, B B″ beider Dächer, so wie die Firstlinien O′ O, O O″; hiedurch werden sodann auch die Projectionen O A und O B der beiden Kanten bestimmt, in welchen die oberen Sparrenebenen sich schneiden. Durch die Punkte a und b, in welchen diese Kanten von der innern Sparrenlinie a′ a b c des ersten Daches geschnitten werden, ziehe man die inneren Sparrenlinien a a″ und b b″ des zweiten Daches und sofort auch das Profil des letztern (Fig. 2), dem man eine Höhe O″ Z″ = O′ Z′ gibt. Verlängert man ferner die Linien der Säule und Firstpfette (Fig. 1) bis zu ihren Durchschnitten mit O A und O B, so erhält man auch die Stärke der Säule und Firstpfette auf Fig. 2. In O errichte man hierauf eine Säule, deren Basis das Parallelogramm K R — 2 — 3 ist, und welche auf einem Balken ruht, der in der Richtung der kürzesten der beiden Diagonalen A O, B O gelegt ist. Dieser Balken selbst liegt auf den beiden Mauern des Daches (1), aber es wird hier wieder von allen horizontalen Stücken, als Hauptbalken, Gratstichbalken, Dachschwellen u. s. w. abstrahirt.

§. 939.

Da nun die beiden oberen Sparrenebenen, welche sich in O A schneiden, einen einwärts gehenden Winkel darbieten, so muss in jener Richtung ein Kehlsparren angebracht werden, d. h. ein rinnenförmig ausgehöhltes Holzstück, das hier schräg ist, weil die Gerade O A den Winkel A′ A A″ nicht in zwei gleiche Theile theilt. Dieser Kehlsparren muss mittelst des Parallelogramms A ω D E verrückt werden, auf dieselbe Art und aus demselben Grunde, wie in §. 911 der Gratsparren eines Walmes; da aber der Kehlsparren

weniger Widerstand zu leisten vermag, als ein Gratsparren, und er die Last der Kehlschifter (Reuter) zu tragen hat, so setzt man die innere Sohlenlinie d e des Kehlsparrens nicht mehr innerhalb der inneren Sparrenlinien a′ a und a″ a beider Dachflächen, sondern lässt sie durch die Ecke a gehen, so dass also, nach der Abgratung des Kehlsparrens, als seine Sohle sich das Fünfeck A D d e E A darstellen wird. Der Kehlsparren wird durch Versatzung und Zapfen mit dem Kehlstichbalken verbunden, der seinerseits wieder mit dem in der Richtung B O 3 ... gelegten Hauptbalken verbunden wird: von diesen horizontalen Holzstücken wird aber, wie schon gesagt worden, hier keine Rede sein.

Der Kopf des Kehlsparrens fasst die Säule mittelst der beiden Flächen K H und K L; vorher aber schneidet er die Firstpfette in der Vertikalen F. Um nun diese Pfette nicht zu schwächen, schneidet man den untern Theil des Kehlsparrens durch die untere Sparrenebene z″ a″ u des Daches (2), wodurch man die schiefe Seitenfläche F y H G erhält, die man, wie auch die Abgratungsfläche K A E G H, mittelst der durch die Firstlinie gelegten Vertikalebene G H begrenzt. Die andere Abgratungsfläche D A K L P verlängert sich auch bis zur Firstlinie O L P; da aber noch ein ziemlich grosser Zwischenraum bliebe bis zu dem entgegengesetzten Sparren, welcher die Säule unterstützt, so verlängert man den Kehlsparren bis zur Vertikalebene O N, und schneidet ihn durch die Sparrenebene Z′ B′, wodurch man die Fläche L M N P erhält. Endlich muss, wegen des Zusammentreffens der vertikalen Fläche D Q mit der Firstpfette des Daches (1), der Kehlsparren durch die untere Sparrenebene z′ a′ v geschnitten werden, wodurch man unterhalb die schiefe Fläche Q x M N erhält.

§. 940.

Um diese verschiedenen Schiftflächen deutlicher darzustellen, projicire man den Kehlsparren auf eine mit A K parallele Vertikalebene (Fig. 7). Nachdem man die Höhen O′ Z′ und O′ z′ so gross genommen, als die gleichnamigen Linien auf dem Profil (1), und nachdem man die Geraden A′ Z′, e′ z′ und ihre Parallelen E′ G′, u′ g′ gezogen hat, projicire man die verschiedenen Punkte F, G, H, K, L, ... auf jene Linien, so erhält man folgende Flächen: Fig. 7.

f′ F′ y′ y″ ist der Durchschnitt des Kehlsparrens mit der vertikalen Seitenfläche F y der Firstpfette des Daches (2), und die Seite (F′ y′, F y) ist horizontal.

F′ g′ h′ y′ ist die Seitenfläche, mit welcher der Kehlsparren sich an die Firstpfette anschmiegt; sie befindet sich in der untern Sparrenebene z″ a″ u, wesshalb denn auch die Seite F′ g′ der Geraden u′ g′ angehört; eben diese Fläche aber ist bis zu der Vertikalebene G H verlängert, wodurch die Anschmiegung G′ g′ h′ H′ entsteht. Es folgt hieraus offenbar, dass die Seiten G′ H′ und g′ h′ horizontal sein und beziehungsweise durch die Punkte Z′ und z′ gehen müssen, welche sich in O auf G H O projiciren.

Die Fläche endlich, mit welcher der Kehlsparren sich an die Säule anschmiegt, und welche horizontal sich in K y H projicirt, ist durch K′ k′ y″ y′ h′ H′ K′ dargestellt, und hat mit den drei vorhin genannten Flächen gemeinschaftliche Seiten.

Was den Theil des Kopfes betrifft, der jenseits der innern Kante A K liegt, so bemerke man, dass, in Folge der Art, wie der Kehlsparren verrückt worden, und nach den zwischen den Firstpfetten der Dächer (1) und (2) bestehenden Relationen, die Punkte Q und P auf der Vertikalprojection mit F und G zusammenfallen müssen, daher man denn leicht folgende Flächen finden wird:

f′ F′ x′ x″ ist der Durchschnitt des Kehlsparrens mit der vertikalen Seitenfläche Q x der Firstpfette des Daches (1), und die horizontale Seite F′ x′ fällt in der Projection mit F′ y′ zusammen, weil beide gleiche Höhe haben.

F' x' m' n' F' ist die Fläche, mit welcher der Kehlsparren sich an die Firstpfette anschmiegt; sie liegt in der untern Sparrenebene z' a' v, und desshalb fällt auch die Seite F' n' in die Gerade (u' F', v Q), in welcher jene Sparrenebene die vertikale Seitenfläche des Kehlsparrens schneidet; aber diese, horizontal auf Q x M N projicirte, Anschmiegung ist hier bis zu ihrem Durchschnitte mit der vertikalen Seitenfläche O M N verlängert, so dass die Seite (n' m', N M) die Vertikale (O', O' Z') schneiden muss, und zwar im Punkte (z', O), welcher in der untern Sparrenebene z' a' a des Daches (1) liegt.

M' N' n' m' ist die vertikale Seitenfläche M N, deren obere Seite M' N' nach Z' auslaufen muss, aus den vorhin angeführten Gründen, und weil die Schiftfläche (P L M N, G' L' M' N') in der obern Sparrenebene Z' B' des Daches (1) liegt.

Die auf K x L M projicirte Fläche endlich ist auf der Vertikalebene durch k' K' L' M' m' x' x'' k' dargestellt, und hat mit den vorhergehenden Flächen mehrere Seiten gemeinschaftlich.

§. 941.

Man betrachte nun den Kehlsparren, welcher die auf B O projicirte Dachkante bildet. Nachdem man die Stärke B 5 dieses Holzstückes senkrecht auf B O getragen, vollende man das Parallelogramm B — 5 — 6 — 7, so erhält man 6 B 7 λ b γ als Sohle dieses abgegrateten Kehlsparrens. In dieser Gestalt aber wäre er, wie der erste Kehlsparren, durch die vertikalen Seitenflächen 6 Y und 7 T begrenzt, in welche die Kehlschifter (f), (g), (h), (k), ... eingelassen werden müssen. Da aber die Seitenflächen dieser letzteren Stücke, so wie die Wangen ihrer Zapfen, parallel mit den Sparrenebenen des Daches (2) sein sollen, so würde jene Verbindung sehr unbequem werden, und besonders wäre die Ausführung der Zapfenlöcher in dem Kehlsparren wegen ihrer schrägen Richtung sehr schwierig. Um daher diesen schweren Uebelstand zu vermeiden, gibt man häufig dem Kehlsparren auf jeder Seite eine schief gestellte oder auf den Sparrenebenen normale Seitenfläche, welche zur Breite die Distanz der beiden Geraden B'' Z'', b'' z'' haben muss, durch welche die Dicke der Sparren des Daches (2) gemessen wird. Die Bestimmung dieser schief gestellten Seite aber geschieht auf folgende Art.

Aus dem Punkte β, in welchem die vertikale Seitenfläche 6 Y des Kehlsparrens von der innern Sparrenlinie b'' b getroffen wird, fälle man auf die obere Sparrenebene eine Senkrechte (β ε, b'' ε'), welche diese Ebene im Punkte (ε', ε) schneidet. Hierauf ziehe man durch ε die Gerade φ ε X, welche die Projection ist des Durchschnittes der obern Sparrenebene mit der durch die Gerade (β Y, b'' z'') gelegten Normalebene. Die schief gestellte Seitenfläche ist auf Y β φ X projicirt, die Abgratungsfläche ist auf X φ B R, und die vertikale Seitenfläche auf das Stück reducirt worden, welches β γ zum Grundschnitte hat.

Auf der andern Seite des Kehlsparrens ziehe man ebenfalls die (α δ, a' δ') normal auf die obere Sparrenebene des Daches (1), und durch δ die Gerade π δ S parallel mit B O; auf diese Art erhält man α π S T als die schief gestellte Seitenfläche, und die Sohle des Kehlsparrens reducirt sich somit auf das Siebeneck β φ B π α λ γ.

Was den Kopf des Kehlsparrens betrifft, so wird er von den beiden Klauenflächen R X Y, R V U begrenzt, welche vertikal und auch der Dachsäule gemeinschaftlich sind. Unten wird der Kehlsparren von der vertikalen Seitenfläche θ ϱ der Firstpfette und von ihrer schiefen Seitenfläche geschnitten, wodurch eine Fläche θ ϱ U T am Kehlsparren entsteht, welche in der untern Sparrenebene z' a' b α liegt; diese letztere ist verlängert bis zu ihrem Durchschnitte (T U, U') mit der Sparrenebene Z' B' des Daches (1), und die Fläche

S T U V gehört dieser Sparrenebene an. Auf der Firstpfette des Daches (2) entstehen ähnliche Anschmiegungsflächen, die leicht aus der Figur zu erkennen sind. *)

§. 942.

Es muss nun noch der schief gestellte Kehlsparren auf eine mit B O parallele Vertikalebene projicirt werden. Man projicire zu diesem Zwecke auf die Projectionsaxe die Punkte B, π, α, λ, ..., und nehme die Höhen O′ Z′, O′ z′, so gross als die gleichnamigen Linien auf dem Profil (1); hierauf ziehe man die Geraden λ' z′, B′ Z′, und ihre Parallelen π' S′, α' T′, und projicire auf diese die verschiedenen Punkte R, ϱ, θ, S, T, ..., so erhält man folgende Seitenflächen: Fig. 8.

θ'' θ' ϱ' ϱ'' ist die vertikale Seitenfläche der Firstpfette, und die Seite θ' ϱ' muss, weil sie der Horizontalen θ ϱ entspricht, parallel mit der Projectionsaxe sein.

θ' ϱ' U′ T′ liegt in der untern Sparrenebene, und wird bestimmt, indem man durch T die Horizontale T′ U′ zieht, bis zu ihrem Durchschnitte mit der Vertikalen U U′.

S′ T′ U′ V′ ist die Anschmiegungsfläche, welche in der obern Sparrenebene des Daches (1) liegt; man zieht durch S′ eine Horizontale S′ V′ (welche offenbar durch Z′ gehen muss), und projicirt auf diese den Punkt V in V′. Zieht man ferner die Seite V′ U′, so muss diese mit S′ T′ in einem Punkte 9″ zusammentreffen, welcher auf der Vertikalen 9 liegt, und zwar in derselben Höhe, wie der Punkt 9′ des Profils (1).

Die Klauenfläche endlich ist offenbar R′ V′ U′ ϱ' ϱ'' R″ R′, und hat mehrere Seiten mit den vorigen Flächen gemeinschaftlich.

Die Schiftflächen auf der andern Seite des Kehlsparrens sind, nach dem Vorausgehenden, leicht aufzufinden.

§. 943.

Von den Kehlschiftern. Sie können abgegratet werden, wie (f) und (g), d. h. man kann ihre Nebenseitenflächen aus zwei vertikalen, mit A B parallelen Ebenen bilden, welche also schief auf der obern und untern Seitenfläche stehen, weil letztere in den beiden Sparrenebenen des Daches (2) liegen: diess ist also derselbe Fall, wie beim abgegrateten Schiftsparren des schrägen Walmes (§. 926). Man bemerke nur, dass für den Sparren (g), welcher in die schief gestellte Seitenfläche des zweiten Kehlsparrens eingelassen wird, die Stirne des Zapfens durch eine auf dieser Seitenfläche senkrechte Ebene gebildet werden muss. Da nun die Wangen des Zapfens mit den Sparrenebenen parallel, und folglich ebenfalls senkrecht auf jener Seitenfläche des Kehlsparrens sind, so müssen die Kanten des Zapfens selbst senkrecht auf der schief gestellten Seitenfläche des Kehlsparrens stehen; ihre Projectionen müssen daher mit dem horizontalen Grundschnitte φ 6 dieser schief gestellten Fläche rechte Winkel bilden, wie die Figur zeigt.

*) Man bemerke hier, dass der schief gestellte Kehlsparren kein so grosses Holzstück erfordert, als wenn man die vertikalen Seitenflächen beibehalten hätte; denn in letzterem Falle ist $\lambda\,\gamma\,6\,7$ das um die Sohle des Stückes umschriebene Rechteck, während es beim schief gestellten Kehlsparren sich auf $\lambda\,\gamma\,8\,\pi$ reduciren lässt. Man könnte auch in der Figur des geraden Walmes die grosse Schiefe des Zapfens und Zapfenloches vermeiden, wodurch der Schiftsparren mit dem Gratsparren verbunden wird, wenn man eine Seitenfläche des letztern Holzstückes schief, d. h. normal auf die Sparrenebene annähme. Wendete man aber auf den Gratsparren die, in §. 941 für den Kehlsparren ausgeführte, Construction an, so käme die normale Seitenfläche desselben oberhalb des Kopfes des Schiftsparrens zu liegen, und würde also dieses Holzstück der ganzen Wirkung seiner Schwere überlassen, während die vertikale Seitenfläche des Gratsparrens zum Theil den Wirkungen dieser Schwere entgegenstrebt.

§. 944.

Die Sparren (h) und (k) sind schief gestellt worden, auf dieselbe Art, wie der Schiftsparren des schrägen Walmes (Taf. 71). Das Verfahren ist kurz folgendes: man zeichne die Horizontalprojection f g der Mittellinie des Sparrens (h), welche mit A B parallel sein und f g'' werden wird, wenn man die obere Sparrenebene auf die Horizontalebene aufklappt. Hierauf trage man die halbe Sparrenstärke *) links und rechts von f g'' in senkrechter Richtung auf, und ziehe parallel mit f g'' zwei Geraden, welche die äussere Sparrenlinie in den Punkten l und m treffen; durch diese zieht man hierauf, parallel mit f g, die beiden oberen Kanten l q, m p. Fällt man nun auf die obere Sparrenebene die Normale a'' i', und klappt den Punkt i' in i auf die Mittellinie f g'' auf, so erhält man als Horizontalprojection dieser Normale die senkrecht auf die äussere Sparrenlinie gefällte Gerade i h, und als ihren horizontalen Grundschnitt den Punkt h auf der innern Sparrenlinie. Mithin ist f h der Grundschnitt einer Ebene, die normal auf der Sparrenebene steht, und durch die Mittellinie des Sparrens geht, und folglich sind auch die mit f h parallelen Geraden l k, m n die Grundschnitte der schief gestellten Seitenflächen, und l k n m ist die horizontale Sohle des Holzstückes. Nun darf man nur durch die Ecken k, n Parallelen mit f g ziehen, um die beiden unteren Kanten des Sparrens zu erhalten, welche, eben so wie die oberen Kanten, bis zu ihrem Durchschnitte mit der untern Sparrenebene b'' z'' des Profils (2) verlängert werden müssen; denn hier erhält der Sparren (h) den Schlitzzapfen, und der Sparren (k) die Einscheerung. Die Seitenflächen, welche den Einschnitt dieser Einscheerung bilden, sind nicht schief gestellt, sondern vertikal und parallel mit den Kanten der Sparren.

Was den Sparren (k) betrifft, so könnte man dieselben Operationen auf der äussern Sparrenlinie B'' B wiederholen; statt dessen aber ist es genügend, die oberen Kanten l q, m p über die Firstlinie hinaus zu verlängern, und hierauf die unteren Kanten rechts von jenen zu setzen, und zwar in derselben Entfernung, wie auf dem Sparren (h).

§. 945.

Die Kanten der Zapfenstirne des Sparrens (k) müssen senkrecht sein auf dem Grundschnitte $\varphi\,6$ der schief gestellten Seitenfläche des Kehlsparrens, aus den schon für (g) in §. 943 angeführten Gründen. Was die Zapfenstirne im Sparren (h) betrifft, so muss sie gebildet werden durch eine auf der vertikalen Seitenfläche E G des Kehlsparrens senkrechte Ebene, welche durch den Durchschnitt q r dieser Seitenfläche mit der schief gestellten Seitenfläche des Sparrens geht; da nun letztere zu ihrem Grundschnitte die Gerade l k r hat, so ist r der Fusspunkt jenes Durchschnittes, und r s der horizontale Grundschnitt der Ebene der Zapfenstirne; diese Ebene nun schneidet die obere Sparrenfläche in s q, und diese Gerade gibt also die Richtung an, welche die Zapfenkanten erhalten müssen, weil die beiden Wangen des Zapfens stets parallel mit der Sparrenebene sind.

§. 946.

Fig. 10. Projection auf die oberen Sparrenebenen und Aufklappung dieser letzteren. Man bilde die beiden Trapeze $12' - 13' - O_2\,A_2$ und $13' - 14' - B_2\,O_2$, indem man ihre Höhen gleich A'' Z'' (Fig. 2) und ihre Grundlinien den entsprechenden Linien auf Fig. 4 und Fig. 5 gleich nimmt. Trägt man hierauf die Distanz A'' i' (Fig. 2) von 12' nach 15' (Fig. 10), so kann man die Projection $15' - u_2$ der innern Sparrenlinie ziehen. Auf dieser Linie bestimmt man den Punkt u_2 dadurch, dass man u auf die äussere

*) Man hat hier dem Kehlsparren eine grössere Stärke gegeben, als den anderen Sparren, um seine einzelnen Theile lesbarer zu machen; in der Ausführung aber erhalten alle Sparren dieselbe Breite.

Sparrenlinie projicirt, und die Entfernung dieser Projection vom Punkte A nimmt; den Punkt E_2 findet man noch leichter, und nun stellen die Geraden $E_2 G_2$, $u_2 F_2$ die Projectionen der beiden in den Sparrenebenen liegenden Kanten des Kehlsparrens dar, zwischen welchen die Anschmiegungen der Kehlschifter enthalten sind. Um diese zu erhalten, ziehe man ihre Kanten parallel mit $A_2 B_2$; man nimmt zu diesem Zwecke A_2 — 18′ gleich A — 18, und was den auf der innern Sparrenlinie liegenden Fusspunkt 19 der untern Kante betrifft, so projicire man zuerst 19 auf den Punkt 20 der äussern Sparrenlinie, und nehme hierauf die Distanz 18′ — 20′ gleich 18 — 20, so gibt die von 20′ auf die innere Sparrenlinie (Fig. 10) gefällte Senkrechte den gesuchten Punkt 19′ der untern Kante des Sparrens (f_2). Die Kanten der Zapfenstirne müssen parallel mit der Geraden 21′ — 22′ sein, die man erhält, wenn man die Distanz 19′ — 21′ gleich 19 — 21 nimmt. Der Sparren (h_2) wird durch ähnliche Mittel bestimmt; und die Breite der Zapfenwangen erhält man, wenn man auf Fig. 4 die Grösse einer mit der Sparrenlinie parallelen Geraden misst, welche in der Aufklappung (Fig. 10) dieselbe bleibt.

Fig. 12 stellt die in Fig. 3 projicirte Sparrenebene dar. Um sie in dieser Aufklappung zu erhalten, construirt man das rechtwinklige Dreieck $A_2 O_2$ — 16′, dessen Hypotenuse bereits bekannt ist, und dessen Katheten den Geraden O — 16 und A′ Z′ (Fig. 1) gleich sind. Die äussere Sparrenlinie $A_2 D_2$ muss senkrecht auf A_2 — 16′ gezogen werden, und die Projection der innern muss um die Distanz A′ δ′ (Fig. 1) von ihr entfernt sein. Man erhält auf diesen Linien die Punkte v_2 und D_2, indem man die Punkte v und D der Fig. 3 auf A′ A projicirt. Nun kann man die Projectionen $D_2 P_2$ und $v_2 Q_2$ der Kehlsparrenkanten ziehen u. s. w. Eben so verfährt man in Beziehung auf Fig. 13, indem man zuerst das rechtwinklige Dreieck $O_2 B_2$ — 17′ construirt, dessen Seiten leicht zu finden sind; die übrigen Theile dieser Figur aber erklären sich von selbst oder aus dem Vorhergehenden, so dass jede weitere Erklärung als überflüssig erscheinen muss.

Siebentes Kapitel.

Dachpfetten und Tragklötze.

§. 947.

Das hier dargestellte Dach ist vollständig, d. h. es enthält ausser den Sparren, Schiftern, Grat- und Kehlsparren noch Pfetten und folglich auch Hauptstreben, um jene zu unterstützen, wie solches in den Dachstühlen der Tafeln 67 und 68 angedeutet wurde; die horizontalen Stücke aber, wie Hauptbalken, Gratstichbalken, Dachschwellen u. s. w. sind hier ebenfalls weggelassen worden, weil das Nöthige hierüber schon beim geraden Walme gesagt worden ist. Taf. 73.

Der allgemeine Grundriss (Fig. 10) zeigt, dass das Dach zwei Gebäude zu überdecken hat, welche eine rechtwinklige Wiederkehr bilden, und es wurde diese Anordnung gewählt, um Gelegenheit zu haben, über die Legung der Pfetten unter den Grat- und Kehlsparren, welche grosse Schwierigkeiten darbietet, das Nöthige zu sagen. Man zeichne zuerst das Profil (Fig. 1) der Dachfläche des kleinen Daches, wozu die halbe Breite O′ A′ des Dachstuhles, und die Höhe O′ Z′ der Dachsäule gegeben sind. Durch die ebenfalls gegebene

Sparrenstärke wird die Parallele a′ z′, und durch die Stärke der Pfetten die Gerade α′ ζ′ bestimmt, welche die obere Seitenfläche der Hauptstrebe darstellt. Letzteres Holzstück ist mit der Dachsäule durch Versatzung und einen Zapfen verbunden, dessen Stirne horizontal ist, damit er der Säule besser entgegenstrebe; dem Sparren gibt man lieber einen Zapfen, dessen Stirne senkrecht auf der Sparrenebene ist, damit der Sparren, welcher auch den Zapfen des Tragklotzes aufnehmen muss, leichter in die Dachsäule eingelassen werden könne. Was die Pfette betrifft, so gibt man ihr auf diesem mittlern Profil ein Quadrat M′ N′ P′ Q′ als Geviertes, damit auf den beiden anderen Profilen, von welchen später die Rede sein wird, und welche einen mehr oder weniger steilen Hang haben, die Pfette nicht zweimal geändert und dadurch entweder zu schwach oder zu massig werde. Diese Pfette wird in ihrer Lage erhalten durch einen Tragklotz, der in die Hauptstrebe sowohl, als in den obern Sparren eingezapft ist. Manchmal wird unterhalb der Verzapfung noch ein Unterlagklötzchen angebracht, das mittelst eines eisernen Bolzens auf der Hauptstrebe befestigt wird.

Aus denselben Gründen, die in der Anmerkung zu §. 907 angegeben wurden, sind alle Holzstücke hier wieder auf ein Viertheil ihrer Länge reducirt worden.

§. 948.

Nun zeichne man auf die Horizontalebene die äusseren Sparrenlinien D A, A B, B F, so wie die Firstlinien O C und C I, indem man die Projection O der Walmspitze nach §. 908 wählt; hat man sodann die Projectionen A O und B C des aus- und des einwärts gehenden Dachwinkels gezogen, so zeichne man ferner die inneren Sparrenlinien a b, a d, b f so, dass sie sich zu zweien auf A O und B C schneiden. Letztere Bedingung muss auch für die äusseren Linien α β, α δ, β φ der Hauptstreben, so wie für die inneren eben dieser Holzstücke erfüllt werden.

Die quadratische Dachsäule O wird nach §. 909 verrückt; die Sparren E und D werden wie beim geraden Walme gelegt, der erste mit Verrückung; die Hauptstreben unter diesen Sparren erhalten ähnliche Lagen, welche keiner weitern Erklärung bedürfen.

§. 949.

Ehe man weiter geht, ist es räthlich, noch das Profil des Walmes (Fig. 4) zu zeichnen, das man aus der Horizontalprojection (Fig. 3) herleitet, indem man zugleich die Höhen O″ Z″, O″ z″, O″ ζ″ so gross nimmt, als die gleichnamigen Linien im Profil (1). Fig. 5 stellt den Dachstuhl unter der Firstlinie, in der Richtung O C, dar; er besteht aus zwei Säulen, der Firstpfette und Kopfbändern *(contre-fiches)*, welche aus den Säulen gegen die Firstpfette streben. Ausserdem aber wurde auf derselben Figur auch noch der nach F I gemachte Schnitt Y′ B′ des grössern Daches (Fig. 6) dargestellt, weil er mit dem vorhergehenden einige gemeinschaftliche Theile hat. Aus demselben Grunde wurde in Fig. 1, welche zunächst nur einen nach O E gemachten Durchschnitt des kleinen Daches darstellt, auch noch die Firstpfette und das Kopfband des grössern, in der Richtung C I geschnittenen, Daches aufgenommen.

§. 950.

Der Gratsparren A ist verrückt und abgegratet, wie in §. 911, mittelst eines Parallelogramms, das man über der Geraden construirt hat, welche seine Stärke angibt. Die unter ihm liegende Hauptstrebe ist auf eine ähnliche Art verrückt, und der horizontale Grundschnitt ihrer obern Seitenfläche ist eine Gerade G H, welche durch α senkrecht auf O A gezogen ist; der Grundschnitt ihrer untern Seitenfläche geht durch die Ecke, welche die inneren Linien der Hauptstreben mit einander bilden. Die Strebe unter dem Gratbalken

behält also ihre rechtwinklig parallelepipedische Form, und wird nicht abgegratet durch Ebenen, die mit den Sparrenebenen parallel wären, und zu Grundschnitten die Geraden $\alpha\,\alpha'$ und $\alpha\,\delta$ haben würden; denn durch eine solche Abgratung würde nicht nur ein unnützer Zeitaufwand veranlasst werden, sondern sie würde auch die Hauptstrebe, welche die Last der Pfetten zu tragen hat, schwächen, und letzteren die Stütze rauben, welche sie zum Theil in den vorspringenden Kanten, deren Grundschnitte G und H sind, finden, wie man später sehen wird. Der Kopf dieser Strebe fasst die Säule auf dieselbe Art, wie der Gratsparren in §. 914, und alle diese Holzstücke sind in ihren oberen Theilen an einander angeschiftet, mittelst vertikaler Ebenen, welche durch die Axe der Säule und diejenigen Punkte gelegt sind, in welchen die Holzstücke oben einander treffen.

§. 951.

Der Kehlsparren B mit schief gestellten Seitenflächen wird wie in §. 941 bestimmt, mittelst eines Parallelogramms auf seiner Geviertseite, und mittelst der Normalen $a'\,a_2$ und $b'\,b_2$ auf den Profilen (1) und (5), durch welche die in den oberen Sparrenebenen liegenden Kanten bestimmt werden. Der Kopf dieses Kehlsparrens, der unterhalb Einschnitte erhalten muss, um sich auf die beiden benachbarten Firstpfetten auflegen zu können, fasst die Säule auf dieselbe Art, wie in §. 939.

Die Hauptstrebe unter dem Kehlsparren ist auf eine ähnliche Art verrückt, durch ein über seiner Geviertseite construirtes Parallelogramm; und zieht man durch die beiden auf B A und B F liegenden Eckpunkte zwei Parallelen mit B C, so schneiden diese die Linien $6\,\alpha$ und $6\,\varphi$ in den Punkten K und V, und bestimmen dadurch eine Gerade K V, die senkrecht auf B C sein muss, und der horizontale Grundschnitt der obern Seitenfläche dieser Hauptstrebe ist. Die untere Seitenfläche hat zum Grundschnitte eine mit K V parallele Gerade, welche durch den Scheitel des vorspringenden Winkels geht, den die inneren Linien der Streben (2) und (6) mit einander bilden. Diese Hauptstrebe ist also nicht abgegratet, sondern behält ihre rechtwinklig parallelepipedische Form aus den in §. 950 angeführten Gründen. Ihr Kopf fasst die Dachsäule mit zwei vertikalen Flächen; Anschmiegungsflächen sind hier keine nöthig, wie bei der Hauptstrebe A O.

Ausser den in Fig. 10 angedeuteten einzelnen Theilen gehören noch zu dem Dache, von dem hier die Rede ist: ein Hauptbalken, der auf den einander entgegen liegenden Mauerecken B_2 und B_3 lagert, und auf welchem die Säule C_2, der Kehlsparren und dessen Hauptstrebe, so wie der in der Richtung $B_3\,C_2$ liegende Gratsparren und dessen Hauptstrebe ruhen. Mit diesem Hauptbalken sind durch Verzapfung oder Ueberschnitt verbunden zwei Stichbalken in den Richtungen $C_2\,I_3$ und $C_2\,D_3$, deren jeder einen Dachstuhlsparren und eine Hauptstrebe trägt. Die beiden Säulen C_2 und I_2 endlich sind durch die Firstpfette und ihre Kopfbänder verbunden.

§. 952.

Von den Dachpfetten. Die Pfette unter der Dachfläche A O C B hat zum Profil das Quadrat $M'\,N'\,P'\,Q'$. Die äussere Seitenfläche derselben nennt man diejenige, welche, wie $M'\,N'$, mit den Sparren in Berührung ist, während $P'\,Q'$ die innere Seitenfläche heisst; die beiden anderen $M'\,Q'$ und $N'\,P'$ heissen die obere und untere Seitenfläche. Diese Pfette erstreckt sich von der Vertikalebene B C bis zur Vertikalebene A O; um aus ihr die Walmpfette abzuleiten, projicire man die Endpunkte M und N der äusseren Kanten auf das Profil (4) in M'' und N'', hierauf ziehe man aus diesen Punkten die Geraden $M''\,S''$, $N''\,R''$ senkrecht auf die Sparrenebene; auf diese Art wird das Profil dieser neuen Pfette kein Quadrat mehr, sondern ein Rectangel $M''\,N''\,R''\,S''$, und desshalb berühren die beiden Pfetten des Walmes und der Dachfläche sich in Taf. 73.

der Vertikalebene O A in zwei Parallelogrammen, welche nur die einzige Seite gemein haben, durch welche die Endpunkte der äusseren Kanten verbunden werden. Eben so nehme man auf dem Profil (5) der auf I C B F projicirten Dachfläche, die Punkte m', n' in derselben Höhe, wie M'', N'' an, und vollende das Rechteck m' n' t' u', durch welches die Pfette des grössern Daches bestimmt wird. Die Eckpunkte m', n' müssen den Punkten m, n, in welchen die äusseren Kanten der ersten Pfette die Vertikalebene B C bereits geschnitten haben, genau entsprechen, was als Probe für die Richtigkeit des Verfahrens dienen kann. *)

§. 953.

Wenn der Gratsparren und die unter ihm liegende Hauptstrebe abgegratet wären, ersterer nach innen, letztere nach aussen, durch Ebenen, welche parallel wären mit den Sparrenebenen, und zu Grundschnitten a a' und a a'', $\alpha\,\alpha'$ und $\alpha\,\alpha''$ hätten, so wäre die Anschliessung der beiden Pfetten zwischen diesen Holzstücken schon bestimmt; da aber eine solche Abgratung nicht stattfinden soll (§. 950), so muss man die Einschnitte suchen, welche in diese Holzstücke gemacht werden müssen, um den Pfetten Durchgang zu gestatten. Die horizontale Kante S'' nun schneidet die vertikale Seitenfläche G s der Strebe in einem auf s projicirten Punkte, und geht auf der obern Seitenfläche wieder aus der Strebe hervor, und zwar im Punkte S, in welchem sie die Gerade α O, welche in der Ebene S'' α'' α der innern Seitenfläche der Pfette liegt, schneidet. Mithin schneidet die obere Seitenfläche M'' S'' der Pfette die der Hauptstrebe in einer Geraden S g, deren Endpunkt g man erhält, wenn man auf das Profil (4) die Kante G g in G'' g'' projicirt, und hierauf den Punkt g'' auf g bezieht. — Der Schnitt, den die Seitenfläche M'' S'' in die Hauptstrebe macht, ist also das auf S g s projicirte Dreieck.

Die untere Seitenfläche N'' R'' der Pfette schneidet die Hauptstrebe in dem auf R γ r projicirten Dreiecke, dessen Ecke γ man aus dem Durchschnitte der G'' g'' mit N'' R'' finden könnte; man darf aber nur durch R eine Parallele R γ mit S g ziehen, weil diese beiden Geraden die Durchschnitte derselben Seitenfläche G H mit zwei parallelen Ebenen sind. Die Pfette nimmt also von der Hauptstrebe ein dreiseitiges Prisma weg, dessen zwei Grundflächen die Dreiecke S g s, R γ r, und dessen Seitenkanten die Geraden R S, r s, γ g sind.

Die beiden äusseren Kanten M'' und N'' dringen in den Gratsparren ein durch die auf der untern Kante dieses Holzstückes liegenden Punkte 2 und 4, und durchdringen dasselbe bis zu ihren Durchschnitten M und N mit der innern Linie, welche auf a O projicirt ist, und ihren Fusspunkt in a hat. Ferner, die Seitenflächen M'' S'' und N'' R'' schneiden die untere Seitenfläche des Gratsparrens in den mit g S parallelen Linien 2 — 3, 4 — 5, welche die dreieckigen Grundflächen M — 2 — 3, N — 4 — 5 des Prisma vervollständigen, das man von dem Gratsparren wegnehmen muss, um der Pfette Raum zu machen. Man könnte die Punkte 3 und 5 auch unmittelbar finden, wenn man auf das Profil (4) die Gerade des Gratsparrens projicirte, die ihren Fuss im Punkte 10 hat, und dann eben so verfahren würde, wie für die Gerade (G g, G'' g'') der Strebe.

§. 954.

Was nun die Pfette M' N' P' Q' der Dachfläche betrifft, so dringt ihre Kante Q' längs der Geraden v Q in die Hauptstrebe ein, und die Seitenfläche Q' M' schneidet die obere Seitenfläche dieser Strebe in einer Geraden Q h, deren Endpunkt h folgendermassen bestimmt wird. Man projicirt auf das Profil (1) die Kante

*) Es wäre vernünftiger, die **inneren** Kanten aller Pfetten, und nicht die **äusseren**, in gleiches Niveau zu setzen; denn erstere fallen mehr in die Augen, wenn das Innere des Gebäudes sichtbar ist, letztere aber niemals. Die Zeichnung des Verbandes würde dadurch um nichts schwieriger. Der entgegengesetzte Gebrauch kommt ohne Zweifel daher, dass die Zimmerleute den Holzschnitt an kleinen Modellen einübten, wo freilich die äusseren Kanten die augenfälligeren sind.

H h in H′ h′; letztere Gerade aber schneidet die Seitenfläche Q′ M′ in h′, welchen Punkt man in h projiciren muss, um das Dreieck Q v h zu erhalten. Die Seitenfläche N′ P′ erzeugt ebenfalls einen triangulären Schnitt P — 8 — 7, dessen Seite P — 7 mit Q h parallel ist. In dem Untertheile des Gratsparrens entstehen zwei ähnliche, den Kanten M′ M und N′ N entsprechende Dreiecke, als Grundflächen des prismatischen Einschnittes, den man in den Gratsparren machen muss, um der Pfette Raum zu verschaffen.

Bemerkung. Die Zimmerleute vermeiden es oft, und mit Recht, die letztangeführten Schnitte in das Untertheil des Gratsparrens zu machen. Statt dessen stumpfen sie die Enden der beiden Pfetten durch die Ebene ab, welche die untere Seitenfläche des Gratsparrens enthält, und zum horizontalen Grundschnitte die Gerade 9 — 10 — 11 hat. Dadurch wird Zeit erspart, und der Stütze, welche die Pfette auf dem Tragklotze findet, nichts Wesentliches genommen. Anders verhält es sich mit den Einschnitten in die Kanten G und H der Strebe; diese tragen sehr viel zur Unterstützung der Pfetten bei, und müssen stets ausgeführt werden.

§. 955.

Man betrachte jetzt den Kehlsparren O B und die unter ihm liegende Strebe, welche beiden Holzstücke die beiden in M′ N′ P′ Q′ und m′ n′ t′ u′ (Fig. 5) projicirten Pfetten zwischen sich aufnehmen sollen. Die Kante (Q′, Q q) der Pfette dringt hier in die Hauptstrebe durch den Punkt 12 der Seitenkante (K — 12) ein, bis zu dem auf der innern Linie θ C liegenden Punkte q; und die Seitenfläche Q′ M′ schneidet die obere Seitenfläche K V der Strebe in einer Geraden 12 — λ, die auf folgende Art bestimmt wird. Man projicirt auf das Profil (1) die Linie L C der Strebe auf die Gerade L′ λ', und den Punkt λ', in welchem letztere die M′ Q′ schneidet, projicirt man in λ, wodurch man das Dreieck 12 — λ q erhält. Was die andere Pfette m′ n′ t′ u′ betrifft, so projicirt man dieselbe Gerade L C auf das Profil (5) in L″ l′, und hierauf den Punkt l′ in l, wodurch das Dreieck u l — 13 entsteht. Die übrigen Dreiecke, welche zu den prismatischen Einschnitten gehören, die man in der Strebe und in dem Kehlsparren anbringen muss, sind den beiden eben construirten 12 — q λ und 13 — l u ähnlich, so dass es überflüssig wäre, hier weitere Erklärungen beizufügen, besonders nach dem, was in den §§. 953 und 954 gesagt worden ist.

§. 956.

Seitenprojection des Gratsparrens und der unter ihm liegenden Hauptstrebe. Man construire das Dreieck A′ O′ Z′ mit einer Grundlinie, die gleich und parallel O A, und einer Höhe O′ Z′, welche der gleichnamigen Linie auf dem Profil (1) gleich ist. Hierauf projicire man auf die Projectionsaxe O′ A′ alle die Punkte A, a, G, π, ..., und ziehe Parallelen mit A′ Z′. Auf diese verschiedenen Geraden projicire man sofort die Punkte M, N, Q, S, s, g, ... in M′, N′, O′, S′, s′ g′,... Da aber letztere Punkte, die mit grosser Genauigkeit auf die Holzstücke abgetragen werden müssen, durch 2 oder 3 auf einander folgende Projectionen erhalten wurden, bei denen sich leicht kleine Fehler einschleichen konnten, besonders was die Richtung der Schnitte betrifft, so wenden die Zimmerleute noch folgende Proben für die Richtigkeit der Construction an. Fig. 7.

Man nimmt die Distanzen O′ — 14′ und O′ — 15′ der Fig. 7 gleich den Höhen der Punkte M″ und S″ (Fig. 4) über der Projectionsaxe, und zieht hierauf die Horizontalen 14′ — 2′ — M′ und 15′ — s′ — S′; diese schneiden die verschiedenen schiefen Linien in den Punkten 2′, M′, s′, S′, welche den horizontalen Projectionen 2, M, s, S entsprechen müssen. Nimmt man hierauf O′ ω' gleich O″ ω'' (Fig. 4), so ist die Gerade M′ ω' der Grundschnitt der obern Seitenfläche der Pfette auf der Vertikalebene O A, und muss durch den schon gefundenen Punkt S′ gehen, und die Ecke 3′ des Dreiecks M′ — 2′ — 3′ bilden, das eine der Grundflächen

des prismatischen Einschnittes im Gratsparren ist. Die Seite s' g' endlich des Dreieckes auf der Hauptstrebe muss dem Grundschnitte M' ω' parallel sein.

Auf ähnliche Art verschafft man sich die Horizontalen 16' — N', 17' — R' und den Grundschnitt N' R' ψ' der untern Seitenfläche derselben Pfette wieder mittelst des Profils (4). Die Einschnitte in den Gratsparren und in die vorstehende Kante der Strebe werden hier also durch die beiden Prismen

M' — 2' — 3' — N' — 4' — 5' und S' s' g' R' r' γ'

dargestellt.

Um die analogen Einschnitte auf der andern Seite der Vertikalebene O A zu erhalten, die von der Pfette (2) gemacht werden, verfährt man auf eine ganz ähnliche Art; aber die nöthigen Höhen müssen auf dem Profil (1) genommen werden, wie z. B. diejenigen, durch welche die Grundschnitte M' Q', N' P' (Fig. 7) der obern und untern Seitenflächen der neuen Pfette auf der Vertikalebene O A bestimmt werden. Der Leser wird auf der Figur leicht die beiden von der zweiten Pfette gemachten prismatischen Einschnitte erkennen, besonders wenn er bemerkt, dass die Seiten M' — 2' und N' — 4' diesem Einschnitte mit dem vorigen gemeinschaftlich sind, wenigstens in der Projection auf Fig. 7.

§. 957.

Fig. 7. Der **Tragklotz** des Gratsparrens wird hier von derselben Breite (in der auf O A senkrechten Richtung), wie der Sparren selbst, vorausgesetzt. Desshalb ist auch der zur Aufnahme der Pfette links in ihn gemachte Einschnitt ein Parallelogramm R' — 5' — 4' — 6', dessen erste Seite die Verlängerung von N' — 5' ist, und deren Gegenseite vom Punkte 4' selbst ausgeht; ihr Endpunkt 6' aber liegt ein wenig unterhalb des Punktes γ' auf der Strebe, weil letzteres Holzstück breiter als der Tragklotz ist. Der zweite Einschnitt im Tragklotze zur Aufnahme der Pfette (Fig. 2) ist wieder ein Parallelogramm, dessen eine Seite mit N' P' zusammenfällt.

§. 958.

Fig. 8. **Seitenprojection des Kehlsparrens und der dazu gehörigen Hauptstrebe.** Man construire ein rechtwinkliges Dreieck B' C' Z', dessen Höhe C' Z' gleich O' Z' (Fig. 1), bemerke auf der Projectionsaxe die Punkte b', K', 6', . . ., und ziehe Parallelen mit B' Z'. Den Kopf des Kehlsparrens construirt man leicht, nach dem, was in §. 942 gesagt worden, und noch leichter den der Hauptstrebe. Hierauf messe man auf dem Profil (1) die Höhen der Punkte M', N', θ', ϱ' über der Projectionsaxe, trage sie auf C' Z' (Fig. 8), und ziehe die Horizontalen m' — 20', n' — 22', so wie die schiefen Linien m' θ', n' ϱ', welche die Grundschnitte der obern und untern Grundfläche der Pfette auf der Vertikalebene B C sind. Zieht man alsdann die Horizontale q' — 12' und die Gerade 20' — 21' parallel mit dem Grundschnitte m' θ', so erhält man die beiden Dreiecke m' — 20' — 21', q' λ' — 12', welche aus dem Durchschnitte der obern Seitenfläche der Pfette (2) mit dem Kehlsparren und der Hauptstrebe entstehen. Die verschiedenen hier gefundenen Punkte müssen den analogen auf der Horizontalprojection entsprechen, was als Probe für die Richtigkeit der Construction dienen kann; der Zimmermann zieht aber mit Recht das oben angegebene directe Verfahren vor.

Zieht man ferner die Horizontale p' — 26' und die Gerade 22' — 23' parallel mit dem Grundschnitte n' ϱ', so erhält man die beiden Dreiecke n' — 22' — 23' und p' — 25' — 26', welche sich aus dem Durchschnitte der untern Seitenfläche der nämlichen Pfette ergeben, so dass die beiden Einschnitte, welche dieses Holzstück in den Kehlsparren und dessen Hauptstrebe macht, durch die beiden Prismen

$m' - 20' - 21' - n' - 22' - 23'$ und $q' \lambda' - 12' - p' - 25' - 26'$

dargestellt sind.

Was die Pfette unter den Sparren der Fig. 6 betrifft, welche auf dem Profil Fig. 5 in $m' n' t' u'$ projicirt ist, so findet man die durch sie gemachten Einschnitte in den Kehlsparren und seine Strebe auf ganz ähnliche Art; man merke sich aber, dass die Höhen, welche man nöthig hat, auf der Axe $C' Y'$ des Profils (5), und nicht mehr auf Fig. 1 genommen werden müssen.

§. 959.

Von dem Tragklotze unter dem Kehlsparren. Es wird vorausgesetzt, dieser Tragklotz habe in der auf B C senkrechten Richtung die nämliche Breite, wie der Kehlsparren; daher ist denn der Einschnitt für die Pfette der Dachfläche (6) ein Parallelogramm $u' - 23' - 24' - 25'$, dessen eine Seite der Grundschnitt $n' \varrho'$ der Pfette, und dessen andere die Verlängerung der dem Kehlsparren angehörigen Seite $22' - 23'$ ist. Die Ecke $24'$ aber muss etwas über der Ecke $26'$ des Dreieckes auf der Strebe liegen, weil letzteres Holzstück breiter ist, als der Tragklotz. Fig. 8.

Der Einschnitt eben dieses Tragklotzes für die Pfette des Profils (5) ist ein anderes Parallelogramm, das der Leser leicht auf der Figur herausfinden wird.

In Fig. 9 ist die Hauptstrebe auf eine mit ihrer obern Seitenfläche parallele Ebene projicirt. Es ist daselbst auch der Tragklotz mit seinen Einschnitten angegeben, und man bemerkt leicht, wie diese Projection aus Fig. 8 abgeleitet wird.

§. 960.

Projection auf die obere Sparrenebene und Aufklappung dieser letztern. Das Dreieck $O_2 D_2 A_2$ ist die Hälfte der Walmfläche; das Trapez $O_2 A_2 B_2 C_2$ stellt die Sparrenebene der Dachfläche dar, welche zwischen dem Gratsparren O A und dem Kehlsparren C B enthalten ist; das andere Trapez $B_2 C_2 I_2 F_2$ endlich ist die Sparrenebene des in Fig. 6 projicirten grössern Daches. Alle diese Figuren und auch die Sparren und Schifter werden auf ähnliche Art, wie beim geraden Walme, construirt (§. 917). Taf. 73. Fig. 11.

Was die Walmpfette betrifft, so projicire man die Punkte M'', N'' auf die obere Sparrenebene $A'' Z''$ (Fig. 4), und trage die Distanzen dieser Projectionen vom Punkte Z'', in Fig. 11 auf $O_2 M_2$, $O_2 N_2$. Hierauf ziehe man durch M_2 und N_2 Parallelen mit $A_2 D_2$; um aber den schiefen Schnitt dieser Pfette zu bestimmen, verfahre man auf folgende Art. Man projicire den Punkt α'' (Fig. 4) auf die obere Sparrenebene in δ'', messe die Distanz $Z'' \delta''$, und trage sie auf $O_2 \delta_2$, alsdann ist die Gerade $\delta_2 \alpha_2$ die Projection der äussern Linie $\delta \alpha$ der Streben, wie $d_2 a_2$ die Projection der innern Sparrenlinie ist. Ferner projicire man die Punkte a und α auf A D (Fig. 3), trage die Distanzen $A - 30$, $A - 31$ auf $A_2 D_2$ (Fig. 11), und errichte senkrechte Linien, deren Durchschnitte mit $d_2 a_2$ und $\delta_2 \alpha_2$ die Punkte a_2 und α_2 bestimmen, durch welche man, parallel mit $A_2 O_2$ die Linien $a_2 z_2$ und $\alpha_2 \zeta_2$ zieht. Diese letzteren Geraden sind die Projectionen der Durchschnitte der Vertikalebene O A mit den beiden, den Sparrenebenen parallelen Ebenen, zwischen welchen die Pfetten enthalten sind; mithin wird durch ihre Durchschnitte mit den durch M_2 und N_2 gezogenen Horizontalen das Parallelogramm bestimmt, das den schiefen Schnitt der Pfette darstellt. In der Anwendung kann man sich die Punkte z_2 und ζ_2 dadurch unmittelbar verschaffen, dass man die Punkte z'' und ζ'' auf $A'' Z''$ projicirt.

In Beziehung auf die Pfetten der anderen Dachflächen verfährt man ebenso; nur darf man die den

vorigen analogen Distanzen nicht mehr auf dem Profil (4) messen, sondern muss sie den Profilen (1) und (5) entnehmen.

Achtes Kapitel.

Hölzerne Treppe mit gewundenen Sargen.

§. 961.

Die Bedingungen im Allgemeinen, denen beim Bau einer Treppe, sei sie von Stein oder von Holz, genügt werden muss, sind in den §§. 835 ausführlich erörtert worden, und bedürfen daher keiner Wiederholung. Hier handelt es sich bloss um die Herstellungsart der Wange oder Sarge, d. h. desjenigen Holzstückes, in welchem, der Mauer des Treppenhauses gegenüber, die Häupter der Stufen befestigt werden.

Taf. 74. Fig. 1. Es sei A B C .. L M N die Curve, welche die Oeffnung in der Mitte der Treppe begrenzt. Sie besteht hier aus zwei parallelen Geraden, welche durch einen Halbkreis, an welchem sie Tangenten sind, mit einander verbunden werden. Man zeichne noch eine ähnliche Curve A_2 B_2 C_2 ... L_2 M_2 in durchaus gleicher Entfernung von der ersten, und denke sich zwei über diesen Curven errichtete Cylinder, so bilden diese die Nebenseitenflächen der Wange, während ihre obere und untere Seitenfläche von derselben Art ist, wie die aufsteigende, windschiefe Fläche, welche die vorspringenden Kanten der Stufen enthält. Es ist also vorerst diese windschiefe Fläche zu bestimmen.

§. 962.

Um die Lage der Stufenkanten auf der Horizontalebene darzustellen, zeichne man die Auftrittscurve a b c ... l m, welche in einer durchaus gleichen Entfernung von der Curve A B C ... L M (§. 835) sich befinden, und also auch aus zwei geraden, durch einen Halbkreis vereinigten Parallelen bestehen muss. Hierauf trage man auf diese Curve die gleichen Theile a b, b c, c d, d e, ... l m auf, deren gemeinschaftliche Grösse innerhalb der für die Stufenbreite aufgestellten Grenzen (§. 836) enthalten sein muss; auch ist es gut, einen der Theilpunkte in den Scheitel m des Halbkreises zu setzen. Ferner ziehe man durch alle Theilpunkte a, b, c .. Normalen A a, B b, ... auf die Curve A B C ... L M. Nun geht aus der Form dieser Curve hervor, dass die Normalen zuerst parallel sein, später aber in einem und demselben Punkte zusammenlaufen müssen. Daraus aber ergibt sich für die Stufenhäupter, welche an dem kreisförmigen Theile der Wange liegen, eine sehr bedeutende und plötzliche Verminderung ihrer Breite. Um nun diesem Uebelstande zu begegnen, vertheilt man jene unvermeidliche Verminderung auf eine grössere Anzahl Stufen, und lässt sie nicht plötzlich, sondern nach und nach eintreten, was man die Ausgleichung nennt.

Es sei B b die letzte Kante, welche man als Normale beibehalten will, und A a die nächstvorhergehende. Die Aufgabe besteht nun darin, die Länge B M in n Theile zu theilen, welche allmählig kleiner werden, und deren erster etwas kleiner sei als A B, während der letzte entweder grösser sein muss, als der zwischen den beiden Halbmessern O m und O l enthaltene Kreisbogen, oder diesem wenigstens an Grösse gleich.

Letztere Bedingung ist nothwendig, damit man bei der Ausgleichung nicht auf ein letztes Stufenhaupt gerathe, dessen Breite noch geringer ausfiele, als wenn man für die Kanten die normale Richtung beibehalten hätte. Man könnte die Aufgabe leicht durch Rechnung lösen, wenn man die Länge B M in Centimetern ausdrückte; es ist aber besser, folgendes graphische Verfahren anzuwenden, durch welches ein stetiges Gesetz dargestellt wird, das sich auch auf beliebig viele Zwischentheilungen anwenden lässt.

§. 963.

Man zeichne zwei beliebige Gerade A X, A Y (Fig. 8), und nehme auf der ersten derselben n + 1 unter sich gleicher Theile von beliebiger Grösse:

A b, b c, c d, d e, e f, f g, g l, l m.

Auf die andere Gerade trage man die zwei Längen A B und B M der Curve A B C, .. L M (Fig. 1). *) Zieht man hierauf die beiden Geraden B b und M m, so schneiden sich diese in einem oberhalb A Y liegenden Punkte S, weil A B M kleiner als (n + 1) A B ist. Wenn man nun die Transversalen S c, S d, S e, ... zieht, so theilen diese die A M in immer kleiner werdende Theile, nämlich

$$AB > BC > CD > DE > EF \ldots$$

wie leicht aus der Vergleichung einiger Dreiecke zu beweisen ist. Nun aber muss man untersuchen, ob der letzte Theil L M mindestens dem zwischen den Halbmessern O m und O l enthaltenen Kreisbogen gleich ist (§. 962); ist diess nicht der Fall, so muss man die Ausgleichung auf eine grössere Zahl von Stufen vertheilen. Unrichtig wäre es, jener Bedingung durch eine Veränderung des Winkels Y A X genügen zu wollen; denn der Calcul zeigt, dass, wenn dieser Winkel sich ändert, der Punkt S eine andere Lage annimmt, während er jedoch stets auf einem Kreise bleibt, dessen Halbmesser S ω mit A Y parallel ist; dass aber die Theilpunkte auf A M unverändert dieselben bleiben.

Wenn der Durchschnitt S der beiden Geraden B b und M m zu weit hinausfiele, so dürfte man nur die Linie b′ m′ parallel mit A X ziehen, sie, wie b m, in n gleiche Theile theilen, und die zusammen gehörigen Theilpunkte, wie c′ und c, d′ und d, e′ und e, ... durch Gerade verbinden. — Man könnte die Ausgleichung ferner auch durch die beim Steinschnitte (Taf. 63) angewendete Methode ausführen.

§. 964.

Alle auf Fig. 8 gefundenen Distanzen B C, C D, D E müssen nun auf die Curve A B C ... L M (Fig. 1) aufgetragen werden, und zieht man hierauf die Geraden C c, D d, E e, F f, ..., so erhält man die horizontalen Projectionen der vorspringenden Stufenkanten. Diese Geraden bilden, verlängert, eine gebrochene Linie, die man einer stetigen Curve unendlich nahe bringen könnte, wenn man die Abschnitte b c, c d, d e, ... der Fig. 8 auf's Neue theilte u. s. w. Aber die hier angegebenen Kantenprojectionen reichen schon hin, die Curve x y zu zeichnen, welche alle jene Geraden umhüllt, in x einen Wendepunkt, und die letzte normale Kante B b zur Asymptote hat. Diese Curve, welche man zur Erzeugung der Treppenfläche nöthig hat, ersetzt die Evolute, deren man sich bei den steinernen Treppen auf den Tafeln 61 und 62 bedient hat.

§. 965.

Man denke sich nun auf dem vertikalen Cylinder, dessen Basis die Auftrittscurve a b c d .. l m ist,

*) Hier wurden des beschränkten Raumes wegen die Längen A B und B M in verkleinertem Massstabe genommen, so dass also die Abschnitte B C, C D, ..., die man erhält, nicht diejenigen sind, die man auf Fig. 1 tragen muss. Durch Fig. 8 soll also dem Leser nur eine Andeutung des graphischen Verfahrens, dessen man sich zur Ausgleichung bedient, gegeben werden.

eine Schraubenlinie gezeichnet, d. h. eine Curve, deren vertikale Ordinaten zu den auf jener Basis genommenen Abscissen das constante Verhältniss $\frac{H}{G}$ der Stufenhöhe zur Stufenbreite habe. Diese Schraubenlinie

$$(i\,a\,b\,c\,d \ldots l\,m,\quad i\,A''\,B'' \ldots)$$

wird zwar zuerst geradlinig sein, weil ein Theil der Basis gerade ist; nichts desto weniger aber entspricht sie in ihrem ganzen Laufe der oben angegebenen Relation. Ferner denke man sich eine stets horizontale Gerade, welche, indem sie über jene Schraubenlinie hinstreift, zuerst normal auf dem vertikalen Cylinder A B C . . L M, von der Lage B b an aber Tangente an dem vertikalen Cylinder x y bleibt, so wird diese Gerade eine aufsteigende windschiefe Fläche erzeugen (die bis B b eben ist), auf welcher alle, bereits auf A a, B b, C c, . . . projicirten vorspringenden Treppenkanten liegen.

Hienach ist es leicht, auf einer mit A B C parallelen Vertikalebene X Y (Fig. 2) die Durchschnitte der Wange mit den horizontalen und vertikalen Seitenflächen der Stufen zu finden, indem man nur auf dieser Vertikalebene Horizontalen $A''B'$, $B''C'$, $C''D'$, . . . in den Höhen 2 H, 3 H, 4 H, . . . ziehen, und sie durch die in den Punkten A_2, B_2, C_2, D_2, . . . der innern Wangenfläche errichteten Vertikalen begrenzen darf. Man bemerke hier, dass die Punkte A'' und B'' auf die Projection der geradlinigen Schraubenlinie $i''\,A''\,B''$. . fallen müssen; nicht so aber die Punkte C'', D'', . . . wegen der durch die Ausgleichung veränderten Richtung der Stufenkanten. *)

§. 966.

Taf. 74. Fig. 2. Die obere Wangenfläche ist nichts Anderes, als die vorige, um die Grösse $B''\,6$ erhöhte, windschiefe Fläche; folglich ist sie anfangs eben, und projicirt sich auf eine mit der geradlinigen Schraubenlinie $i''\,A''\,B''$ parallele Gerade $6\,\alpha \ldots$; vom Punkte 6 an aber wird sie windschief, und ist von zwei Curven $6\,\gamma\,\delta\,\varepsilon, \ldots$, $6\,\gamma_2\,\delta_2\,\varepsilon_2 \ldots$ begrenzt, die man auf folgende Art construirt. Man bemerke, dass die Erzeugenden dieser neuen windschiefen Fläche, welche sich, wie die der ersten, horizontal auf $C\,C_2$, $D\,D_2$, . . . projiciren, auf der Vertikalebene X Y durch die Horizontalen $\gamma\,\gamma_2$, $\delta\,\delta_2$, . . . dargestellt werden, welche man um die constante Grösse $B''\,6$ über den Punkten C'', D'', . . . genommen hat. Man darf also nur auf diese Horizontalen die Punkte projiciren, in welchen die Geraden $C\,C_2$, $D\,D_2$, . . . von den vertikalen Cylindern A B C D . . ., $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$. . geschnitten werden. Auch bemerke man auf denselben Horizontalen die Durchschnittspunkte derselben Erzeugenden mit dem mittlern Cylinder $A_3\,B_3\,C_3\,D_3 \ldots$, weil man gleich nachher die mittlere Curve $6\,\gamma_3\,\delta_3\,\varepsilon_3 \ldots$ auf der obern Wangenfläche nöthig haben wird.

Die untere Wangenfläche ist identisch mit der obern; die Grösse $B'\,6'$, um welche man sie unterhalb der untern Stufenfläche nimmt, ist gewöhnlich etwas grösser als $B''\,6$, damit die zur Aufnahme der Stufenhäupter in die Wange gemachten Einschnitte noch Holzmasse genug für den gehörigen Widerstand unter sich lassen. Man ziehe durch $6'$ eine Gerade $6'\,\alpha'$ parallel mit $6\,\alpha$, und trage alsdann auf die schon gezogenen Vertikalen die Längen

$$\gamma\,\gamma',\quad \gamma_2\,\gamma'_2,\quad \gamma_3\,\gamma'_3,\quad \delta\,\delta',\quad \delta_2\,\delta'_2,\quad \delta_3\,\delta'_3, \ldots$$

*) Gewöhnlich fügt man dem Vordertheile jedes Auftrittes ein kleines cylindrisches Gesimse bei, wie das bei der ersten Stufe angedeutete; um aber die Einfügung des Stufenhauptes in die Wange zu vereinfachen, verlängert man dieses Gesimse nicht in's Innere der Wange hinein. Auch ist es räthlich, bei der ersten Distribution der Stufen auf der Horizontalebene das Gesimse gar nicht zu berücksichtigen, um sich keinen Fehlern auszusetzen; nachher kann man es den Profilen beifügen, welche zur Behauung der Stufen dienen.

alle gleich der vertikalen Dimension $6\,6'$ der Wange, so erhält man die Grenzcurven und die mittlere Curve der untern Wangenfläche.

§. 967.

Da, der Holzersparniss wegen, die Wange aus mehreren Holzstücken zusammengesetzt werden muss, besonders derjenige Theil derselben, welcher das Wendelstück heisst, und auf GLM projicirt ist, so wird angenommen, in H finde eine Verbindung zweier solcher Holzstücke statt, und eine andere in K. Für die erste werden die Fugen parallel mit der Ebene genommen, welche in H normal auf der mittlern Curve steht. Diese mittlere Curve ist der Durchschnitt des mittlern Cylinders $A_3\,B_3\,C_3\ldots$ mit einer windschiefen Fläche, die der Treppenfläche identisch, aber in gleicher Entfernung von der obern und untern Wangenfläche genommen ist. Die leitende Schraubenlinie dieser mittlern windschiefen Fläche ist also die Linie

$$(t\,a\,b\,c\,d\ldots.\,l\,m,\ t'\,a'\,b'\ldots.),$$

deren erster Theil eine mit $i''\,A''\,B''$ parallele und durch die Mitte b' der Wangenhöhe $6\,6'$ gezogene Gerade ist.

§. 968.

Man suche nun die Berührungsebene dieser mittlern windschiefen Fläche. Um vorerst die Vertikalprojection H' desjenigen Punktes dieser Fläche zu finden, der in H projicirt ist, ziehe man die Tangente H y an den Leitcylinder x y; da nun diese Erzeugende die Schraubenlinie in dem Punkte h schneidet, den man in h' auf $t'\,a'\,b'\ldots$ projicirt, so darf man nur noch die Horizontale $h'\,H'$ ziehen, auf welcher der Punkt H sich in H' projiciren wird. Man hätte einfach auch die Mitte des Stückes der Vertikalen $H\,H'$ nehmen können, welches zwischen den beiden mittleren Curven der Wangenflächen enthalten ist. Nach den §§. 568 und 569 der Darstellenden Geometrie muss man nun ein Anschliessungs-Paraboloid zu Hilfe nehmen, dessen beide Leitlinien die Gerade $(h\,t,\ h'\,t')$ und die Vertikale y sind; denn dieses Paraboloid hat offenbar die nämlichen Berührungsebenen, wie die windschiefe Fläche an den Punkten h und y (§. 842), und folglich ist auch am Punkte $(H,\ H')$ die Berührungsebene gemeinschaftlich. Ist nun die horizontale Erzeugende $(H\,y,\ H'\,h')$ bei ihrem Hingleiten über die oben angegebenen Leitlinien so weit gekommen, dass sie durch den Fusspunkt $(t,\ t')$ geht, so hat sie offenbar die Lage t y in der Horizontalebene: schneidet man aber diese letzte Lage und die erste durch die mit beiden Leitlinien parallele Vertikalebene $A_3\,B_3\,H$, so erhält man hiedurch den geradlinigen (D. G. §. 539) Schnitt $(T\,H,\ T'\,H')$ des Paraboloids; und folglich bestimmt diese Gerade in Verbindung mit $(H\,y,\ H'\,h')$ die Berührungsebene des Paraboloids, welche somit auch die Berührungsebene an dem Punkte $(H,\ H')$ der windschiefen Fläche ist. Ohne aber die Grundschnitte dieser Ebene zu suchen, bemerke man, dass eine jener beiden Geraden, nämlich $(T\,H,\ T'\,H')$, ganz in der Vertikalebene $A_3\,B_3$ des mittlern Cylinders liegt, welcher die mittlere windschiefe Fläche in der Curve schneidet, an welche man eine Tangente ziehen will; folglich ist $(T\,H,\ T'\,H')$ diese Tangente, und also sind $H'\,R'$ und $R'\,R$ die Grundschnitte der Normalebene auf der mittlern Curve der Wange.

§. 969.

Statt nun bloss eine einzige Normalfuge zu construiren, bei welcher einiges Herabgleiten des Holzstückes nicht ganz verhütet werden könnte, trage man auf die Tangente $H'\,T'$, links und rechts von H, zwei gleiche Distanzen (jede von 2—3 Centimetern), und lege durch deren Endpunkte zwei mit $H'\,R'\,R$ parallele Ebenen, welche noch fast normal auf der Wangenaxe sein werden. Diese beiden Ebenen, welche nur auf

einer Seite der Tangente, die eine über, die andere unter derselben, verlängert werden dürfen, bilden die beiden Normalfugen der Verbindung; und bezeichnet man die Punkte 5, 6, 7, in welchen sie die drei Curven $\beta \gamma \delta \ldots$, $\beta \gamma_2 \delta_2 \ldots$, $\beta \gamma_3 \delta_3 \ldots$ der obern Wangenfläche schneiden, so wie ihre Durchschnittspunkte mit den Curven der untern Wangenfläche, so ergeben sich daraus auf der Horizontalebene die beiden Curven, durch welche jene Normalfugen begrenzt werden: ausserdem sind sie noch durch eine ebene Fläche getrennt, welche durch das unschraffirte Rechteck 1 — 2 — 3 — 4 dargestellt ist. Manchmal fügt man dieser Verbindung noch zwei Zapfen bei, welche auf der Vertikalebene dargestellt sind. Die Festigkeit des Verbandes hängt aber hauptsächlich davon ab, dass die Normalfugen des Wangenstückes und des Wendelstückes sich recht fest an einander anschmiegen, was durch eiserne Bänder, die man auf den oberen, wie auf den unteren Flächen anlegt, oder auch durch eiserne Bolzen mit Schrauben befördert wird. Durch andere, horizontale Bolzen, welche in die Mauer des Treppenhauses eingelassen sind, wird die Wange fest mit dieser Mauer verbunden.

§. 970.

Um die Verbindung der beiden Wendelstücke in K zu bilden, nehme man eine Vertikalebene (Fig. 3) an, welche zugleich Berührungsebene an dem Punkte m der Auftrittscurve sei, und deren Projectionsaxe m z in beliebiger Höhe gedacht werden kann, z. B. 3 H unter dem Punkte K der mittlern Wangencurve. Nimmt man hierauf die Vertikale m K′ gleich drei Stufenhöhen, so ist K′ die Projection der Erzeugenden M K m, welche als der mittlern Fläche angehörig betrachtet wird, während die entsprechenden Erzeugenden auf der obern und untern Wangenfläche in den Punkten μ' und μ'' projicirt sind, die man um die Hälfte der vertikalen Dimension $\beta\, \beta'$ (Fig. 2) über und unter K′ genommen hat. Zieht man daher ober- und unterhalb μ' und μ'' verschiedene Horizontalen in den Entfernungen H, 2 H, ..., und projicirt auf eben diese Horizontalen die Punkte G, G_2, G_3, L, L_2, L_3, ..., so kann man die Curven

$$\gamma' \lambda' \mu' \ldots, \quad \gamma'_2 \lambda'_2 \mu'_2 \ldots, \quad \gamma'_3 \lambda'_3 \mu'_3 \ldots, \quad \gamma'' \lambda'' \mu'' \ldots, \text{ u. s. w.}$$

zeichnen, welche die Grenz- und mittleren Curven der obern und untern Wangenfläche, in der Nähe des Punktes (K, K′), darstellen.

§. 971.

Die Tangente K′ z′ der mittlern Schraubenlinie erhält man bekanntlich, wenn man die Subtangente m z gleich 3 G oder gleich 3 mal dem Bogen m l nimmt, weil die Ordinate m K′ gleich 3 H ist. Lässt man also die Gerade (M K m, K′), während sie immer horizontal bleibt, über die Tangente K′ z und die Vertikale x hingleiten, so erhält man ein Anschliessungs-Paraboloid, das zu einer zweiten Erzeugenden des nämlichen Systems die in der Horizontalebene liegende Gerade x z hat. Schneidet man nun dieses Paraboloid durch die Vertikalebene K θ, welche beiden Leitlinien parallel ist, so erhält man den geradlinigen Schnitt (K θ, K′ θ'); diese Gerade aber bestimmt in Verbindung mit der Erzeugenden (M K m, K′) die Berührungsebene des Paraboloids, und mithin auch die der mittlern windschiefen Fläche an dem Punkte (K, K′). Da man aber diese Berührungsebene durch diejenige schneiden muss, welche den mittlern Cylinder in K berührt, um die Tangente an der mittlern Curve zu erhalten, so sieht man leicht ein, dass dieser Durchschnitt die Gerade (K θ, K′ θ') und diese also die verlangte Tangente ist.

Nun lege man die Normalebene K′ S′ senkrecht auf diese Tangente, und links und rechts von ihr, in einer Entfernung von 2—3 Centimetern, lege man, parallel mit K′ S′, die beiden Normalfugen, welche, indem sie die schon gezeichneten $\gamma' \lambda' \mu'$, $\gamma'_2 \lambda'_2 \mu'_2 \ldots$ schneiden, auf der Horizontalebene die beiden Curven 15 — 16 — 17 und 18 — 19 — 20 als die Grenzlinien jener Fugen bestimmen.

§. 972.

Seitenprojection des ganzen Wendelstückes. Die Projectionen Fig. 2 und 3 bestimmen in Verbindung mit Fig. 1 zwar wohl die Gestalt des Wendelstückes vollständig; da sie aber auf verschiedenen Vertikalebenen ausgeführt sind, so können sie nicht unmittelbar zur Behauung dieses Stückes dienen; man muss es daher im Ganzen auf eine Vertikalebene projiciren, welche mit den Seitenflächen P Q und U V des Parallelepipeds, aus welchem man das Wendelstück herstellen will, parallel ist. Diese Parallelen P Q und U V muss man in solcher Richtung nehmen, dass sie die ganze Horizontalprojection des Wendelstückes in möglichst geringer Breite zwischen sich fassen; die beiden anderen Seiten P U und Q V des Rechteckes dürfen aber nicht jetzt schon gezeichnet werden, weil ihre Lage von der Projection (Fig. 4) abhängt, welche jetzt gezeichnet werden soll.

Nachdem man im Punkte H eine Senkrechte auf die neue Projectionsaxe P Q errichtet hat, nehme man die Höhe Y'' H'' gleich Y H' der Fig. 2, und zeichne die Horizontale H'' X''. Ferner projicire man in T'' den Fusspunkt T der Tangente an der mittlern Wangencurve, so wird diese Tangente hier die Gerade H'' T'' sein. Eben so findet man die Normale H'' R'', indem man den Punkt R' zuerst in R, und diesen sofort in R'' projicirt. Diese beiden Geraden aber können für mehrere Fugenkanten, die ihnen parallel sein sollen, als Probe dienen. Nachdem man ferner auf Fig. 2 die Höhen der Punkte 2 und 3 in Beziehung auf H' gemessen, ziehe man auf Fig. 4, in denselben Höhen, über und unter H'', die Horizontalen 1 — 2, 3 — 4, auf welche die Punkte 1, 2, 3, 4 der Horizontalebene projicirt werden müssen. Hierauf vollende man das Parallelogramm der Berührungsfläche, von welcher zwei Seiten mit der Tangente H'' T'' parallel sein müssen. Was die Normalfläche betrifft, so nehme man die 3 Punkte der Curve 5 — 6 — 7 auf den Vertikalen, die man in den entsprechenden Punkten der Fig. 1 errichtet hat, und gebe ihnen über der Horizontallinie X'' H'' die nämlichen Höhen, welche die Punkte 5, 6, 7 der Fig. 2 über der Linie H' X' haben; und zieht man nun die Geraden 3 — 5, 4 — 7, so müssen sie der Normalen H'' R'' parallel sein. Auf eine ähnliche Art verfährt man, um die Curve 8 — 9 — 10 der untern Normalfuge zu erhalten. Taf. 74. Fig. 4.

§. 973.

Man ziehe ferner die Horizontale E'' F'' (Fig. 4) in einer Höhe über H'' X'' gleich der Höhendifferenz, welche auf Fig. 2 zwischen den analogen Linien besteht, und errichte aus dem Punkte F_2 die Vertikale F' F'' gleich H. Hierauf ziehe man noch eine Horizontale F'' G', und errichte aus G_2 die Vertikale G' G'' = H; ferner ziehe man die Horizontale G' L' und aus L_2 die Vertikale L' L'' = H. Hiedurch sind auf der innern Wangenfläche die Einschnitte zur Aufnahme der Stufenhäupter bestimmt.

Nun verlängere man die vorigen Vertikalen um die Grössen $F''\varphi_2$, $G''\gamma_2$, $L''\lambda_2$, die alle dem Abschnitte B'' *6* auf Fig. 2 gleich sind; ferner ziehe man die Horizontalen $\varphi_2\varphi$, $\gamma_2\gamma$, $\lambda_2\lambda$, und projicire auf diese die Punkte F, G, L der äussern Wangenfläche, so erhält man hiedurch Punkte für die Zeichnung der beiden oberen Curven $5\,\varphi\,\gamma\,\lambda$ und $7\,\varphi_2\,\gamma_2\,\lambda_2$ des Wendelstückes. Die unteren Curven $8\,\varphi'\,\gamma'\,\lambda'\ldots$ und $10\,\varphi'_2\,\gamma'_2\,\lambda'_2$ erhält man aus den ersteren mittelst der Vertikalen $\varphi\varphi'$, $\varphi_2\varphi'_2$, $\gamma\gamma'$, ..., die man alle gleich der Höhe *6 6'* der Wange genommen hat.

§. 974.

Was die zweite Verbindung betrifft, so muss zuerst die Lage des Punktes K'' (Fig. 4) bestimmt werden, welcher auf einer in K errichteten Vertikale liegt, und zwar in einer Höhe über dem Auftritte L'' M',

welcher der Distanz B′ b′ (Fig. 2) gleich ist; denn dieser Punkt (K, K″) gehört der mittlern windschiefen Fläche an, deren Leitcurve die Schraubenlinie (t a b c . . l m, t′ a′ b′ . .) ist. Nachdem man ferner auf Fig. 3 die Höhendifferenz der Punkte 12 und 13 in Beziehung auf K′ gemessen hat, zeichne man in denselben Höhen über und unter K″ zwei Horizontalen, auf welche man sofort die Punkte 11, 12, 13, 14 der Fig. 1 projicirt; ferner müssen die Punkte M und M_2 auf die Horizontale K″ x″ projicirt werden, wodurch man in den Stand gesetzt wird, die beiden Ellipsenbögen zu zeichnen, welche diese Berührungsfläche begrenzen. Was die Curve 15 — 16 — 17 der Normalfläche betrifft, so nimmt man diese drei Punkte in Höhen über der Horizontalen K″ x″, welche denen der analogen Punkte auf Fig. 3 über K′ x′ gleich sind; eben so verfährt man in Beziehung auf die Curve 18 — 19 — 20 der untern Normalfläche. Um sich endlich Zwischenpunkte für die Seitencurven 11 — 17, 12 — 15, 14 — 20, 13 — 18 zu verschaffen, welche sämmtlich Ellipsen sind, darf man nur die Normalfugen der Fig. 3 und die beiden vertikalen Cylinder L M N, $L_2 M_2 N_2$ durch verschiedene Horizontalebenen schneiden, wodurch man Punkte erhält, welche auf dieselbe Art construirt werden, wie 15, 16 und 17.

§. 975.

Fig. 4 u. 5. Nun zeichne man ein Rechteck P′ Q′ Q″ P″, welches die Projection (4) auf dem möglich kleinsten Raume umfasst; diess ist alsdann die Projection eines zwischen den Vertikalebenen P Q, U V enthaltenen Parallelepipeds, aus welchem das Wendelstück hergestellt werden kann. Man darf jetzt nur noch die Durchschnitte der beiden vertikalen Cylinder E F G L M und $E_2 F_2 G_2 L_2 M_2$ mit der obern und untern Seitenfläche dieses Parallelepipeds suchen, welche beide in Fig. 4 auf die Geraden P′ Q′ und P″ Q″ projicirt sind. Beide Flächen sollten eigentlich, jede besonders, aufgeklappt werden; da sie aber parallel sind, und daher die Cylinder in identischen Curven schneiden, so kann man, der Abkürzung wegen, die erste Seitenfläche auf das Rechteck $P' Q' V_3 U_3$ aufklappen, und hierauf die zweite Seitenfläche P″ Q″ in $P_2 Q_2$ versetzen, und in $P_2 Q_2 V_4 U_4$ aufklappen.

Man verlängere zu diesem Zwecke die Vertikalen, welche die Erzeugenden des Wangencylinders darstellen, bis zu den Punkten

$$f \text{ und } f_2, \quad g \text{ und } g_2, \quad l \text{ und } l_2, \ldots,$$

und errichte in denselben Senkrechte auf P′ Q′, auf welche man die Längen

$$f f_3 \text{ und } f_2 f_4, \quad g g_3 \text{ und } g_2 g_4, \quad l l_3 \text{ und } l_2 l_4$$

so gross nimmt, als die Distanzen der Linie P Q von den verschiedenen Punkten

$$F \text{ und } F_2, \quad G \text{ und } G_2, \quad L \text{ und } L_2, \ldots;$$

hierauf kann man die verlangten Durchschnitte

$$f_3 g_3 l_3 m_3 \varrho_3 \text{ und } f_4 g_4 l_4 m_4 \varrho_4$$

zeichnen, welche aus zwei Geraden und zwei Ellipsen bestehen, deren Anschliessungspunkte π_3 und π_4, so wie die Scheitel ϱ_3 und ϱ_4 leicht zu finden sind; denn was die letzteren betrifft, so darf man nur durch den Punkt O (Fig. 1) einen mit U V parallelen Durchmesser ziehen.

Da die Ränder des Holzstückes fehlerhafte Stellen enthalten oder nicht gut abgeviert sein können, so messen die Zimmerleute die vorhin genannten Distanzen nicht von P Q, sondern von einer mittlern Linie u v an, welche nach Belieben auf der Horizontalprojection gezogen wird, und auch auf Fig. 5 bemerkt werden muss. Letztere Projection wird übrigens von den Zimmerleuten nicht aufgezeichnet; denn diese arbeiten nicht nach Brettungen, wie die Steinhauer, sondern führen die auf Fig. 5 bezüglichen Operationen auf dem Holzstücke selbst aus, wie gleich gezeigt werden soll.

§. 976.

Ausführung des Wangenstückes in Holz. Das parallelepipedische Holzstück wird auf eine Unterlage über die Projection (4) gelegt, und zwar auf seine Nebenseitenfläche, so dass seine obere und untere Seitenfläche in die Vertikalebenen $P' Q'$ und $P'' Q''$ fallen. Bringt man nun das Bleiloth über die Punkte f, f_2, g, g_2, ..., so kann man, indem man in jeder solchen Lage einen oder zwei Punkte nach der Richtung des Fadens absticht, die Geraden $f f_3$, $f_2 f_4$, .. auf die Seitenfläche selbst zeichnen, und alsdann die Distanzen der Punkte F und F_2 (Fig. 1) von der mittlern Linie $u v$, die vorher auf das Holzstück gezeichnet werden musste, auf jene Geraden tragen. Auf ähnliche Art verfährt man in Beziehung auf die untere, auf $P'' Q''$ projicirte Seitenfläche, indem man das Bleiloth über die Punkte g_5, g_6, l_5, l_6, .. bringt.

§. 977.

Hat man auf diese Art auf die obere und untere Seitenfläche die Durchschnitte der beiden Cylinder gezeichnet, so sägt man das Holzstück nach diesen Umrissen der concaven und convexen Seite aus, und vervollkommnet nachher den Schnitt durch einige andere Werkzeuge, bis man ein Lineal auf die ausgeführte Fläche genau anlegen kann, indem man es durch die Richtpunkte f_3 und f_5, g_3 und g_5, ... gehen lässt. Auf diese Erzeugenden $f_3 f_5$, $g_3 g_5$, ... nun trägt man die Längen Fig. 6.

$$f_3 \varphi_3 \text{ und } f_3 \varphi_5, \quad g_3 \gamma_3 \text{ und } g_3 \gamma_5, \quad l_3 \lambda_3 \text{ und } l_3 \lambda_5,$$

die man mittelst des Zirkels der Fig. 4 entnommen hat, und zeichnet sodann auf den concaven Cylinder die beiden Curven $\varphi_3 \gamma_3 \lambda_3$ und $\varphi_5 \gamma_5 \lambda_5$. Eben so zeichnet man die analogen Curven auf die convexe cylindrische Fläche. Jetzt wird Alles, was die oberen und unteren Curven überragt, weggenommen, und um nun die beiden windschiefen Flächen des Wendelstückes auszuführen, lässt man ein Lineal über die Richtpunkte φ_3 und φ_4, φ_5 und φ_6, ... hingleiten. Hiedurch stellt sich endlich das Wendelstück in der durch Fig. 7 angedeuteten Form dar.

§. 978.

Der Zimmermann muss auch, so lange das Holzstück noch seine parallelepipedische Form hat, die Geraden $X_2 X_3$, $Y'_2 Y_4$ (Fig. 5) ziehen, welche die Durchschnitte der obern und untern Seitenfläche mit der Horizontalebene des Auftrittes $G'' L'$ darstellen. Denn diese Geraden dienen ihm später dazu, auf der convexen Cylinderfläche den Durchschnitt dieses Auftrittes zu bemerken, und folglich den Ort für den Einschnitt zu bestimmen, der das Stufenhaupt aufnehmen soll. Eben dieses Durchschnittes kann er sich auch bedienen, um auf Fig. 4 die Höhen der Punkte γ, γ_2, λ, .. zu messen, welche auf das ausgesägte Holzstück getragen werden müssen, um daselbst als Richtpunkte zu dienen. Auf diese Art erhält man sie genauer, als wenn man ihre Entfernungen vom obern Rande $P' Q'$ des Holzstückes ausgemessen hätte, da dieser Rand schadhafte Stellen enthalten kann.

Dieses Beispiel mag hinreichen, um dem Leser eine Vorstellung von der Ausführung solcher Holzstücke zu geben, welche krumme Seitenflächen haben. Das Nähere des praktischen Verfahrens und die Handgriffe, welche dabei angewendet werden müssen, lernt er am besten auf dem Zimmerplatze selbst kennen.

Anhang.

A. Von den Curven mit mehreren Mittelpunkten (zu §. 607).

§. 979.

Taf. 34. Fig. 10. Ein **Korbbogen** *(anse de panier)* ist eine aus drei sich an einander anschliessenden Kreisbögen A M, M B m, m D bestehende krumme Linie. Die Mittelpunkte dieser Bögen müssen auf den durch die Aufgabe bestimmten Axen O A und O B liegen, damit die Tangente am Anlaufe A oder D vertikal und am Schlusse horizontal sei.

Setzt man

$$OA = a,\quad OB = b,\quad CA = r,\quad C'B = R,$$

so erhält man, aus dem Dreiecke C O C′, für die Unbekannten R und r folgende einzige Gleichung:

$$(1)\qquad (R-r)^2 = (R-b)^2 + (a-r)^2,\quad \text{oder } R = \frac{a^2+b^2-2ar}{2(b-r)},$$

in welcher man einen der Halbmesser beliebig annehmen kann, so dass man also unendlich viele Auflösungen erhält, wenn man nicht, um der Curve eine wohlgefälligere und stetigere Form zu geben, noch irgend eine andere Bedingung beifügt.

§. 980.

Erste Methode. Gewöhnlich soll der Bogen A M am Anlaufe 60° betragen. In diesem Falle wird das gleichschenklige Dreieck C C′ c gleichseitig, so dass also der Bogen M B m auch 60° erhält. Setzt man nun

$$OC = x,\quad \text{also } r = a - x \text{ und } R = a + x,$$

so wird die Gleichung

$$(1)\qquad x^2 - (a-b)x = \frac{(a-b)^2}{2},\ \text{also}$$

$$(2)\qquad x = \frac{a-b}{2} + \frac{a-b}{2}\sqrt{3}.$$

Es ist leicht einzusehen, warum der negative Werth von x unberücksichtigt bleibt, und was den Werth (2) betrifft, so lässt er sich auf folgende Art construiren. Man nehme $OF = a - b$, und $OG = \frac{1}{2}OF$; ferner beschreibe man über G F einen Halbkreis, der die vertikale Axe in H schneide, und trage die Sehne G H von G nach C, so ist O C der Werth von x. Nun construire man über A C ein gleichseitiges Dreieck A M C, dessen verlängerte Seite M C den Mittelpunkt C′ und den Halbmesser C′M für den mittlern Bogen bestimmen wird.

§. 981.

Bemerkung. Einige Schriftsteller haben folgende kürzere Regel gegeben, welche zwar nur **annähernd richtig**, aber für kleinere Gewölbebögen oder für Gesimse tauglich ist. Man füge der Distanz $OF = a - b$ das Drittheil ihrer Länge an, weil O C nahezu gleich $\frac{4}{3}(a-b)$.

Man hat nämlich $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{27}{9}} = \frac{5}{3}$ bis auf 0,006 beinahe;

also
$$x = \frac{a-b}{2}(1+\sqrt{3}) = \frac{4}{3}(a-b),$$
ein Werth, der um ungefähr 0,003 der Differenz $(a-b)$ zu klein ist.

§. 982.

Zweite Methode. Soll das Verhältniss von R zu r sich so viel als möglich der Einheit nähern, oder ein Minimum werden, so suche man aus Gleichung (1)
$$\frac{R}{r} = \frac{a^2+b^2-2ar}{2(br-r^2)},$$
nehme das Differential dieses Ausdruckes, und setze es gleich Null, wodurch man erhält:
$$ar^2-(a^2+b^2)r+\tfrac{1}{2}b(a^2+b^2) = 0.$$
Combinirt man aber diesen Ausdruck mit der Gleichung (1), so ergeben sich folgende Werthe:
$$(3) \qquad r = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}}\left[\sqrt{\frac{a^2+b^2-(a-b)}{2}}\right]$$
$$(4) \qquad R = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b}}\left[\sqrt{\frac{a^2+b^2+(a-b)}{2}}\right]$$
Der eine Werth von r blieb unberücksichtigt, weil durch ihn $r > b$ und mithin $R < a$ geworden, so dass also die beiden Kreise sich erst jenseits des Schlusses an einander angeschlossen hätten, was für Gewölbe untauglich gewesen wäre. Die Formeln (3) und (4) lassen sich, so verwickelt sie auch aussehen, doch leicht construiren. Man ziehe die Sehne AB, und ziehe $BE = a-b$ von ihr ab; alsdann errichte man auf der Mitte F des Restes AE eine Senkrechte FCC', so bestimmt diese die Mittelpunkte C, C' beider Bögen AM und MB. Um diese Construction zu rechtfertigen, bemerke man, dass Taf. 34. Fig. 11.
$$AF = \sqrt{\frac{a^2+b^2-(a-b)}{2}}, \quad BF = \sqrt{\frac{a^2+b^2+(a-b)}{2}},$$
und dass man also aus den ähnlichen Dreiecken AOB, AFC, BFC' erhält:
$$AC = AF \cdot \frac{AB}{AO}, \quad BC' = BF \cdot \frac{AB}{BO},$$
welches die Werthe von r und R in den Formeln (3) und (4) sind.

Diese elegante Construction ist aus dem *Traité de la construction des ponts* von Gauthey, Vol. I, pag. 248; nur sind die Werthe von R und r daselbst in einer Form geschrieben, die sich nicht unmittelbar zur graphischen Construction eignet. Daher kommt es ohne Zweifel, dass Audoy in seiner vortrefflichen Abhandlung über den Druck der Gewölbe jene Formeln falsch genannt hat. Sie sind ganz richtig, nur muss man den Nenner und Zähler mit einem gewissen Factor multipliciren, um sie mit den oben angeführten (3) und (4) identisch zu machen. Darin aber hat Audoy Recht, wenn er sagt, die vorige Auflösung liefere nicht diejenigen Werthe von R und r, welche so wenig als möglich von einander verschieden seien. Er gibt für diesen Fall folgende Auflösung.

§. 983.

Dritte Methode. Soll die Differenz der Halbmesser R und r ein Minimum sein, so suche man aus (1) den Ausdruck

$$R - r = \frac{a^2 + b^2 - 2ar}{2(b-r)} - r,$$

und setze sein Differential gleich Null, so findet man

$$r^2 - 2br + b^2 = \frac{(a-b)^2}{2},$$

welche Gleichung mit (1) combinirt die Werthe

$$(5) \qquad r = b - \tfrac{1}{2}(a-b)\sqrt{2}$$

$$(6) \qquad R = a + \tfrac{1}{2}(a-b)\sqrt{2}$$

gibt. Unberücksichtigt bleibt hier der Werth von r, welcher $r > R$ geben würde, weil für diesen Fall
Taf. 34. Fig. 12. beide Kreise sich erst jenseits des Schusses an einander anschlössen. Um aber die Formeln (5) und (6) zu construiren, nehme man $OE = OF = a - b$, ziehe EF, und trage die Hälfte EI von E nach C und von F nach C′, wodurch man die beiden Mittelpunkte und die Halbmesser CA und C′CM erhält.

§. 984.

In Fig. 12 aber ist die Curve zu spitzig gegen den Anlauf hin, weil der Bogen AMn nur 45° beträgt, während in Fig. 11 der Anschliessungspunkt M höher liegt. Noch höher liegt er in Fig. 10, wo $AM = 60°$, und wo R und r grösser sind. Man wendet daher auch fast immer die erste Auflösung (Fig. 10) an, besonders bei Brückenbögen, deren innerer Gewölberaum recht geräumig sein soll. Aus letzterem Grunde zieht man öfters auch den Korbbogen der Ellipse vor, deren Halbaxen OA und OB wären, weil letztere Curve im Allgemeinen innerhalb AMB fiele. Denn vergleicht man die Krümmungshalbmesser der Ellipse an A und B mit den Werthen der Halbmesser r und R, wie sie aus (2) sich ergeben, nämlich:

$$\varrho = \frac{b^2}{a}, \quad \varrho' = \frac{a^2}{b} \text{ mit } r = a - x, \quad R = a + x$$

so findet man leicht

$$\varrho < r \text{ und } \varrho' < R, \text{ so lange } \frac{b}{2a} > \tfrac{1}{3}.$$

Ist aber die Drückung unter $\tfrac{1}{3}$, so wendet man mehr als drei Mittelpunkte an.

§. 985.

Taf. 34. Fig. 13. **Korbbogen mit 5 Mittelpunkten.** Ist die Höhe OB unter dem Schlusse kleiner, als ein Drittheil der Weite AOD, so wendet man fünf Mittelpunkte an, um die Krümmungsänderung in den Anschliessungspunkten weniger merklich zu machen. Es seien C, C′, C″ die drei Mittelpunkte des links liegenden halben Korbbogens, von denen der erste stets auf dem horizontalen Durchmesser AO, und der letzte auf dem vertikalen BO liegen muss; man setze ferner:

$$CA = CL = r, \quad C'L = C'M = r', \quad C''M = C''B = R.$$

Die Aufgabe wäre noch immer unbestimmt, selbst nachdem man die Halbmesser AC und BC″ beliebig angenommen, und dadurch die Mittelpunkte C und C″ bestimmt hätte; denn um den Halbmesser C′L und seinen Mittelpunkt zu finden, hätte man nur die beiden Gleichungen

$$CC' = r' - r, \quad C''C' = R - r$$

zwischen drei Unbekannten, oder noch besser, die einzige Gleichung

$$C\,C' + C'\,C'' = R - r$$

zwischen den beiden veränderlichen Distanzen $C\,C'$ und $C'\,C''$, woraus hervorgeht, dass der Mittelpunkt C' construirt werden kann, wie jeder Punkt einer Ellipse, deren Brennpunkte C und C'' sind, und welche $R - r$ zur grossen Axe hat. Man müsste nur die Gegebenen R und r so nehmen, dass sie der Bedingung

$$C\,C' + C'\,C'' > C\,C''$$

oder

$$(R - r)^2 > (a - r)^2 + (R - b)^2$$

entsprächen, und dürfte alsdann, zur Bestimmung von C', nur diejenigen Ellipsenpunkte zulassen, welche innerhalb des Dreieckes $C\,O\,C''$ liegen.

§. 986.

Um nun diese Unbestimmtheit aufzuheben, und dem Korbbogen eine gefällige Form zu geben, nimmt man gewöhnlich folgende Bedingungen an, ohne einen der drei Halbmesser nach Willkühr zu nehmen.

1) $O\,C'' = 3\,O\,C$, oder $R - b = 3\,(a - r)$.

2) Der Punkt E, in welchem der Halbmesser $L\,C\,C'$ den vertikalen Durchmesser schneidet, soll die Mitte von $O\,C''$ sein, d. h. $O\,E = \frac{1}{2}\,O\,C''$.

3) Der Punkt D, in welchem der Halbmesser $M\,C'\,C''$ den horizontalen Durchmesser schneidet, soll ein Drittheil von $O\,C$ abschneiden, d. h. $C\,D = \frac{1}{3}\,C\,O$.

Drückt man nun diese drei Bedingungen als eine Function von R, r, r' aus, so kann man eine Gleichung zweiten Grades in R daraus ableiten, aus welcher man R entwickeln, und sofort auch r und r' bestimmen kann. Da aber diese Gleichung für den Gebrauch zu verwickelt ist, so bedient man sich folgenden Verfahrens.

§. 987.

Man nehme beliebig einen Halbmesser $A\,\gamma$, ferner $O\,\gamma'' = 3\,O\,\gamma$ an, und verbinde den Punkt γ mit der Mitte ε von $O\,\gamma''$, wodurch der erste Bogen $A\,\lambda$ bestimmt wird. Hierauf nehme man $\gamma\,\delta = \frac{1}{3}\,O\,\gamma'$; alsdann schneidet die Gerade $\delta\,\gamma''$ die $\gamma\,\varepsilon$ in einem Punkte γ', welcher der Mittelpunkt eines zweiten Bogens $\lambda\,\mu$ ist, an welchen sich der mit $\gamma''\,\mu$ beschriebene Bogen $\mu\,6$ anschliessen würde; hiedurch aber würde man eine Curve erhalten, deren Höhe $O\,6$ nicht die in der Aufgabe bezeichnete wäre. Nun ist aber das Vieleck $O\,\gamma\,\gamma'\,\gamma''$ offenbar ähnlich einem unbekannten Vielecke $O\,C\,C'\,C''$, und setzt man

$$O\,C = x,\quad O\,C'' = y,\quad C\,C' + C'\,C'' = z,$$
$$O\,\gamma = p,\quad O\,\gamma'' = q,\quad \gamma\,\gamma' + \gamma'\,\gamma'' = s,$$

so erhält man folgende Gleichungen ersten Grades:

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q},\quad \frac{x}{p} = \frac{z}{s},\quad z + a - x = y + b,$$

woraus man, wenn man z eliminirt,

$$(7)\qquad x = \frac{(a - b)\,p}{p + q - s},\quad y = \frac{(a - b)\,q}{p + q - s}$$

erhält. Diese Werthe sind leicht zu berechnen oder graphisch zu construiren, weil die Linien p, q, s durch den gemachten Versuch bekannt sind. Es ist sogar zu bemerken, dass hier $q = 3\,p$ ist; die Formeln (7) sind aber geflissentlich so geschrieben, dass sie sich auch für jedes andere Verhältniss zwischen $O\,C$ und $O\,C''$ anwenden lassen, obgleich das von 1 zu 3 stets als das passendste erscheint.

§. 988.

Taf. 14. Fig. 14. Man kann nach der vorhergehenden Methode einen Korbbogen aus einer beliebigen Zahl $2n+1$ Kreisbögen zusammensetzen. Denn hat man $O C^{v} = 3\,O C$ genommen, so theile man $O C^{v}$ in n gleiche Theile, und $C O$ in n Theile, welche sich wie die Zahlen 1, 2, 3, ... n verhalten. Für die Bögen der Brücke zu Neuilly, deren Weite 39 Meter und deren Drückung = ¼ beträgt, hat man n = 5 gesetzt. Der Halbmesser A C wurde nach Willkühr, und $O C^{v} = 3 . O C$ angenommen, hierauf wurde $O C^{v}$ in fünf gleiche Theile, und O C in fünf solche Theile getheilt, dass

$$C D' : D' D'' : D'' D''' : D''' D'''' : D'''' O = 1 : 2 : 3 : 4 : 5,$$

und alsdann C mit E', D' mit E'', D'' mit E''', ... verbunden, und dadurch das Vieleck $C C' C'' C''' C'''' C^{v}$ gebildet, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der sechs Bögen sind, aus welchem die eine Hälfte des Korbbogens besteht.

Da man aber hiedurch eine Höhe O B erhält, welche nicht immer diejenige ist, welche man erhalten wollte, so betrachte man dieses Vieleck als einen Versuch; und bezeichnet man durch x und y die wahren Distanzen O C und $O C^{v}$, welche einem Korbbogen zukommen, dessen Höhe b ist, so erhält man wieder ähnliche Gleichungen, wie in §. 987, und endlich die beiden Werthe

$$8) \qquad x = \frac{(a-b)\,p}{4p-s}, \quad y = 3x$$

wo s die Summe der Seiten des Vieleckes $C C' C'' C''' C'''' C^{v}$ bezeichnet, das zu obigem Versuche gedient hat.

B. Ueber schräge Brücken (zu §. 654).

§. 989.

Wenn das Gewölbe, statt nur die Dicke einer gewöhnlichen Mauer zu durchdringen, eine Länge von mehreren Metern, in der Richtung der Erzeugenden, darbietet, wie es bei den schrägen Brücken der Eisenbahnen und Viaducte der Fall ist, so muss man bei der Zurüstung auf die Richtung Acht haben, in welcher der Druck am grössten ist; diese Richtung aber wird angezeigt durch die Linie auf der innern Gewölbefläche, in welcher, nach Wegnahme des Lehrgerüstes, die grösste Contraction stattfindet. Nun hat der Ingenieur Lefort in einer in die *Annales des Ponts et Chaussées*, Bd. XVII eingerückten Abhandlung bewiesen, dass der Bogen der grössten Contraction der gerade Schnitt des Cylinders, d. h. die Linie der grössten Krümmung sei. Daraus folgt, dass in Fig. 1 der Taf. 38 der grösste Druck senkrecht auf die Pfeiler A C' und B D' ausgeübt werde, und dass also die spitzen Ecken A und D' eine bedeutendere Belastung zu tragen haben, als die stumpfen B und C'. Um diesen schweren Uebelstand zu vermeiden, ist man auf den Einfall gekommen, das ganze Tonnengewölbe in schmale und von einander unabhängige Zonen zu theilen, deren jede zwischen zweien mit der Hauptebene parallelen Schnitten enthalten sei. Nun wird in jedem dieser partiellen Gewölbe die Linie der grössten Krümmung (wenigstens unter allen denen vertikalen Durchschnitten, welche ganz auf diesem Cylinderstücke ausgezogen werden können) offenbar der kürzesten Diagonale, wie U' D', entsprechen; in dieser Richtung wird also auch der Druck am grössten sein, und sie wird der parallelen Lage mit der Hauptebene um so näher rücken, je schmaler die Zonen gemacht werden. Da nun in dieser Richtung die Widerlager mehr Widerstand leisten, so hat man also durch eine solche Theilung mehr Stabilität

für das Gewölbe gewonnen. Man hat den Versuch an mehreren schiefen Brücken der Eisenbahn von Paris nach Versailles ausgeführt, und, wie es scheint, mit befriedigendem Erfolge. Dabei haben die Ingenieurs als Wölbungskanten orthogonale Trajectorien angewendet, d. h. Linien, welche alle parallel mit der Hauptebene gemachten Schnitte unter rechten Winkeln schneiden. Diese Trajectorien sind windschiefe Curven, und werden graphisch auf eine einfache Art construirt; zu Asymptoten haben sie die beiden im Anlaufe liegenden Erzeugenden. Was aber den Calcul und die Ausführung im Einzelnen betrifft, so muss auf die oben angeführte, interessante Abhandlung verwiesen werden.

C. Zu §. 15.

Die Theorie der Schatten bietet, in derjenigen Allgemeinheit, wie Monge sie in seiner 1774 erschienenen Abhandlung über die entwickelbaren Flächen behandelt hat, viele Aehnlichkeit mit der Defilirung der Befestigungswerke dar; ein Problem, das um eben jene Zeit die höheren Offiziere an der Militär-Ingenieurschule zu Mézières beschäftigte, und für Monge wahrscheinlich die Veranlassung wurde zur Aufstellung jener Theorien und graphischen Methoden, welche zusammen seine *Géométrie descriptive* bilden. Man wird daher nicht ohne Interesse die ersten Paragraphen einer Abhandlung lesen, welche der an jener Schule als Lehrer der Fortification angestellte Professor Say in das IV. Heft des *Journal de l'École polytechnique* einrücken liess.

Es ist eine der Hauptbestimmungen jedes Befestigungswerkes, Diejenigen, welche es vertheidigen, gegen die feindlichen Kugeln sicher zu stellen; desshalb gilt es als Grundregel beim Defiliren, die Werke so anzulegen, dass durch ihre Brustwehren Alles geschützt wird, was durch die directen Schüsse des Feindes in Gefahr kommen könnte. Es sind hiebei drei Dinge in's Auge zu fassen:

1) der Raum, aus welchem die gegen das Befestigungswerk gerichteten feindlichen Schüsse kommen können. Da der Feind seinen Standpunkt mehr oder weniger erhöhen kann, so muss jener Raum sich bis zu einer gewissen Höhe über das Terrain erstrecken, von welchem das Werk umgeben ist. Eben so muss er sich auch bis zu einer gewissen horizontalen Distanz von dem Werke erstrecken: die Grenzen werden später angegeben werden.

2) Der Raum, welchen man den feindlichen Schüssen entziehen oder defiliren will.

3) Die Masse der Brustwehren, welche, wenn ein Werk gut defilirt ist, alle directen Schüsse auffangen muss: sie muss also von jeder Geraden geschnitten werden, welche man aus irgend einem Punkte des Raumes (1) nach irgend einem Punkte des Raumes (2) ziehen kann.

Der Raum (1) heisse der äussere, und (2) der innere Raum.

Man erkennt hier schon die grosse Aehnlichkeit, welche die Aufgabe der Defilirung eines Platzes mit dem Schattenproblem hat. Die direkten Schüsse sind die Lichtstrahlen, der äussere Raum ist der leuchtende, und die Masse der Brustwehren der dunkle Körper. Der Kernschatten dieses letztern Körpers ist der ganze durch die Brustwehren defilirte Raum, und in diesem muss der Raum (2) ganz enthalten sein.

Ist nun der äussere Raum und die Brustwehr gegeben, und es sollen geometrisch die Grenzen des defilirten Raumes gefunden werden, so kann man ebenso verfahren, wie wenn man den von der Brustwehr geworfenen Schatten bestimmen wollte, unter der Voraussetzung, dass alle Punkte des äussern Raumes leuchtend seien. Denkt man sich eine Ebene, die sich bewegt, und während ihrer Bewegung stets auf der Brustwehr und derjenigen Fläche aufliegt, wodurch der äussere Raum begrenzt wird, so bilden die auf

einander folgenden Durchschnitte der verschiedenen Lagen dieser Ebene eine neue Fläche, und diese bestimmt den defilirten Raum. Sie heisse die Defilirungsfläche.

Derjenige Theil der Brustwehr, auf welcher die erzeugende Ebene aufliegt, ist oft nur eine einzige Gerade, die innere Krone der Brustwehr. Für diesen Fall wird die Defilirungsfläche eine durch die Krone gehende Ebene, welche die Grenzfläche des äussern Raumes berührt. Diese Defilirungsebene berührt aber nicht bloss die Grenzfläche des äussern Raumes, sondern liegt ganz oberhalb derselben, d. h. sie schneidet sie nirgends. Dieser Umstand ist wesentlich, und wird durchaus, als sich von selbst verstehend, vorausgesetzt.

[illegible] u. durch [illegible]
[illegible]

Leroy, Charles F. A.,

Die Stereotomie (Lehre vom Körperschnitte), enthaltend: die Anwendungen der darstellenden Geometrie auf die Schattenlehre, Linearperspective, Gnomonik, den Steinschnitt und die Holzverbindungen
Bd.: 1

Stuttgart 1861

4 Math.a. 180 i-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10052977-1